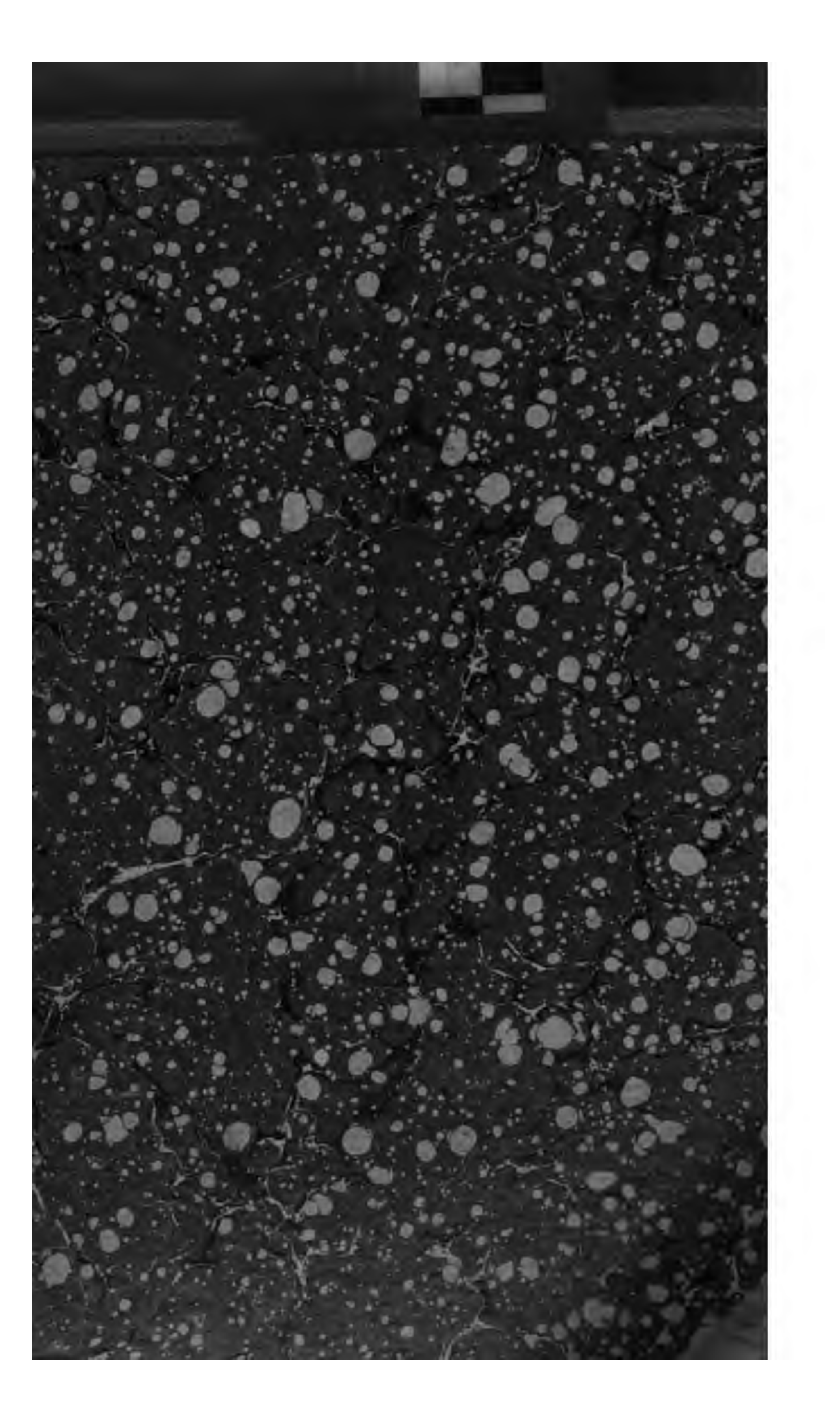
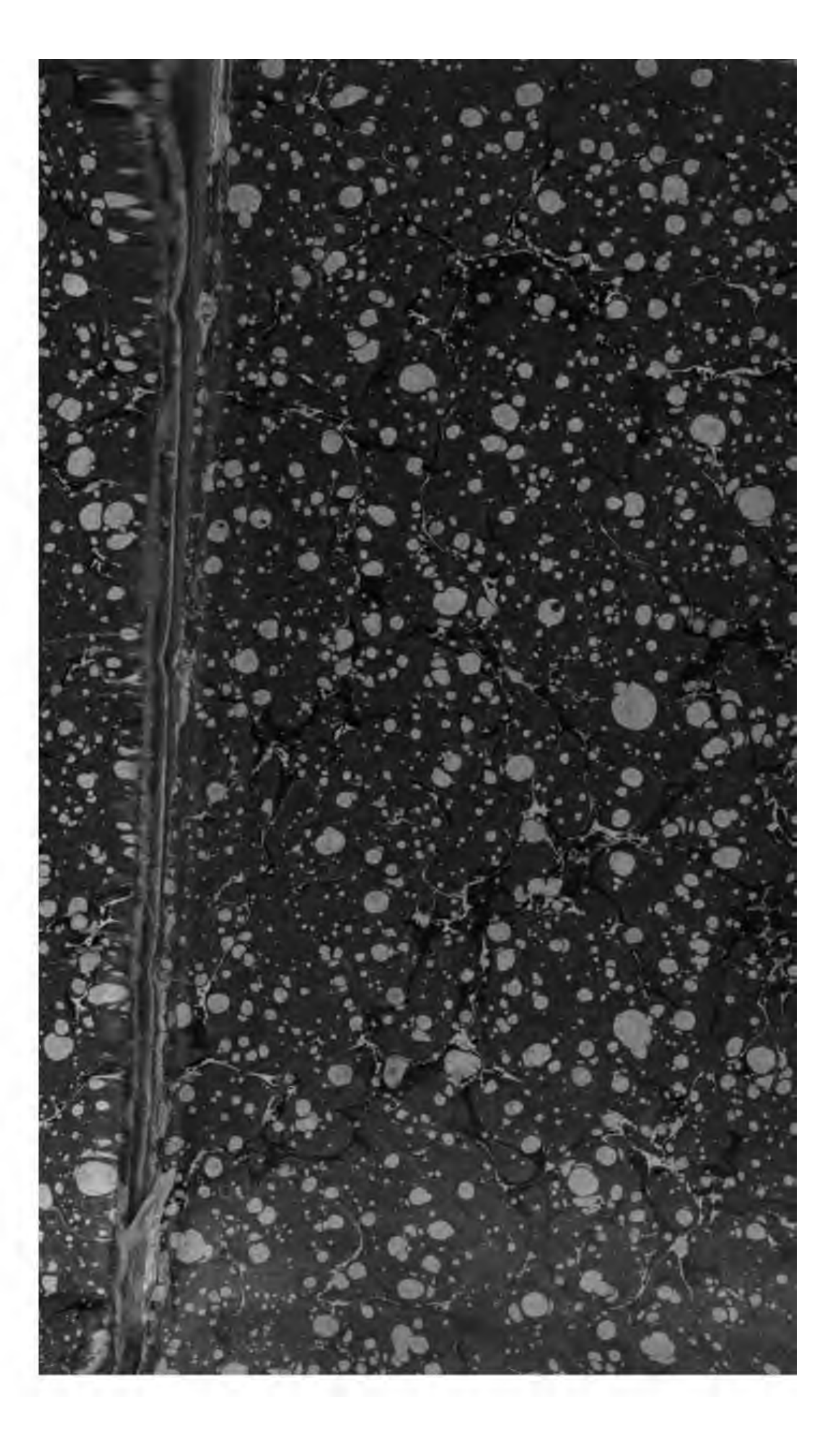
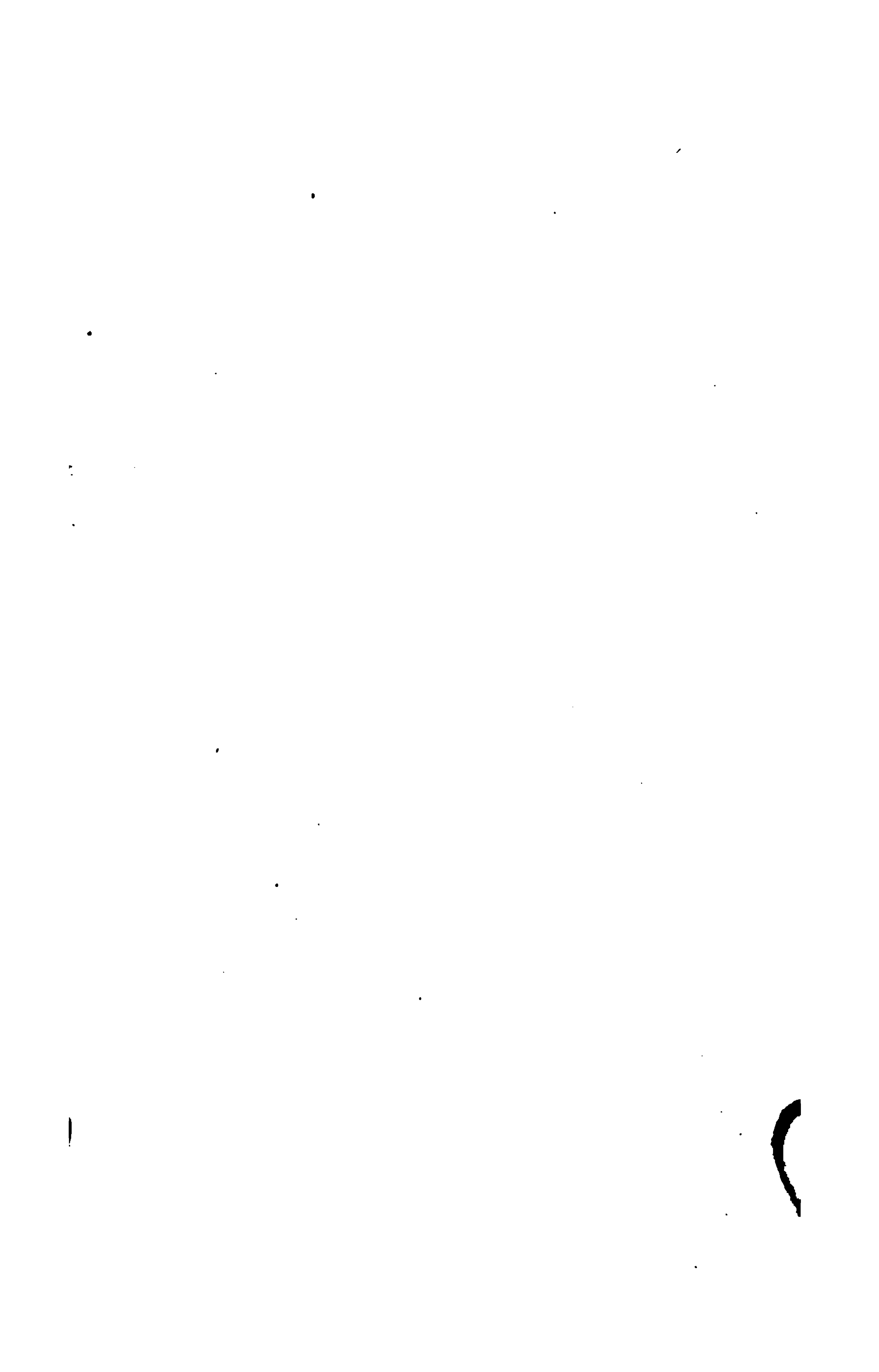

Stanford University Libraries
3 6105 000 693 158









ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE.

BAND 1.



ANNALEN

DER

PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 1.

DER GANZEN REIHE 306. BAND.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

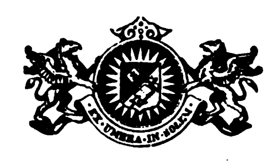
UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT DREI FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1900.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

Inhalt.

Vierte Folge. Band 1.

Erstes Heft.

		Seite
1.	O. Dörge. Eine Studie über Seifenblasen	1
2.	H. Wright. Die diffuse Reflexion des Lichtes an matten Oberflächen	17
3.	E. Aschkinass. Ueber anomale Dispersion im ultraroten Spectralgebiete	42
4.	M. Planck. Ueber irreversible Strahlungsvorgänge	69
5.	A. Larsen. Ueber den Einfluss der Temperatur auf die elektrische Leitungsfähigkeit schwacher Amalgame und die Löslichkeit von Metallen in Quecksilber	123
6.	F. Kohlrausch. Ueber den stationären Temperaturzustand eines elektrisch geheizten Leiters	132
7.	A. Orgler. Zur Kenntnis des Funkenpotentiales in Gasen	159
8.	J. Koenigsberger. Ueber neuere Untersuchungen der magnetischen Susceptibilität	175
9.	O. Liebknecht und A. P. Wills. Moleculare Susceptibilität paramagnetischer Salze der Eisengruppe	178
10.	H. du Bois und O. Liebknecht. Moleculare Susceptibilität paramagnetischer Salze seltener Erden	189
11.	H. du Bois. Halbring-Elektromagnet	199
12.	Lizzie R. Laird. Ueber den zeitlichen Verlauf der magnetischen Nachwirkung in Eisenscheiben	207
13.	E. Yamaguchi. Zur Kenntnis des thermomagnetischen Transversaleffectes im Wismut	214

Ausgegeben am 16. Januar 1900.

Zweites Heft.

Seite

1. R. Reiff. Die Druckkräfte in der Hydrodynamik und die Hertz'sche Mechanik 225
2. P. A. Thomas. Der longitudinale Elasticitätscoefficient eines Flusseisens bei Zimmertemperatur und bei höheren Temperaturen 232
3. Ch. Bohr. Die Löslichkeit der Kohlensäure in Alkohol zwischen -67° und $+45^{\circ}$ C. In- und Evasionscoefficient bei 0° . . . 244
4. U. Behn. Ueber die specifische Wärme der Metalle, des Graphits und einiger Legirungen bei tiefen Temperaturen . . . 257
5. U. Behn. Ueber die Sublimationswärme der Kohlensäure und die Verdampfungswärme der Luft 270
6. G. Tammann. Ueber adiabatische Zustandsänderungen eines Systems, bestehend aus einem Krystall und seiner Schmelze . 275
7. H. Pflaum. Ueber ein Vacuumelektroskop 290
8. G. Schwalbe. Ueber die experimentelle Grundlage der Exner'schen Theorie der Luftelektricität 294
9. H. Sieveking. Ueber Ausstrahlung statischer Elektricität aus Spitzen 299
10. H. Diesselhorst. Ueber das Problem eines elektrisch erwärmten Leiters 312
11. C. Heinke. Ueber Wellenstromerreger 326
12. E. Hagen und H. Rubens. Das Reflexionsvermögen von Metallen und belegten Glasspiegeln 352
13. W. Voigt. Ueber eine Dissymmetrie der Zeeman'schen normalen Triplets 376
14. W. Voigt. Weiteres zur Theorie der magneto-optischen Wirkungen 389
15. E. Riecke. Zur Kinetik der Serienschwingungen eines Linienspectrums 399
16. E. Riecke. Lichtenberg'sche Figuren im Innern von Röntgenröhren 414
17. J. Precht. Ueber das Verhalten der Leuchtschirme in Röntgenstrahlen 420
18. J. Stark. Ueber den Einfluss der Erhitzung auf das elektrische Leuchten eines verdünnten Gases 424
19. J. Stark. Ueber elektrostatische Wirkungen bei der Entladung der Elektricität in verdünnten Gasen 430
20. P. Drude. Zur Geschichte der elektromagnetischen Dispersionsgleichungen 437

Ausgegeben am 16. Februar 1900.

Drittes Heft.

Seite

1. C. Heinke. Ueber Wellenstromerreger. (Schluss von p. 351) 441
2. M. Cantor. Versuch über die Absorption des Lichtes in elektrisch leuchtenden Gasen 462
3. H. Morris-Airey. Ein Versuch zur Hypothese der elektrolytischen Leitung in Geisslerröhren 466
4. F. Richarz und W. Ziegler. Analyse oscillirender Flaschenentladungen vermittelst der Braun'schen Röhre 468
5. K. Bürker. Ueber ein Dreipulvergemisch zur Darstellung elektrischer Staubfiguren 474
6. H. T. Calvert. Die Dielektricitätsconstante des Wasserstoffsuperoxyds 483
7. P. Lenard. Ueber Wirkungen des ultravioletten Lichtes auf gasförmige Körper 486
8. J. E. Almy. Ueber die Funkenpotentiale in festen und tropfbarflüssigen Dielektricis 508
9. L. Graetz. Ueber die Quincke'schen Rotationen im elektrischen Feld 530
10. F. J. Micheli. Ueber den Einfluss von Oberflächenschichten auf das Kerr'sche magneto-optische Phänomen 542
11. P. Drude. Zur Elektronentheorie der Metalle 566
12. A. v. Rzewuski. Ein elektrolytischer Unterbrecher für schwache Ströme 614
13. W. Marek. Elektromotorische Kraft des Clark- und Westonelementes 617
14. M. Planck. Bemerkungen zu einer Abhandlung über Thermodynamik des Hrn. K. Wesendonck 621

Ausgegeben am 20. März 1900.

Viertes Heft.

1. G. C. Schmidt. Ueber den Einfluss der Temperatur auf das Potentialgefälle in verdünnten Gasen 625
2. L. Graetz. Ueber mechanische Bewegungen unter dem Einfluss von Kathodenstrahlen und Röntgenstrahlen 648
3. R. v. Hirsch. Störungen am kritischen Punkt von reinen Flüssigkeiten und Mischungen 655
4. St. Meyer. Bestimmung einiger Magnetisirungszahlen . . . 664
5. St. Meyer. Ueber Atommagnetismus und Molecularmagnetismus 668
6. L. Boltzmann. Die Druckkräfte in der Hydrodynamik und die Hertz'sche Mechanik 673

Seite

7. W. Cady. Ueber die Energie der Kathodenstrahlen 678
8. L. Arons. Ueber den elektrischen Lichtbogen zwischen Metallelektroden in Stickstoff und Wasserstoff 700
9. M. Planck. Entropie und Temperatur strahlender Wärme . 719
10. P. Grützner. Ueber die elektrostatische und elektrolytische Aufzeichnung elektrischer Ströme 738
11. O. Wiedeburg. Energetische Theorie der Thermoelektricität und Wärmeleitung von Metallen 758
12. M. Eckardt. Bestimmung der Volumenänderung von Rubidium beim Schmelzen 790

Ausgegeben am 19. April 1900.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Taf. I. Thomas, Figg. 1 u. 2.
„ II. Behn.
„ III. Micheli, Figg. 1—4.

1900. № 1.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 1.

1. *Eine Studie über Seifenblasen;*
von O. Dörge.[1]

Erster Teil.

Das Wesen des Carnot'schen Kreisprocesses besteht bekanntlich darin, dass Wärme von einer höheren Temperatur auf eine niedrigere übergeführt wird unter gleichzeitiger Leistung eines bestimmten Quantums Arbeit. Dieses ist bei Innehaltung des Weges und der dabei in Betracht kommenden Temperaturen unabhängig von der arbeitenden Substanz, welche den Kreisprocess durchläuft. Der Weg selbst besteht aus zwei Isothermen und zwei Adiabaten, die sich zu einer geschlossenen Curve aneinander reihen. — Ein ähnlicher Process lässt sich auf elektrischem Gebiete herstellen; nur tritt hier an Stelle der Wärme höherer und niedrigerer Temperatur elektrische Energie höherer und niedrigerer Spannung. Der durchlaufene Weg besteht aus Curven, die mit den Isothermen und Adiabaten in ihrem Wesen eine grosse Aehnlichkeit besitzen. Man denke sich eine Seifenblase, der man eine gewisse elektrische Ladung mitgetheilt hat. Infolge dessen werden auf alle Theile der Oberfläche normal zu dieser Zugkräfte wirken, die sich aus der ertheilten Ladung und der geometrischen Gestalt der Blase berechnen lassen und die bestrebt sind, die Fläche solange zu vergrössern, bis ihnen durch äussere Druckkräfte das Gegengewicht gehalten wird. Mit einer solchen Blase lässt sich nun folgender Kreisprocess ausführen:

I. Die Blase wird unendlich langsam ausgedehnt, während sie in Berührung mit einem Elektricitätsbehälter von grosser Capacität ist. Das Potential des Behälters sei positiv und

1) Nach der Rostocker Inaugural-Dissertation des Verfassers.

gleich V_1. Dieses wird während des Processes wegen der grossen Capacität merklich constant bleiben.

II. Die Berührung wird aufgehoben und die Blase langsam weiter ausgedehnt, aber ohne Zufuhr elektrischer Energie, bis das Potential der Blase bis zu einem gewissen Werthe V_2 gesunken ist.

III. Die Blase wird mit einem Elektricitätsbehälter sehr grosser Capacität vom Potential V_2 in Berührung gebracht und comprimirt; und schliesslich wird

IV. diese Berührung wiederum aufgehoben, die Blase weiter comprimirt, bis der Anfangszustand wieder hergestellt ist.

Die Aehnlichkeit dieses Kreisprocesses mit dem Carnot'schen ist unverkennbar; die Curven in I. und III. entsprechen Isothermen, dort sind Wärmebehälter, hier Elektricitätsbehälter grosser Capacität; dort bleibt die Temperatur constant und wird Wärme zugeführt, hier bleibt das Potential constant unter Zuführung elektrischer Energie. Die Curven in II. und IV. entsprechen Adiabaten. Beim Carnot'schen Process wird keine Wärme, beim elektrischen Process keine elektrische Energie zugeführt, während die Ladung constant bleibt. Das Resultat ist in beiden Fällen sich ähnlich. In dem einen Falle ist Wärme von einer höheren auf eine niedrigere Temperatur gesunken, in dem anderen elektrische Energie von höherer Spannung auf niedrigere, während in beiden Fällen zugleich ein bestimmtes Quantum Arbeit gewonnen ist. In Bezug auf den arbeitenden Körper wollen wir einige vereinfachende Bedingungen treffen, und zwar soll:

1. der Ballon Kugelgestalt haben und ein Leiter sein, weil nur in diesem Falle der auf die Oberfläche wirkende Zug unabhängig von der Lage des Flächenstückes ist,

2. soll der Ballon keine Oberflächenspannung besitzen, und

3. soll kein Innendruck irgend eines Gases, sondern nur der elektrische Druck auf die Oberfläche wirken, dem durch einen Aussendruck das Gleichgewicht gehalten wird.

Welchen Einfluss diese Beschränkungen auf die praktische Ausführbarkeit des Processes haben, darauf soll an späterer Stelle eingegangen werden. Die erste der Bedingungen findet ihre mathematische Formulirung darin, dass die Capacität

gleich dem Radius des Ballons gesetzt wird, während die beiden anderen besagen, dass die von den elektrischen Zugkräften geleistete Arbeit gleich der äusseren gewonnenen Arbeit ist.

Hat der Ballon die Ladung Q, das Potential V, den Radius oder die Capacität r, so besteht offenbar die Relation:

$$Q = r \,.\, V, \tag{1}$$

welche wir die Zustandsgleichung des Ballons nennen wollen. Diese Form ist indessen für unseren Zweck unbrauchbar, weil die geleistete Arbeit durch Integrale von der Form $\int p\,dv$ dargestellt wird, wo p den Druck, v das Volumen des Ballons bezeichnen.

Die Feldstärke an der Oberfläche des Ballons ist:

$$K = \frac{Q}{r^2},$$

und der Zug auf die Flächeneinheit der Kugel:

$$p = \frac{1}{8\pi} K^2 = \frac{1}{8\pi} \frac{Q^2}{r^4}, \tag{2}$$

falls das umgebende Medium die Dielektricitätsconstante 1 besitzt. Das dazu gehörige Volumen ist:

$$v = \frac{4}{3} \pi r^3, \tag{3}$$

folglich:

$$(8\pi p)^3 \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^2 = V^6. \tag{4}$$

Diese Form der Zustandsgleichung ist unserem Zweck entsprechend, denn sie giebt uns die den Processen I und III entsprechenden Curven, die den Isothermen entsprechen, falls wir darin $V = V_1$ oder V_2 setzen.

Weiter ergiebt sich aus (3) und (4)

$$Q^6 = \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^4 (8\pi p)^3, \tag{5}$$

die ebenfalls eine brauchbare Zustandsgleichung darstellt, da sie uns die Processe II und IV beschreibt, die den Adiabaten analog sind, wenn Q constant gesetzt wird.

Fig. 1 möge den Process, der den Gang $abcda$ gehe, illustriren. Die auf die Zustände a, b, c, d bezüglichen Werte von p seien bezeichnet durch p_a, p_b, p_c, p_d, die entsprechenden Werte des Radius durch r_a, r_b, r_c, r_d.

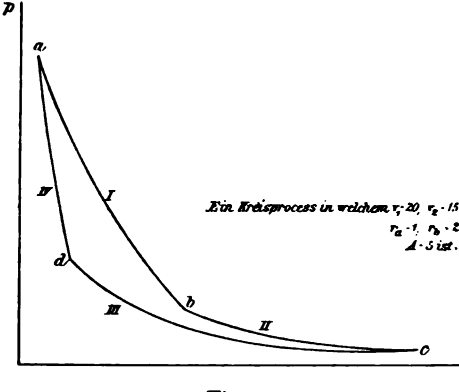


Fig. 1.

Wir betrachten sodann den Process I, der durch die aus (4) folgende Gleichung

$$(4a)\quad (8\pi p)^3 \left(\frac{3v}{4\pi}\right)^2 = V_1^6$$

charakterisirt ist.

Auf diesem Wege wird die Arbeit

$$A_{\mathrm{I}} = \int_a^b p \, . \, dv$$

geleistet.

$$(6)\qquad A_{\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}(8\pi)^{-1/3} V_1^3 (p_b^{-1/3} - p_a^{-1/3}).$$

Die elektrische Energie des Ballons war im Punkte a

$$\sum_a = \tfrac{1}{2} Q_a V_1,$$

im Punkte b ist sie

$$\sum_b = \tfrac{1}{2} Q_b V_1,$$

falls Q_a und Q_b die Ladungen des Ballons in a und b bezeichnen. Daraus folgt für die Zunahme der Energie beim Process I

$$\sum_b - \sum_a = \tfrac{1}{2} V_1 (Q_b - Q_a).$$

Drücken wir hier Q_a und Q_b mit Hülfe der Gleichungen (1) und (2) durch V_1, p_a und p_b aus, so ergiebt sich:

$$(7)\qquad Q_a^2 = \frac{V_1^4}{8\pi p_a}, \qquad Q_b^2 = \frac{V_1^4}{8\pi p_b}$$

und schliesslich

$$(8)\qquad \sum_b - \sum_a = \tfrac{1}{2} V_1^3 (8\pi)^{-1/3} (p_b^{-1/3} - p_a^{-1/3}).$$

Durch Vergleichung der Formeln (6) und (8) ergiebt sich, dass $A_{\mathrm{I}} = \sum_b - \sum_a$ ist, d. h. dass die vom Ballon geleistete Arbeit gleich seiner Energiezunahme ist, oder dass die dem Behälter mit dem Potential V_1 entzogene Energie halb zur Arbeitsleistung, halb zur Erhöhung der elektrischen Energie des Ballons verwandt ist.

Im II. Process wird eine Arbeit

$$A_{II} = \int_{p_b}^{p_c} p \, . \, d v$$

geleistet, wo p und v infolge der Relation (5) durch die Bedingung verknüpft sind:

$$Q_b^6 = \left(\frac{3 \, v}{4 \, \pi}\right)^4 (8 \, \pi \, p)^3 .$$

(9) $$A_{II} = - \tfrac{1}{2} (8 \, \pi)^{-1/2} V_1^3 \, p_b^{-3/4} (p_c^{1/4} - p_b^{1/4}),$$

Die Berechnung der Arbeit im III. Process ist der im ersten analog. Man erhält

(10) $$A_{III} = \tfrac{1}{2} V_2^3 (8 \, \pi)^{-1/2} (p_d^{-1/2} - p_c^{-1/2}) .$$

Die Arbeit im IV. Process schliesslich beträgt

(12) $$A_{IV} = - \tfrac{1}{2} (8 \, \pi)^{-1/2} V_2^3 \, p_d^{-3/4} (p_a^{1/4} - p_d^{1/4}) .$$

Betrachten wir jetzt das Resultat des Kreisprocesses. Laut der Definition von A_I, A_{II}, A_{III}, A_{IV} haben wir die nach aussen hin geleistete Arbeit positiv, die von aussen am Ballon geleistete Arbeit negativ gerechnet. Die erstere beträgt

(13) $$A_I + A_{II} = \tfrac{1}{2} (8 \, \pi)^{-1/2} V_1^3 \{p_b^{-1/2} - p_a^{-1/2} - (p_c^{1/4} - p_b^{1/4}) \, p_d^{-3/4}\},$$

die letztere beträgt

(14) $$A_{III} + A_{IV} = \tfrac{1}{2} (8 \pi)^{-1/2} V_2^3 \{p_d^{-1/2} - p_c^{-1/2} - (p_a^{1/4} - p_d^{1/4}) \, p_d^{-3/4}\}.$$

Gewonnen ist die Arbeit:

$$A = \sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{IV}}{}_n \, A_n .$$

Dieser Ausdruck nimmt eine einfache Gestalt an, wenn man bedenkt, dass c sowohl auf der Curve $b \, c$ als auch auf der Curve $c \, d$, und d sowohl auf dem Zweig $c \, d$ als auch auf dem Zweige $d \, a$ liegt. Daraus ergeben sich die Hülfsbeziehungen

(15) $$\frac{V_1^4}{V_2^4} = \frac{p_b}{p_c} = \frac{p_a}{p_d} .$$

Eliminirt man nun aus

$$A = \sum_{\mathrm{I}}^{\mathrm{IV}}{}_n \, A_n$$

mit Hülfe von (15) p_a und p_b, so ergiebt sich nach einiger Rechnung

(16) $$A = (8 \, \pi)^{-1/2} (V_1 \, V_2^2 - V_2^3) (p_c^{-1/2} - p_d^{-1/2}),$$

ein Ausdruck, der positiv ist, weil $p_c < p_d$, $V_1 > V_2$ und V_1 und V_2 stets gleiches Vorzeichen haben müssen, wie bald gezeigt werden soll.

Wir hatten ferner für die aus der Quelle V_1 entnommene elektrische Energie gefunden:

$$E_1 = (8\pi)^{-1/2}(p_b^{-1/2} - p_a^{-1/2})\, V_1^2,$$

woraus sich mit Hülfe der Gleichung

$$p_b^{-1/2} - p_a^{-1/2} = V_1^{-2}\, V_2^2\, (p_c^{-1/2} - p_d^{-1/2}),$$

die aus (15) folgt, für E_1 die bequemere Form

$$E_1 = (8\pi)^{-1/2}\, V_1\, V_2^2\, (p_c^{-1/2} - p_d^{-1/2}) \tag{17}$$

gewinnen lässt.

E_1 ist positiv gerechnet, wie aus $p_c < p_d$ folgt.

Für die von der Quelle V_2 abgegebene Energie folgt:

$$E_2 = (8\pi)^{-1/2}\, V_2^2\, (p_d^{-1/2} - p_c^{-1/2}). \tag{18}$$

Dieser Ausdruck ist negativ. Der Behälter V_2 hat also die Energie $-E_2$ empfangen. Die Formel (18) können wir auch schreiben

$$E_2 = -(8\pi)^{-1/2}(p_c^{-1/2} - p_d^{-1/2})\, V_2^2 \tag{18a}$$

und wir wollen von jetzt ab das negative E_2 in (18a) mit E_2 bezeichnen, also jetzt setzen:

$$E_2 = (8\pi)^{-1/2}(p_c^{-1/2} - p_d^{-1/2})\, V_2^2. \tag{18b}$$

Sodann folgt aus (17) und (18b)

$$\frac{E_1}{V_1} = \frac{E_2}{V_2}. \tag{19}$$

Ferner wollen wir setzen

$$\frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{V_1 - V_2}{V_1} = \zeta e. \tag{20}$$

Die bis hierher gewonnenen Resultate sollen jetzt discutirt und dazu in Parallele die Ergebnisse des Carnot'schen Kreisprocesses gestellt werden. In dem elektrischen Process, der in der Richtung *abcda* verlief, ist eine bestimmte Menge elektrischer Energie von einem höheren Potential auf ein niedrigeres gesunken und zugleich eine gewisse Menge Arbeit gewonnen. Würden wir den Process rückwärts, d. h. in der Richtung *adcba* laufen lassen, so würde ein Quantum elektri-

scher Energie von einem niedrigerem Potential auf ein höheres unter gleichzeitigem Aufwand eines bestimmten Quantums Arbeit gehoben. In dem Carnot'schen Kreisprocess sinkt Wärme von höherer auf niedrigere Temperatur, zugleich wird ein bestimmtes Quantum als äussere Arbeit nutzbar gemacht. In dem dazu inversen Process dagegen wird Wärme von niedrigerer Temperatur auf eine höhere gehoben, gleichzeitig aber von aussen Arbeit in den Process hineingesteckt.

Wenden wir uns nun zu der Formel (19), so ist deren Analogon in der Wärmetheorie

$$\frac{Q_1}{\vartheta_1} = \frac{Q_2}{\vartheta_2},$$

wenn Q_1 die der Quelle mit der Temperatur ϑ_1, Q_2 die der Quelle mit der Temperatur ϑ_2 entnommene Wärmemenge ist.

Aehnlich der Formel (20) ist

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1} = \zeta w.$$

ζw ist der sogenannte ökonomische Coefficient, der uns angiebt, welcher Bruchteil der aufgenommenen Wärmemenge Q_1 als Arbeit hat nutzbar gemacht werden können. Der Maximalwerth von ζw ist 1; er tritt in dem idealen Falle ein, dass ϑ_2 die Temperatur des absoluten Nullpunktes ist. Der vorliegende Fall aus der Elektricität weist ebenfalls einen ökonomischen Coefficienten auf, der durch

$$\zeta_e = \frac{E_1 - E_2}{E_1} = \frac{V_1 - V_2}{V_1}$$

definirt ist und angiebt, welcher Teil der dem oberen Behälter V_1 entnommenen Energie E_1 beim betrachteten Process in Form von äusserer Arbeit nutzbar gemacht ist. Der grösste Werth von ζe ist auch hier 1 und wird dann erreicht, wenn $V_2 = 0$ ist, ein Fall, der nicht realisirbar ist, da er bedeuten würde $r = \infty$. Dass $V_2 < 0$ wäre und dadurch $\zeta e > 1$ würde, ist unmöglich; denn in b ist das Potential positiv, die Ladung des Ballons also ebenfalls positiv. Auf dem Wege bc wird keine Elektricität zugeführt, folglich kann das Potential des Ballons nicht das Zeichen wechseln.

Construiren wir in der Wärmetheorie einen beliebigen reversiblen Kreisprocess, so lässt sich dieser nach Clausius zerlegen in Isothermen und Adiabaten und es ist $\int dQ / \vartheta = 0$.

Ebenso kann man einen beliebigen reversiblen Kreisprocess für den Ballon in Curen $V = \text{const.}$ und $Q = \text{const.}$ zerlegen und es folgt $\int dE/V = 0$, ein Resultat, dass auch ohne weiteres aus dem elektrischen Grundprincip folgt, dass Elektricität unerschaffbar und unzerstörbar ist.

$2\int dE/V$ bedeutet nämlich die an den Körper abgegebene Elektricitätsmenge, diese aber muss beim Kreisprocess Null sein.

Zum Schluss dieser Untersuchung noch eine Bemerkung über den Transport elektrischer Energie. **Clausius** hat bekanntlich den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie die Fassung gegeben: „Wärme geht nicht von selbst von einer tieferen Temperatur auf eine höhere über."

Bedienen wir uns der Bezeichnungsweise von C. **Neumann**, so können wir dem Satze die Form geben: „Ein Process vom Gesamteffect $\Theta_1 \uparrow^{q} \Theta_2 \uparrow^{-q}$ ist unmöglich."

Hier sind Θ_1 und Θ_2 grosse Wärmebehälter von den Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2, $\vartheta_1 > \vartheta_2$, q ist eine Wärmemenge, die von Θ_1 auf Θ_2 befördert gedacht wird. Setzen wir statt Θ_1 und Θ_2 zwei Quellen $\sum_1$ und $\sum_2$ elektrischer Energie von grosser Capacität und den Potentialen V_1 und V_2, wo $V_1 > V_2$ und E ein Quantum elektrischer Energie ist, so ist hier weder der Process vom Gesamteffect

$$\sum\nolimits_1 \uparrow^{E} \sum\nolimits_2 \uparrow^{-E}$$

noch der Process:

$$\sum\nolimits_2 \uparrow^{-E} \sum\nolimits_2 \uparrow^{E}$$

möglich, und zwar folgt dies wieder aus der Unerschaffbarkeit und Unzerstörbarkeit der Elektricität. Es muss nach diesem Princip in beiden Processen nämlich

$$2\frac{E}{V_1} - 2\frac{E}{V_2} = 0$$

sein, was nur erfüllt ist, falls $V_1 = V_2$ ist. In Worten: Ein Process, bei dem nur elektrische Energie von einem Behälter auf einen anderen übertragen wird, ist nur möglich, wenn die Potentiale beider Quellen gleich sind. Bei der Wärme dagegen ist der dem ersten Process entsprechende unmöglich, während das Analogon zum zweiten Process der natürliche Vorgang ist.

Zweiter Teil.

Am Anfang des ersten Teiles wären in Bezug auf den Kreisprocess einige beschränkende Annahmen gemacht, um den Fall möglichst einfach zu gestalten. Von diesen Bedingungen wollen wir jetzt nur noch die erste beibehalten. Die beiden anderen dagegen wollen wir fallen lassen und untersuchen, ob dadurch die etwaige praktische Ausführbarkeit des Processes beeinflusst wird. Hierzu denken wir uns einen einfachen Apparat. In Fig. 2 sei *A* die Seifenblase an der engen Oeffnung eines Glasrohres, *B* ein Metallstab mit Kugel, wodurch die Verbindung der Blase mit den Elektricitätsbehältern vermittelt wird, *C* ein dichtschliessender Stempel, den man mit Gewichtstücken belastet. Ausserhalb des Apparates sei Atmosphärendruck.

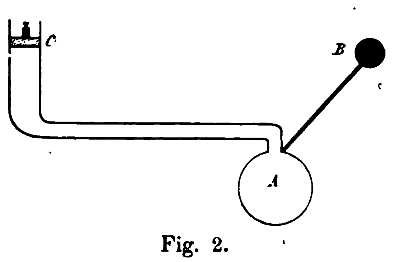


Fig. 2.

Die Menge der im Rohr und in der Blase eingeschlossenen Luft bleibt bei dem Process constant. Die Veränderungen, die mit derselben vorgenommen werden, seien isotherm. Auf die Luft im Apparat wirkt nun ein Druck, der sich zusammensetzt aus

1. dem Spannungsdruck a der Blase,
2. dem Atmosphärendruck b,
3. dem elektrischen Oberflächendruck c.

Führt man den betreffenden Kreisprocess aus, so ist das Resultat das folgende:

1. die eingeschlossene Luft hat gleichen Druck und gleiches Volumen wie am Anfang;

2. die während des ganzen Processes von aussen zugeführte Wärme ist Null, da die Luft sich stets auf derselben Isotherme bewegt;

3. die vom Spannungsdruck geleistete Gesamtarbeit ist Null, weil die Beziehung zwischen Spannungsdruck und Volumen während des Processes dieselbe bleibt und derselbe Weg zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird;

4. dasselbe gilt von der von dem Atmosphärendruck geleisteten Arbeit;

5. nur die von den elektrischen Druckkräften geleistete Arbeit ist von Null verschieden, da hier der Hinweg ein anderer als der Rückweg ist. Die geleistete Arbeit wird geometrisch durch die vom Wege umschlossene Fläche repräsentirt. Sie ist den elektrischen Energiequellen entnommen und wird am Stempel *C* gewonnen, wie man leicht findet, falls man berücksichtigt, dass die von der eingeschlossenen Luft geleistete Arbeit Null ist. Diese letztere setzt sich aus der am Stempel und an der Oberfläche der Blase geleisteten Arbeit zusammen. Es ist daher:

$$\int p\,(d\,v_1 + d\,v_2) = 0\,,$$

wo wir unter $d\,v_1$ die durch das Heben oder das Sinken des Stempels, unter $d\,v_2$ die durch die Ausdehnung der Blase entstandene Volumenänderung verstehen. Ferner ist:

$$p = a + b - c\,,$$

folglich:

$$\int p\,.\,d\,v_1 + \int (a + b)\,d\,v_2 - \int c\,d\,v_2 = 0.$$

Nun ist bewiesen, dass

$$\int (a + b)\,d\,v_2 = 0,$$

mithin ist:

$$\int p\,.\,d\,v_1 = \int c\,d\,v_2\,.$$

Am Schluss des Processes wird also ein Gewicht sich auf höherem Niveau befinden wie am Anfang desselben. — Es sei noch darauf hingewiesen, dass bei grösserer Belastung des Stempels die Blase sich nicht etwa ausdehnt, sondern zusammenzieht.

Einen Begriff von den Grössenverhältnissen bei einem derartigen Process sollen einige Zahlenbeispiele geben. Zu Grunde gelegt ist bei allen Angaben das C.G.S.-System. Wir wollen den Arbeitswert von zwei Kreisprocessen ermitteln und

betrachten als gegebene Grössen V_1, V_2 r_a und r_b. Die zu gewinnende Arbeit ist nach (15) und (16) Teil I:

$$A = (8\pi)^{-1/2}(V_1^3 - V_2 V_1^2)(p_b^{-1/2} - p_a^{-1/2}).$$

Es ist aber allgemein

$$p = \frac{1}{8\pi}\frac{V^2}{r^2},$$

also

$$A = \frac{V_1}{8\pi}(V_1 - V_2)(r_b - r_a).$$

Diese nebst den beiden anderen leicht ableitbaren Formeln

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{r_d}{r_a} = \frac{r_c}{r_b}$$

gestatten, die gewünschten Grössen bequem zu berechnen.

Die folgende Tabelle giebt die Resultate.

	V_1	V_2	r_a p_a	r_b p_b	A
I. Process	80	40	2 63,7	3 28	172
II. Process	30	10	1 120	3 13,3	47,8

Die Ausdehnung, die eine Seifenblase bei der Verbindung mit einem Elektricitätsbehälter vom Potential V erfährt, ist äusserst gering. Bezeichnet man den Radius der Blase vor der Ladung mit r, den äusseren Druck mit a, den inneren mit p_1, die Spannung mit T, so ist vor der Ladung

$$p_1 = a + \frac{4T}{r}.$$

Nach der Ladung ist, wenn p_2 der innere Druck, x der Radius ist,

$$p_2 + \frac{1}{8\pi}\frac{V^2}{x^2} = a + \frac{4T}{x},$$

ferner ist

$$p_1 \frac{4}{3}\pi r^2 = p_2 \frac{4}{3}\pi x^3,$$

sodass schliesslich folgt

$$x^3 + \frac{4T}{a}x^2 - \frac{V^2}{8\pi a}x - \frac{r^3}{a}\left(a + \frac{4T}{r}\right) = 0.$$

Die Untersuchung dieser Gleichung ergiebt, dass x nur dann von r sehr abweicht, wenn a und T klein, V gross ist.

Bei

$$V = 30\,ESE, \quad T = 0{,}045\,.\,981\,\frac{\text{Dyn}}{\text{cm}},$$

$$r = 3\,\text{cm}, \quad a = 760\,\text{mm Quecksilberdruck}$$

ist die Vergrösserung von r

$$\delta = 0{,}0001 \text{ cm},$$

bei $a = 0$

$$\delta_0 = 0{,}026 \text{ cm}.$$

Eine experimentelle Durchführung des Kreisprocesses war mir leider nicht möglich. Ich beschränkte mich deshalb bei meinen Versuchen schliesslich darauf, die Druckänderungen nachzuweisen, die durch die elektrische Ladung einer Seifenblase im Inneren derselben entstehen. Dazu bediente ich mich einer Vorrichtung, die, wie ich später erfuhr, dem v. Hefner-Alteneck'schen Variometer ähnlich ist.[1]) Ich will zunächst die Theorie der Methode entwickeln.

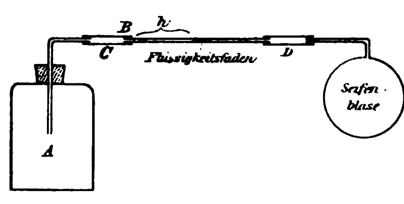


Fig. 3.

Es sei A eine Flasche mit eingesetztem Glasrohr (vgl. Fig. 3), mit dem eine Capillare verbunden ist, an welche wiederum ein Glasrohr anschliesst, das die Seifenblase trägt. Beide Räume, der des Ballons A und der Seifenblase sind durch einen Flüssigkeitsfaden gegeneinander abgesperrt. Wird die Blase geladen, so tritt innerhalb derselben eine Druckänderung ein, und infolge dessen eine Verschiebung des Fadens, bis der Druck in beiden Räumen wieder derselbe ist.

Um die Empfindlichkeit des Apparates zu prüfen, nehmen wir an, dass vor der Ladung der Druck p, nach der Ladung der Druck $p + a$ herrscht. Die dadurch hervorgerufene Verrückung x des Fadens ist zu berechnen. Ist v das Volumen von A und des Rohres bis B, h die Entfernung des Fadens von B, r der Radius der Capillare, so ist am Anfange des Versuches

$$p\,(v + \pi\,r^2\,h) = c,$$

wo c eine Constante ist, am Ende

$$(p + a)(v + \pi\,r^2\,h - \pi\,r^2\,x) = c,$$

1) Verhandl. d. Phys. Gesellsch. zu Berlin p. 88. 1895; p. 33. 1898.

falls wir so lange warten, bis sich etwaige Temperaturänderungen ausgeglichen haben und wir also berechtigt sind, den Vorgang als isotherm zu betrachten.

Daraus folgt

$$p(v + \pi r^2 h) = (p + a)(v + \pi r^2 h - \pi r^2 x),$$

$$x = \frac{a(v + \pi r^2 h)}{\pi r^2 (p + a)},$$

x wird also um so grösser, je grösser v und je kleiner r ist.

Nehmen wir z. B.

$$v + \pi r^2 h = 2000 \text{cm}^3; \quad p = 10^6 \frac{\text{Dyn}}{\text{cm}^2},$$

also etwa 1 Atm., $r = 0{,}05$ cm, so wird die Verrückung bei $a = 1$ Dyne/cm²:

$$x' = 0{,}25 \text{ cm}.$$

Der Apparat, der im wesentlichen in Fig. 3 skizzirt ist, war derartig eingerichtet, dass ein Dreiweghahn die Verbindung einerseits zwischen Seifenblase, Capillare und Ballon, andererseits zwischen Seifenblase und dem Schlauch zum Anblasen ermöglichte.

Die Blase hing an einer Metallhalbkugel, in deren Kuppe ein feines Metallrohr endigte. Diese Kugel wurde isolirt von einer grösseren Metallhalbkugel umschlossen, sodass die Schnittflächen beider Kugeln in einer Ebene lagen. Die äussere Schutzkugel konnte durch Unterschieben einer zweiten Halbkugel zur Vollkugel ergänzt werden. Diese Anordnung ist zum Teil einer Arbeit von Waitz[1]) entnommen.

Wegen der hohen Empfindlichkeit des Apparates gegen Wärmewirkungen und Erschütterungen wurden die Messungen im Keller und zwar in späten Abendstunden ausgeführt. Der Ballon A stand in einem Wasserbade. Als Sperrfaden diente Alkohol. Die Wände der Capillare waren natürlich von derselben Flüssigkeit benetzt, damit die Länge des Fadens während eines Versuches merklich constant blieb. Um den Apparat zu prüfen, wurden einige Folgerungen aus der Theorie desselben zu bestätigen versucht.

Aus der Formel für die Verschiebung des Fadens ergiebt sich für gleiches a und p und verschiedenes r die Beziehung

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2},$$

1) K. Waitz, Wied. Ann. 37. p. 330. 1889.

wo x_1 die Verschiebung des Fadens in der Capillare mit dem Radius r_1, x_2 diejenige in der Capillare mit dem Radius r_2 ist. Vorausgesetzt ist dabei, dass a gegen p, $\pi r^2 h$ gegen v vernachlässigt werden darf, was in der That gestattet ist. Der Radius der Seifenblase war $R_1 = 2{,}02$ cm. Die folgende Tabelle giebt das Resultat:

x_1	0,50	0,55	0,55	0,58
x_2	1,10	1,00	1,20	1,10

Der Mittelwert von x_1 ist demnach $x_1 = 0{,}57$, von x_2 $x_2 = 1{,}10$,

$$\frac{x_2}{x_1} = 1{,}93.$$

r_1^2 / r_2^2 wurde durch Calibriren der Capillaren mit Quecksilber aus zwei Messungen mit 2,03 und 2,06, im Mittel also zu 2,045 gefunden. Die Differenz ist:

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} - \frac{x_2}{x_1} = 0{,}115.$$

Also weicht x_2 / x_1 gegen r_1^2 / r_2^2 um $5^3/_4$ Proc. ab.

Ein zweiter Versuch bezweckte die Prüfung des Gesetzes, dass der von einer Seifenblase nach Innen ausgeübte Druck $4\,T/R$ ist.

Setzt man dieses Gesetz als richtig voraus, so folgt:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{\beta}{\alpha},$$

wenn R_1 und R_2 die Radien der Seifenblasen, β und α die dazugehörigen Verschiebungen des Fadens sind und $\pi r_2^2 \beta$ und $\pi r_2^2 \alpha$ gegen v vernachlässigt werden darf. Als Capillare wurde die mit dem Radius r_2 benutzt. Es war also

$$\beta = x_2 = 1{,}1\,.$$

Für α ergab sich:

$$0{,}60,\quad 0{,}55,\quad 0{,}55,\quad 0{,}65;$$

im Mittel $\alpha = 0{,}575$, folglich:

$$\frac{\beta}{\alpha} = 1{,}913\,.$$

Ferner war

$$R_2 = 4{,}02, \qquad R_1 = 2{,}02,$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 1{,}99, \qquad \frac{R_2}{R_1} - \frac{\beta}{\alpha} = 0{,}077.$$

Die Abweichung von β / α gegen R_2 / R_1 beträgt demnach $3^3/_4$ Proc.

Die Versuche mit geladenen Seifenblasen blieben leider nur qulitativ. Es konnte constatirt werden, dass der Faden bei der Ladung der Blase sich in der nach der Theorie bestimmten Richtung verschiebt, bei der Entladung wieder zurückgeht. Auf eine Messung von elektrischen Potentialen hoffe ich später noch einmal zurückzukommen.

Gegen die angestellten Messungen lässt sich ein Einwand erheben. Es ist nämlich stillschweigend angenommen, dass der Radius der Seifenblase constant bleibt, wenn man ihre Verbindung mit dem Ballon A herstellt. Dies ist indessen nicht der Fall. Die Blase wird ihre Gestalt vielmehr verändern, sie wird ein Calotte über der Metallhalbkugel werden mit grösserem Radius als diese. Wollte man den so entstehenden Fehler berechnen, so würde man auf rechnerische Schwierigkeiten stossen, die man durch eine Ueberlegung umgehen kann. Die durch die Verschiebung des Fadens und die Gestaltänderung der Blase entstehende Volumenänderung in dem Teile D des Apparates muss nämlich positiv sein, weil nach dem Druckausgleich zwischen C und D der Druck in D gesunken ist. Da aber die Volumenänderung der Blase negativ ist, so kann sie, absolut genommen, nicht grösser sein als die Volumenänderung durch Verschiebung des Fadens. Diese letztere aber giebt der Versuch. In einer unserer Messungen mit der Capillare vom Radius r_1 und der Metallkugel vom Radius R_1 beträgt sie 0,01762. Durch Probiren ergiebt sich, dass der Radius der Calotte weniger als 0,0001 grösser ist, als der Radius der Blase vor dem Druckausgleich, sodass es zulässig sein dürfte,

$$\frac{4\,T}{1{,}01} = \frac{4\,T}{1{,}0101}$$

zu setzen.

Die in dieser Arbeit gewonnenen Resultate sind folgende:

1. Die beim Kreisprocess gewonnene Arbeit war

$$\frac{V_1}{8\,\pi}(V_1 - V_2)(r_b - r_a).$$

2. Die zwischen den Energiemengen, welche den Quellen entzogen waren, bestehende Beziehung ist:

$$\frac{E_1}{V_1} - \frac{E_2}{V_2} = 0.$$

3. Es ist kein Process möglich, der nur in einer Ueberführung elektrischer Energie von einem Potential auf ein anderes besteht.

4. Die durch die Ladung einer Seifenblase entstehenden Volumenänderungen sind sehr klein und hängen vom Anfangsdruck, Flächenspannung und Ladungspotential ab.

5. Das Verhältnis der Querschnitte von zwei Capillaren wurde bis auf $5^3/_4$ Proc., das Gesetz

$$p = \frac{4\,T}{r}$$

bis auf $3^3/_4$ Proc. Abweichung bestimmt.

6. Versuche mit geladenen Seifenblasen blieben nur qualitativ.

7. Die durch Verschiebung des Fadens entstehende Gestaltänderung der Blase ist im allgemeinen zu vernachlässigen.

Wie ich nach Beendigung dieser Arbeit erfahren habe, sind bereits von anderer Seite Betrachtungen angestellt, die denen im ersten Teile ähnlich sind. Ich weise auf den Abschnitt „Conformität und Unterschiede der Energien“ in Mach's „Principien der Wärmelehre“ hin.

Zum Schluss sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Wachsmuth, für das rege Interesse, das er dieser Arbeit entgegenbrachte, meinen herzlichsten Dank auszusprechen.

Rostock, Physikal. Institut, 1899.

(Eingegangen 9. October 1899.)

2. *Die diffuse Reflexion des Lichtes an matten Oberflächen; von Henry Wright.*[1])

Einleitung.

Seit Seeliger[2]) in mehreren Publicationen das Lambert'-sche[3]) Gesetz $[q = \Gamma_1 . \mathrm{cds} . \cos i . \cos \varepsilon]$ einer eingehenden Kritik unterzogen hat, gewöhnte man sich daran, dasselbe als eine nur *ausnahmsweise* gültige Näherungsformel zu betrachten. Der theoretische Beweis gelingt nicht und die experimentellen Untersuchungen von Bouguer[4]), Kononowitsch[5]), Seeliger, Messerschmitt[6]) und Chwolson[7]) sprechen ebenfalls dagegen. Nur Wiener[8]) und in einem Falle auch Seeliger erhält eine befriedigende Uebereinstimmung. Das Lommel-Seeliger'sche[9]) Beleuchtungsgesetz

$$\left[\text{vereinfacht: } q = \Gamma_2 \cdot \mathrm{cds} \cdot \frac{\cos i \,.\, \cos \varepsilon}{\cos i + \cos \varepsilon}\right]$$

1) Auszug aus des Verfassers Inaug.-Diss.

2) H. Seeliger, Vierteljahrsschr. der Astr. Gesellsch. 20. Heft 4. p. 267. 1885; l. c. 21. Heft 3. p. 216. 1886; Sitzungsber. der math.-phys. Classe der königl. bayr. Akad. d. Wissensch. Heft 2. p. 201. 1888.

3) J. H. Lambert, Photometria sive de mensura et gradibus luminis colorum et umbrae. Augsburg 1760.

4) M. Bouguer, Essai d'optique sur la gradation de la lumière. Paris 1729; Histoire de l'Académie Royale des sciences. Paris 1757 (1762); Ouvrage posthume de M. Bouguer, et publié par M. l'Abbé de Lacaille. Paris 1760.

5) A. Kononowitsch, Schriften der math. Abth. der Neurussischen naturforsch. Gesellsch. T. II. Fortschr. d. Physik XXXV. p. 430. 1879; Schriften der neuruss. (Kiew) Univ. XXII. 107; Fortschritte der Physik XXXVII. 2. p. 481. 1881.

6) J. B. Messerschmitt, Wied. Ann. 34. p. 867. 1888.

7) O. Chwolson, Mélanges phys. et chim. tirés du Bull. de St. Pétersbourg. XII. (Beibl. 11. p. 149 u. Fortschr. der Physik XLII. p. 85. 1886).

8) Chr. Wiener, Wied. Ann. 47. p. 638. 1892.

9) E. v. Lommel, Wied. Ann. 10. p. 449. 631. 1880; Sitzungsber. der math.-phys. Classe d. königl. bayr. Akad. d. Wissensch. zu München p. 95. 1887 und Wied. Ann. 36. p. 473. 1889.

zeigt mindestens ebenso grosse Abweichungen wie das Lambert'sche. Bemerkenswert ist das Resultat bei dem Analogon der strahlenden Wärme. Die objectiven exacten Messungen von Provostaye und Desains[1]), Maquenne[2]), Godard[3]) und Hutchins[4]) bestätigen ausnahmslos für kleine Incidenzwinkel das Cosinusgesetz; nur Ångström[5]) erhält empirisch infolge eines von ihm selbst zugegebenen principiellen Versuchsfehlers das Lommel'sche Gesetz. Da Seeliger die praktische Anwendung auf die Photometrie der Gestirne im Auge hatte, so wählte er zur Untersuchung *nicht völlig matte* Flächen, die ja in der Natur wohl nie vorkommen. Auf Fehlerquellen der Messerschmitt'schen Versuche komme ich noch zu sprechen; während Kononowitsch eine so ungeeignete Substanz untersuchte, dass das Ergebnis nicht in Betracht gezogen werden kann. Man muss deshalb in der Beurteilung des Cosinusgesetzes (für möglichst ideale Fälle) sehr vorsichtig sein, wenn sich dieselbe auf obige experimentelle Arbeiten stützt. So ergiebt hauptsächlich die Einführung *völlig matter* Platten, wie die Theorie es fordert, ganz überraschende Resultate.

I. Experimenteller Teil.[6])

Die *Herstellung ebener Platten* aus den Pulvern ist nötig, um eine verticale Lage derselben zu ermöglichen; da lose gesiebte Pulver horizontale Oberflächen erfordern, was die Versuchsanordnung zu umständlich macht. Die opt. Eigenschaften der Substanz werden, wie *alle* bisherigen Erfahrungen gezeigt haben, durch Bindemittel, wie z. B. Gummi wesentlich

1) F. de la Provostaye et P. Desains, Compt. rend. **24.** p. 60. 1847; Pogg. Ann. **74.** p. 147. 1849; Compt. rend. **33.** p. 444. 1851; Ann. chim. et phys. (3) **34.** p. 192. 1852.

2) Maquenne, Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris 1880.

3) L. Godard, Ann. chim. et phys. (6) **10.** p. 354. 1887; Journal de Physique S. II. **7.** p. 435. 1888.

4) C. C. Hutchins, American Journal of Science November 1898.

5) Knut Ångström, Wied. Ann. **26.** p. 253. 1885; Bihang till k. Svensk. vet. Ak. Handl **13.** Afd. I. Nr. 4. p. 12. 1887 und Beibl. **12.** p. 197. 1888.

6) Infolge Raummangels verweise ich auf meine Dissertation wegen näherer Details.

geändert; desgleichen durch Giessen (z. B. Gyps), indem sich stets mehr oder weniger normale Reflexion einstellt. Völlig einwandsfrei dagegen ist die Herstellung durch Pressen[1]) der Pulver in Stahlstempeln. Durch geeignete Unterlagen (feiner dicker Zeichencarton) und passender Wahl des Druckes (je nach der Substanz und Dicke zwischen 4 und 20 Tonnen schwankend) wird die Festigkeit eine genügende bei sehr vorsichtiger Behandlung und keine beobachtbare Aenderung der in Frage kommenden opt. Pulvereigenschaften erzeugt. Vor allem tritt, wie aus den späteren Zahlenangaben deutlich hervorgeht, kein Spiegeln auf, das bei den bisherigen Untersuchungen wohl die Hauptfehlerquelle war.

Die Polarisation des diffus reflectirten Lichtes wurde zuerst untersucht, um über die Zulässigkeit eines Polarisationsphotometers zu entscheiden. Während die sogenannten trüben Medien stark polarisiren, ist dies bei Pulvern, die ein Grenzfall derselben sind, nicht der Fall, wie Provostaye und Desains[2]) schon gefunden. Die Grösse der Teilchen scheint dies zu bedingen; colloidales Silber, Gold etc. hat eine lineare Teilchengrösse von *höchstens* dem Rang der kleinsten Lichtwellen, während die der Pulver nach meiner Messung durchschnittlich 0,002 mm beträgt. Die Untersuchung der Platten mit Hülfe einer dichroskopischen Lupe ergab, dass *nat. auffallendes Licht auch als solches diffus reflectirt wird* und dass *pol. auffallendes sogar depolarisirt* wird. Nur bei den äussersten Grenzwinkeln ($i = 60$, $\varepsilon = 80$) zeigt sich geringe geradlinige Pol. Es ist dies ein Beweis für die Güte gepresster Platten und gestattet die Verwendung eines Polarisationsphotometers im Gegensatz zu Messerschmitt, der kein solches verwenden hätte dürfen, da seine Platten das Licht polarisirten.

Die *Versuchsanordnung* ist so zu treffen, dass das Licht unter allen möglichen Incidenzwinkeln (i) auf die zu untersuchende Platte fallen kann und unter allen Emanationswinkeln

1) Verwendet wurde eine hydraulische Presse (von Amsler Laffon und Sohn) d. mech. techn. Versuchslaboratoriums d. techn. Hochschule, die mir durch das Entgegenkommen von Hrn. Prof. Dr. A. Föppl zur Verfügung stand.

2) F. de la Provostaye et P. Desains, Ann. chim. et phys. (3) **34**. p. 196 u. 216. 1852.

(*e*) photometrisch untersucht werden kann. Zu dem Ende ist die Platte (*a*) mit ihrer ebenen Fläche vertical auf einem Tische (*b*) befestigt, der drehbar und mit einem Teilkreise (*c*) versehen ist. Die Lichtquelle (*L*) ist gegenüber fest aufgestellt und wird der Incidenzwinkel durch Drehen der Platte geändert. Durch den zu (*c*) concentrischen Teilkreis (*d*) lässt sich der jeweilige Emanationswinkel ablesen.

Nur *eine* Lichtquelle wird verwendet; sodass man von den Intensitätsschwankungen völlig unabhängig ist.

Das *Vergleichslicht* wird aus der zur Beleuchtung dienenden Lichtquelle wie folgt entnommen. Der unter 45° gegen den Horizont geneigte Spiegel *(b)*, dessen Mitte in die Verlängerung der Drehaxe *(e)* fällt, sendet das ihn treffende parallele, horizontale Strahlenbündel vertikal nach abwärts, und zwar so, dass die Drehaxe mit dem mittleren Strahl zusammenfällt. Durch ein diffus reflectirendes Plättchen (*a'*) unter 45°, das aus derselben Substanz wie die zu untersuchende und auf dieselbe Art hergestellt ist, werden die Strahlen auf den oberen Spalt des Photometers gelenkt mit einer Intensität, die von der zu vergleichenden nicht sehr verschieden ist und die am Anfang der Messungen innerhalb gewisser Grenzen sich passend wählen lässt.

Als *Lichtquelle* diente eine Bogenlampe mit ca. 500 Kerzen, die durch sorgfältiges Einreguliren ein sehr ruhiges *paralleles* Licht lieferte.

Das *Photometer* war ein Glan'sches Spectralphotometer mit eingesetztem verschiebbarem convergirendem Plättchen, wie Crova[1]) es angiebt. (Nicht Gouy, wie es öfters heisst z. B. bei Messerschmitt). Man erzielt dadurch eine geradezu ideale Berührung der beiden Spectren an der untersuchten Stelle. Die Spaltbreite betrug nur 0,4 mm. Vorsichtshalber wurde das Wollaston'sche Prisma so gedreht, dass Licht, dessen Polarisationsebene vertical ist, durch die untere Spalthälfte eindringend, völlig ausgelöscht wird, denn das diffus reflectirte Licht zeigt sich, wenn überhaupt polarisirt, in einer in diesem Falle verticalen Ebene schwingend. Auf diese Weise kommt der eventuell polarisirte Anteil überhaupt nicht zur Beob-

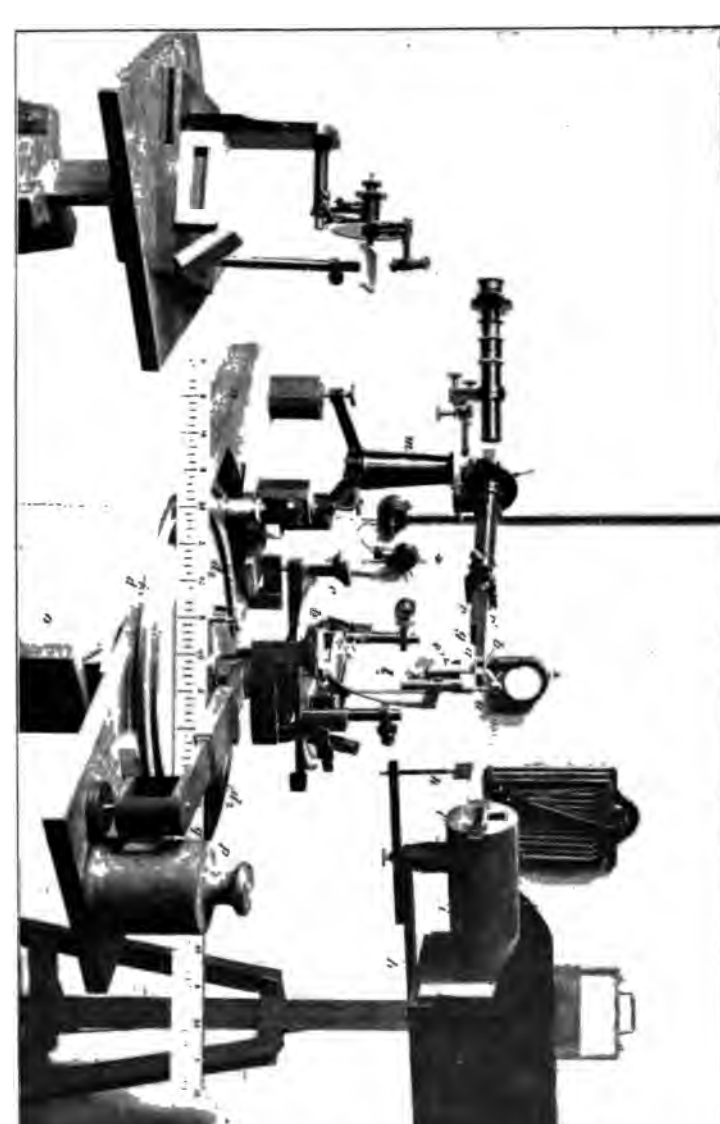
1) M. A. Crova, Ann. chim. et phys. (5) 19. p. 495. 1880.

achtung. Das sogenannte Schleudern des Nicols wurde nicht berücksichtigt; da der Einfluss zu gering, wie auch Messerschmitt gezeigt.

Die Auswahl der parallel emittirten Strahlen. Ebenso wie bei den einfallenden Strahlen fordern die Theorien, dass die austretenden als parallele Bündel beobachtet werden und nicht als Strahlenkegel, wie dies bisher meistens der Fall war. Da jedes Teilchen Licht nach allen Richtungen hin aussendet, so handelt es sich darum, eine einzige heraus zu suchen, die ins Photometer gelangt, während alle anderen Strahlen nicht zur Beobachtung kommen dürfen. Erreicht wird dies durch die Cylinderlinse (g) im Abstand der Brennweite sowohl vom Spalt als von der diffus reflectirenden Substanz. Alle der opt. Axe parallelen Strahlen werden in einer Geraden vereinigt, die mit dem Spalt zusammenfällt, während die anderen Strahlen in einer horizontalen Ebene betrachtet, rechts oder links davon die geschwärzten Spaltplatten treffen und der Beobachtung thatsächlich entzogen werden. Die Wahl der Brennweite der Cylinderlinse ist für die Resultate von grossem Einfluss.

Die Einstellung der Apparate. Die Bogenlampe (vgl. Fig. 1) stand auf einem mit Trieb zum Auf- und Abbewegen versehenen Stativ und konnte durch Zahnräder und Trieb sowohl vor- und rückwärts als seitlich bewegt werden. Die negative Kohle stand etwas mehr dem Condensator zu, um den Krater nach dieser Seite mehr auszubilden. Ersterer, aus der Zeiss'schen Werkstätte stammend, war sphärisch corrigirt und lieferte cylindrische Strahlenbündel von grossem Parallelismus. Im Kasten war ein kreisförmiger Ausschnitt (h), dessen Mittelpunkt die optische Axe des Condensators ist. Er diente zum Abblenden der Randstrahlen und zum Centriren. Das geschlossene Ende des Pappendeckelrohrs (i) enthielt drei Ausschnitte, die so gewählt waren, dass nur die zu beobachtenden Teile Licht empfangen konnten. Um die Begrenzung möglichst scharf zu machen, diente noch der horizontal nach vorwärts verschiebbare Schirm (k), der auch eine verticale Verstellung zuliess. Die diffus reflectirende Platte (a) wurde durch zwei federnde Klemmen mit ihrer unteren Hälfte an das Messingstück (l) leicht angedrückt. Dieses (l) steht auf einem Meyerstein'schen Spectralapparate, dessen Fernrohr und Collimatorrohr

Amperemeter. Vorschaltwiderstand. Voltmeter.



Apparat zur Untersuchung der Polarisation. Fig. 1. M = Vergleichsmassstab = 1 m.

Stahlstempel.

entfernt war, so, dass die Drehaxe des Teilkreises in seine ebene Rückfläche fällt.

Das Photometer (*m*) ruht auf einem Schlitten mit Führung, den das Brett (*n*) trägt und lässt sich um das Stativ (*o*) drehen. Die Winkelablesung hierfür giebt der grosse Teilkreis (*d*) mit 51 cm Durchmesser und die beiden Indices (d_1 und d_2). Ausbalancirt ist das Photometer durch das Gewicht (*p*) von 10 kg; der Gang war so ein sehr ruhiger. Die Drehaxe des Meyerstein'schen Apparates muss mit der des Photometers natürlich genau übereinstimmen. Die Collimatoraxe des Photometers muss die erwähnte gemeinsame Drehaxe schneiden. Ein besonders geformter Blechkörper (*r*) schliesst fremde Lichter aus und trägt die Cylinderlinse (*g*) und das Vergleichsplättchen *a'*. Durch den auf *l* sitzenden Spiegel, der durch den verschliessbaren Spalt (*i'*) beleuchtet werden konnte, war ein genaues Senkrechtstellen der Platte gegenüber dem einfallenden Lichtbündel möglich.

Die photometrischen Messungen.

Bei diesen kann man zwei verschiedene Methoden anwenden.

1. Methode (Fig. 2): Die *Grösse* (*b*) der zu untersuchenden Platten ist den Photometerdimensionen gegenüber so gewählt, dass sie *constant* ist. Mit anderen Worten: Die *Projection* (*p*) der Platten auf eine zum beobachteten Strahl ε senkrecht stehende Ebene *nimmt* mit wachsendem ε *ab*, wie der Cosinus eben dieses Winkels. Es ist dies die Anordnung, wie man sie in den Theorien annimmt.

2. Methode (Fig. 3): Die *Grösse* (*b'*) des untersuchten Teiles der Platte ist *nicht constant*, sondern wächst mit wachsendem Emanationswinkel um den Betrag $1/\cos\varepsilon$. Mit anderen Worten: Die *Projection* (*p'*) der Platte auf eine zum beobachteten Strahl ε senkrecht stehende Ebene ist für jeden Emanationswinkel ε *constant*.

Eine homogene Beleuchtung vorausgesetzt, erhält man die Werte, die die erste Methode liefert, aus der zweiten, indem man letztere Zahlen mit $\cos\varepsilon$ multiplicirt.

Der Grund, warum man absichtlich einen Fehler von bekannter Grösse macht, der nachher wieder eliminirt werden muss, wird aus dem Folgenden leicht einzusehen sein.

Nehmen wir der Einfachheit wegen an, das Lambert'sche Gesetz gelte für einen bestimmten Incidenzwinkel, z. B. $i=0$ mit ziemlicher Annäherung, dann müssen die nach Methode 1 beobachteten Intensitäten sein: bei $\varepsilon = 0^\circ$, $L=1000$, bei $\varepsilon = 80^\circ$, $L = 173$. Solche grosse Unterschiede lassen sich aber mit keinem Photometer genau messen; je kleiner dieselben, desto genauer wird das Resultat sein. Wenden wir dagegen die Methode 2 an, so gelangen zur Beobachtung die Intensitäten: für $\varepsilon = 0^\circ$, $L = 1000$; für $\varepsilon = 80^\circ$: L ebenfalls $= 1000$; die durch multipliciren mit $\cos 0^\circ$ bezw. $\cos 80^\circ$ die gesuchten Werte geben. Man kann also erwarten, dass für constante Incidenzwinkel für jedes ε die beobachtete Intensität so ziemlich die gleiche sein wird.

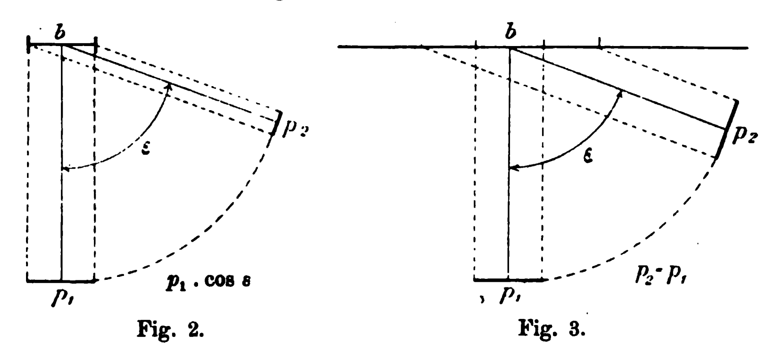


Fig. 2. Fig. 3.

Ein weiterer Vorzug der Methode 2 ist der, dass man den Fehler, den man macht, ganz genau kennt. Bei Methode 1 dagegen kann es sehr leicht vorkommen, dass man unfreiwillig bei kleineren Emanationswinkeln die Methode 2 anwendet, ohne es zu bemerken. Nach den Resultaten Messerschmitt's zu schliessen, scheint es sehr wahrscheinlich, dass dieser den angegebenen Fehler gemacht hatte. Die Werte zwischen $\varepsilon = 20^\circ$ und 60° sind ziemlich gleich, während dann ein rasches Abnehmen eintritt. Soll nach Methode 1 gemessen werden, so muss die diffus reflectirende Platte eine ganz bestimmte, aus den Photometerdimensionen sich ergebende Grösse haben, die unter keinen Umständen überschritten werden darf. Im Falle 2 dagegen kann die berechnete Minimalplattenlänge ad libitum überschritten werden; man macht die Platten deshalb einige Centimeter länger als

berechnet und ist dann ganz sicher, dass man keinen Fehler begeht.

Erwähnt kann hier werden, dass Lambert sein Emanationsgesetz auf Grund des durch Methode 2 erhaltenen Resultates aufgestellt hat; er beobachtete nämlich, dass eine von der Sonne beschienene weisse Mauer merklich gleich hell ist, gleichgültig von wo man sie betrachtet. Auch hat Seeliger in der bereits citirten ersten Arbeit Methode 2 angewandt.

Nach dem Vorhergehenden ist es klar, dass zu genauen Messungen die Methode 2 sicher die weitaus geeignetste ist und wurde dieselbe deshalb im Folgenden stets benutzt.

Beobachtet wurde für Gyps in allen vier Quadranten, sonst in zwei, nämlich dem I. und III., und daraus für die Nicoldrehung das Mittel genommen. Dies genügt nach den Untersuchungen Bakhuyzen's[1]) vollständig. Soweit die Aufstellung es gestattete, wurden die Emanationswinkel auf beiden Seiten der Normalen betrachtet; man ersieht daraus leicht, ob und wann Reflexe auftreten. Bei den farbigen Substanzen wurde *die* Stelle λ gewählt, die am hellsten war. Eine Fehlerquelle kann dadurch entstehen, dass die Beleuchtung seitens der Bogenlampe nicht völlig homogen ist. Um diese zu eliminiren, habe ich nach jeder einzelnen Messung wieder auf die Ausgangslage (z. B. $i = 0$, $\varepsilon = 30$; $i = 20^0$, $\varepsilon = 10$ u. s. w.) eingestellt, und Messungen, bei denen sich auf diese Weise eine Aenderung der Beleuchtung zeigte, verworfen. Ergab sich eine Aenderung der Beleuchtung der Ausgangslage von weniger als 5 Proc., so wurde die Intensität für einen anderen Winkel auf das geometrische Mittel der beiden sie einschliessenden. Nulllagenintensitäten bezogen.

Die Ausgleichung der Einzelresultate. Die gemessenen Grössen sind, wie bekannt, nicht die objectiven Helligkeiten selbst, sondern Function derselben sogenannte Empfindungsgrössen. Nach dem Fechner'schen psycho-physischen Gesetz ergiebt sich, dass es die Logarithmen der objectiven Helligkeiten sind, welche vom Auge empfunden werden; und diese letzteren müssen daher dem Ausgleichungsverfahren zu Grunde gelegt werden. Legt man das Gauss'sche Fehlergesetz zu

---

1) H. G. van de Sande Bakhuyzen, Pogg. Ann. 145. p. 259. 1872.

Grunde, so ergiebt sich für den wahrscheinlichsten Helligkeitswert x die Gleichung:[1])

$$\log x = \frac{\log h_1 + \log h_2 + \ldots\ldots + \log h_n}{n},$$

wobei $\log h_1$, $\log h_2$ den Empfindungsgrössen einer Anzahl Helligkeitsbestimmung entsprechen.

Die Zahlenreihen der folgenden Tabellen sind, auf dieses Gesetz gestützt, gerechnet worden aus je 4, 6 bez. 8 Einzelresultaten und sind die Logarithmen[2]) angegeben.

Um einen besseren Vergleich mit den Theorien zu ermöglichen, sind in der Tabelle II die Werte der Tabelle I mit den Cosinussen der jeweiligen Emanationswinkel dividirt; die Zahlen entsprechen den nicht reducirten thatsächlichen Empfindungsgrössen, die sich nach der Methode II ergeben, wie man aus p. 23 und 24 leicht ersieht. Bei Gültigkeit des Lambert'schen Gesetzes müssten die einzelnen Colonnen der Tabelle II die gleichen Zahlen enthalten.

Die Stelle der Wellenlängen wurde durch graphische Interpolation gefunden, indem eine Curve construirt wurde aus den gemessenen Stellen der wichtigsten Fraunhofer'schen Linien. Die Genauigkeit ist für diesen Zweck eine ausreichende.

Die Resultate.

1. Englisch Rot, Stelle $\lambda = 612\,\mu\mu$.

Tabelle I.						Tabelle II.					
e	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$	e	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	1888	-50^0	—	—	—	—	3808
-40	—	—	—	—	1838	-40	—	—	—	—	2996
-30	—	—	—	6710	—	-30	—	—	—	7335	—
-20	—	—	—	6931	2592	-20	—	—	—	7202	2863
-10	—	—	8861	—	—	-10	—	—	8928	—	—
0	—	—	8838	7294	2978	0	—	—	8838	7294	2978
$+10$	—	9734	—	—	—	$+10$	—	9734	—	—	—
$+20$	—	9508	8532	6955	2650	$+20$	—	9712	8803	7226	2921
$+30$	9357	—	—	—	—	$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	8788	8562	7630	6109	1762	$+40$	9321	9653	8788	7267	2920
$+60$	6894	6750	6123	4283	6156	$+60$	9280	9694	9134	7294	9167
$+80$	2397	2203	2044	9133	1435	$+80$	9376	9740	9648	6737	9039

1) G. Müller, Die Photometrie der Gestirne. p. 18. Leipzig 1897.

2) Die Kennziffer ist dabei weggelassen (ausser beim Spiegel), ein Irrtum kann dadurch nicht entstehen.

2. Kaliumchromat (gelb) Stelle $\lambda = 589 \mu\mu$.

Tabelle I.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	0824
-40	—	—	—	—	1510
-30	—	—	—	6672	—
-20	—	—	—	6967	2572
-10	—	—	8948	—	—
0	—	—	9002	7212	2723
$+10$	—	9600	—	—	—
$+20$	—	9423	8704	6995	2420
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	8744	8440	7817	6426	1892
$+60$	6947	6673	6004	5036	0830
$+80$	2424	2186	1398	1404	1017

Tabelle II.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	2744
-40	—	—	—	—	2668
-30	—	—	—	7297	—
-20	—	—	—	7238	2843
-10	—	—	9015	—	—
0	—	—	9002	7212	2723
$+10$	—	9600	—	—	—
$+20$	—	9627	8975	7266	2691
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	9277	9531	8975	7584	3050
$+60$	9333	9617	9015	8047	3841
$+80$	9403	9723	9002	9008	8621

3. Zink-Grün, Stelle $\lambda = 535 \mu\mu$.

Tabelle I.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	1460
-40	—	—	—	—	1138
-30	—	—	—	6384	—
-20	—	—	—	6687	1992
-10	—	—	8647	—	—
0	—	—	8712	6958	2263
$+10$	—	9111	—	—	—
$+20$	—	8920	8462	6694	1992
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	8850	8048	7554	5833	1573
$+60$	6997	6130	5949	4808	2362
$+80$	2382	1445	1785	1971	2360

Tabelle II.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	3380
-40	—	—	—	—	2296
-30	—	—	—	7009	—
-20	—	—	—	6958	2263
-10	—	—	8714	—	—
0	—	—	8712	6958	2263
$+10$	—	9111	—	—	—
$+20$	—	9124	8733	6965	2263
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	9383	9139	8712	6991	2731
$+60$	9383	9074	8960	7819	5373
$+80$	9361	8982	9389	9575	9964

4. Ultramarinblau, Stelle λ = gemischte Wellen.

Tabelle I.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	1030
-40	—	—	—	—	1780
-30	—	—	—	6277	—
-20	—	—	—	6675	2667
-10	—	—	8544	—	—
0	—	—	8726	6676	2750
$+10$	—	9576	—	—	—
$+20$	—	9121	8470	6737	3042
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	8947	8703	7729	5761	—
$+60$	6961	7169	6943	—	—
$+80$	1968	1851	0951	—	—

Tabelle II.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	2950
-40	—	—	—	—	2938
-30	—	—	—	6902	—
-20	—	—	—	6946	2938
-10	—	—	8611	—	—
0	—	—	8726	6676	2750
$+10$	—	9576	—	—	—
$+20$	—	9325	8741	7008	3318
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	9480	9794	8887	6919	—
$+60$	9347	0113	9954	—	—
$+80$	8947	9388	8555	—	—

5. Kohlensaures Magnesium, Stelle $\lambda = 656 \mu\mu$.

Tabelle I.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	9812
-40	—	—	—	—	0547
-30	—	—	—	6448	—
-20	—	—	—	6700	1434
-10	—	—	8394	—	—
0	—	—	8488	6843	1650
$+10$	—	9437	—	—	—
$+20$	—	9317	8243	6700	1516
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	8757	8458	7491	5838	0874
$+60$	6792	6465	5558	4655	1007
$+80$	2115	1872	0884	1173	0592

Tabelle II.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	1732
-40	—	—	—	—	1705
-30	—	—	—	7073	—
-20	—	—	—	6971	1705
-10	—	—	8461	—	—
0	—	—	8488	6843	1650
$+10$	—	9437	—	—	—
$+20$	—	9521	8514	6971	1787
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	9290	9549	8649	6996	2032
$+60$	9178	9409	8569	7666	4018
$+80$	9094	9409	8488	8777	8196

6. Kohlensaures Magnesium, Stelle $\lambda = 492 \mu\mu$.

Tabelle I.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	9399
-40	—	—	—	—	0308
-30	—	—	—	5117	—
-20	—	—	—	5548	1020
-10	—	—	8394	—	—
0	—	—	8382	5869	1262
$+10$	—	9294	—	—	—
$+20$	—	9145	8137	5598	1221
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	8870	8120	7277	4685	0476
$+60$	6932	6267	5319	3718	0702
$+80$	2311	1702	0752	0175	9853

Tabelle II.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	1319
-40	—	—	—	—	1466
-30	—	—	—	5742	—
-20	—	—	—	5819	1291
-10	—	—	8461	—	—
0	—	—	8382	5869	1262
$+10$	—	9294	—	—	—
$+20$	—	9349	8408	5869	1492
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	9403	9211	8435	5843	1634
$+60$	9318	9211	8330	6729	3713
$+80$	9290	9239	8356	7779	7457

7. Kohlensaures Magnesium, gemischte Wellen.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	9226
-40	—	—	—	—	9988
-30	—	—	—	5197	—
-20	—	—	—	5551	0875
-10	—	—	8065	—	—
0	—	—	8131	5821	1145
$+10$	—	9400	—	—	—
$+20$	—	9196	7861	5551	0875
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	8842	8309	6939	4964	9988
$+60$	6989	6456	5121	6344	1205
$+80$	2396	1863	1134	2618	0395

7a. Mittelwerte aus Nr. 5 u. 6 für kohlensaures Magnesium.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	9605
-40	—	—	—	—	0427
-30	—	—	—	5782	—
-20	—	—	—	6124	1227
-10	—	—	8394	—	—
0	—	—	8435	6356	1456
$+10$	—	9365	—	—	—
$+20$	—	9231	8190	6149	1368
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	8813	8289	7384	5261	0675
$+60$	6862	6366	5438	4186	0854
$+80$	2213	1787	0818	0674	0222

Anmerkung. Einige orientirende Versuche haben ergeben, dass die Grenzdicke, bei der gerade kein merkliches Licht mehr durchgelassen wird (nach Godard epaisseur limite), bei den gepressten Gypsplatten ca. 1,8 mm beträgt; bei kohlensaurer Magnesia 1,9 mm.

8. Gyps, Stelle $\lambda = 656 \mu\mu$.

Tabelle I.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	0346
-40	—	—	—	—	0975
-30	—	—	—	6674	—
-20	—	—	—	6901	1862
-10	—	—	8773	—	—
0	—	—	8789	7197	2133
$+10$	—	9621	—	—	—
$+20$	—	9366	8722	6951	1954
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	8763	8582	7708	6165	1158
$+60$	6989	6652	5880	4616	0814
$+80$	2396	2136	1262	1060	9733

Tabelle II.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	2266
-40	—	—	—	—	2133
-30	—	—	—	7299	—
-20	—	—	—	7172	2133
-10	—	—	8840	—	—
0	—	—	8789	7197	2133
$+10$	—	9621	—	—	—
$+20$	—	9570	8993	7222	2225
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	9296	9673	8866	7323	2316
$+60$	9375	9596	8891	7627	3825
$+80$	9375	9673	8866	8664	7337

9. Gyps, Stelle $\lambda = 492 \mu\mu$.

Tabelle I.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	9762
-40	—	—	—	—	0465
-30	—	—	—	6165	—
-20	—	—	—	6443	1441
-10	—	—	8531	—	—
0	—	—	8676	6714	1682
$+10$	—	9317	—	—	—
$+20$	—	9061	8354	6469	1499
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	8709	8253	7518	5632	0611
$+60$	6857	6610	5820	3956	0076
$+80$	2290	1833	1150	0481	9000

Tabelle II.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	1682
-40	—	—	—	—	1623
-30	—	—	—	6790	—
-20	—	—	—	6714	1712
-10	—	—	8598	—	—
0	—	—	8676	6714	1682
$+10$	—	9317	—	—	—
$+20$	—	9265	8625	6740	1770
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	9242	9344	8676	6790	1769
$+60$	9243	9554	8831	6967	3087
$+80$	9269	9370	8754	8085	6604

10. Gyps, Stelle λ = gemischte Wellen.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	9487
-40	—	—	—	—	0249
-30	—	—	—	5510	—
-20	—	—	—	5864	1136
-10	—	—	8065	—	—
0	—	—	8131	6134	1406
$+10$	—	9500	—	—	—
$+20$	—	9296	7861	5864	1136
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	8842	8409	6939	4977	0249
$+60$	6989	6556	5121	3427	0324
$+80$	2396	1963	0528	9138	8935

10a. Mittelwerte aus Nr. 8 u. 9 für Gyps.

ε	$i=0^0$	$i=20^0$	$i=40^0$	$i=60^0$	$i=80^0$
-50^0	—	—	—	—	0054
-40	—	—	—	—	0720
-30	—	—	—	6419	—
-20	—	—	—	6672	1651
-10	—	—	8652	—	—
0	—	—	8732	6955	1907
$+10$	—	9469	—	—	—
$+20$	—	9213	8538	6710	1726
$+30$	9375	—	—	—	—
$+40$	8736	8417	7613	5898	0884
$+60$	6923	6631	5850	4286	0445
$+80$	2343	1984	1206	0770	9366

11. Spiegel, Stelle $\lambda = 612 \mu\mu$.

ε	$i = 0^\circ$	$i = 20^\circ$	$i = 40^\circ$	$i = 60^\circ$	$i = 80^\circ$
+10°	—	1,8346	—	—	—
+20	—	—	0,3495	—	—
+30	9,9375	3,0189	2,0965	—	—
+40	—	1,3436	—	0,5352	—
+50	—	—	2,9541	2,2278	—
+60	—	9,9266	1,3642	—	—
+70	—	—	1,6049	2,7361	—

Wie man aus obigen Tabellen sieht, war für alle Reihen der Bezugspunkt der gleiche, nämlich an der Stelle $i = 0^\circ$, $\varepsilon = 30^\circ$. Dieser wurde gleich dem Logarithmus des entsprechenden Lambert'schen Wertes (9,9375) gesetzt; was für $i = 0$ und $\varepsilon = 0$ der Zahl 10,0000 entspricht. Blickt man in Richtung der Normalen auf die Platte, so sind die Incidenzwinkel alle im linken Quadranten; die Emanationswinkel erhalten im linken Quadranten das Vorzeichen Minus, im rechten Plus. Es ist daher $i = \varepsilon$ die Stelle der regelmässigen Reflexion, während $i = -\varepsilon$ völlig gleiche Lage von Incidenz- und Emanationswinkel bedeutet.

Bemerkungen zu den einzelnen Substanzen:

1. Das sogenannte *Englisch Rot*, auch Caput mortuum genannt, ist Ferryoxyd Fe_2O_3.

2. Das *Kaliumchromat* K_2CrO_4 war etwas zu stark gepresst, daher die stärkeren Reflexe.

3. Das *Zinkgrün* oder Rinmann'sche Grün wird durch Glühen von Zink- und Kobaltoxyden erhalten.

4. Das *Ultramarin* musste wegen der geringen Intensität des reflectirten Lichtes direct anvisirt werden. Die Farbe der beiden Spalthälften war völlig gleich. An den Stellen $i = 60$ und $\varepsilon = 60^\circ$, bezw. 80° und $i = 80^\circ$ und $\varepsilon = 40^\circ$, 60° und 80° konnte nicht gemessen werden, da hier die Farbe der zu untersuchenden Substanz weisslich wurde gegenüber dem blauen Vergleichslichte. Es rührt dies daher, dass kleine Verunreinigungen bei grösseren Winkeln sich merklich geltend machen. Das Ultramarin besitzt solche in Form kleiner gelber Teilchen, die sich durch Sieben nicht vom Pulver trennen lassen. Es scheint nicht unwahrscheinlich nach der Herstellungsmethode des Ultramarins, dass diese Beimengung Schwefel ist. Ausser-

dem kommt hier noch die p. 33 besprochene, von Fresnel beobachtete Erscheinung über die regelmässige Zurückwerfung von Rot hinzu.

5. *Kohlensaures Magnesium* $MgCO_3$ soll nach Jenko[1]) die einzig existirende Substanz sein, die völlig matt ist. Dass andere Substanzen mindestens ebenso matt sind, wenn man ihre Oberflächen auf geeignete Art herstellt, zeigen die angeführten Resultate zur Genüge. Die beiden Stellen $\lambda = 656\ \mu\mu$ im Rot und $\lambda = 492\ \mu\mu$ im Grünlich-Blau sind nicht willkürlich gewählt, sondern sind als Complementärfarben der Physiologischen Optik von Helmholtz p. 317 entnommen. Die gemischten Wellen (Tabelle 7) wurden wie bei Ultramarin durch Wegnahme des Prismas photometrirt. Die Genauigkeit ist dabei geringer (circa 6 $^0/_0$) als bei den anderen Messungen, weil hier die Intensität eine zu grosse war und nicht leicht abgeschwächt werden konnte.

Die Messungen für nicht einfarbiges Licht spielen hier überhaupt eine untergeordnete Rolle, nachdem es fraglich ist, ob sie völlig einwandsfrei sind. Angeführt wurden sie jedoch aus später ersichtlichen Gründen, ohne aber zum Vergleich mit einer Theorie benutzt zu werden.

8. *Gyps* wurde wie Magnesiumcarbonat gemessen, jedoch zwei verschiedene Platten. Die Uebereinstimmung der Resultate war eine derartige, dass sie innerhalb der Fehlergrenze liegt und deshalb nur die eine Versuchsreihe angeführt ist.

11. *Spiegel.* Es ist leicht zu beobachten, dass gute Spiegel auch an anderen Stellen als der regelmässigen Reflexion entsprechenden Licht zurückwerfen. Dieses diffus reflectirte habe ich nun untersucht, indem wie sonst gemessen wurde, nur unter Uebergehung der Stellen $i = \varepsilon$. An vielen Stellen war die Intensität so gering, dass eine Messung überhaupt unmöglich war, während in der Nähe der Stellen $i = \varepsilon$ die Helligkeit ausserordentlich rasch zunahm. Den grossen Helligkeitszuwachs in der Nähe der Stellen $i = \varepsilon$ durch nicht völliges Eben- und Planparallelsein des Spiegels und nicht völligen Parallelismus des auffallenden Lichtbündels zu erklären, scheint nicht ausreichend zu sein. So viel geht jedoch aus der

1) Jenko, Wied. Ann. 66. p. 1182. 1898.

Messung hervor, dass das Licht, das von Spiegeln an anderen Stellen als der regelmässigen Reflexion zurückgesandt wird, ein anderes Intensitätsgesetz befolgt, als exquisit zerstreut reflectirende Substanzen.

Die Reflexe der Platten. Um die Abweichungen der Intensitäten bei positiven und entsprechenden negativen Emanationswinkeln leicht überblicken zu können, sind im Folgenden die Differenzen aus den Beobachtungen gebildet worden.

	$i=60$, $\varepsilon=20$	$i=80$, $\varepsilon=20$	$i=80$, $\varepsilon=40$
Englisch Rot	+0,0024	+0058	−0076
Kaliumchromat	+ 0028	−0152	+0382
Zinkgrün	+ 0007	0000	+0435
Kohlensaure Mg. im Rot	0000	+0082	+0327
Kohlens. Mg. im Blaugrün	+ 0050	+0201	+0168
Gyps im Rot	+ 0050	+0092	+0183
Gyps im Blaugrün . . .	+ 0026	+0058	+0146

Selbst wenn man noch den Winkel $i = 80^0$ mit in Betracht zieht, ergiebt sich als Mittel aus obigen Zahlen die Abweichung der Intensität bei $+\varepsilon$ gegenüber der bei $-\varepsilon$ zu: $0121 = 2{,}8\,^0/_0$. Dies liegt aber gerade bei der Genauigkeitsgrenze der Messungen, sodass man wohl sagen darf: die beiden Intensitäten sind gleich, *d. h. das Licht wird durch die diffuse Reflexion nach beiden Seiten ε gleichstark zerstreut* bei der Grösse der hier in Frage kommenden Teilchen; ein Resultat, das sich mit der Lommel'schen Annahme deckt.

Einfluss der Farbe. Vergleicht man die Resultate der verschiedenen gefärbten Substanzen, als auch der verschiedenen Wellenlängen ein und derselben Substanz, so findet man, dass für constanten Emanationswinkel bei den verschiedenen Incidenzwinkeln fast ausnahmslos die Werte von Rot grösser sind, als die von Gelb, und diese wiederum grösser als die von Grün. Lässt man dagegen $i =$ const. und variirt ε, so ergiebt sich überall merklich das gleiche Gesetz. Die Farbe scheint demnach beim Incidenzwinkel von grösserem Einfluss zu sein, als bei den Emanationswinkeln. Auch Messerschmitt und Kononowitsch finden, dass die Gesammtsumme der beobachteten Helligkeit für Rot grösser ist, als für Grün und letztere wieder grösser als für Blau. Als Erklärung hierfür bringt

Ersterer die Beobachtung Fresnel's,[1]) dass der Grenzwinkel, für den zu der unregelmässigen Zurückwerfung deutliche, regelmässige hinzutritt, für die verschiedenen Wellenlängen verschieden ist, und zwar tritt die regelmässige Zurückwerfung für Rot früher ein, als für Gelb, Grün etc.

Ich bin der Ansicht, dass diese Thatsache allein keineswegs dazu ausreicht, die Erscheinung zu deuten, denn sowohl nach Fresnel, als auch nach Hankel[2]) ist der Incidenzwinkel dabei im Minimum 79°; während hier bei $i = 20^0$ das Ueberwiegen der Intensität des roten Lichtes über das gelbe schon eintritt.

Nachdem das Gesetz für den Emanationswinkel bei verschiedenen Wellenlängen das gleiche geblieben ist, glaube ich durch diese Experimente die Lommel'sche Annahme, dass der Diffusionscoefficient unabhängig von der Wellenlänge ist bei der Grösse der beobachteten Teilchen, als erwiesen betrachten zu dürfen. Für trübe Medien mit kleinen suspendirten Teilchen dagegen ist experimentell[3]) die Abhängigkeit des Diffusionscoefficienten von der Wellenlänge nachgewiesen. Dies kann jedoch nicht als Widerspruch gegen meine Behauptung benutzt werden, da hier die Verhältnisse ganz andere sind, speciell als die Brechungsexponenten von suspendirten Teilchen und umgebenden Medien nahezu gleich sind, während dies bei mir nicht der Fall ist.

Nimmt man aus den Werten für complementäre Farben das Mittel (Tabelle 7a und 10a) und vergleicht es mit den ohne Prisma gefundenen Intensitäten, so ergeben sich merkliche Abweichungen, die Beobachtungsfehler überschreiten. Im ersten Falle bildet man aus den abgelesenen Nicoldrehungen den Wert:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha_{\text{rot}} + \operatorname{tg}^2 \alpha_{\text{grün}}}{2};$$

im zweiten liest man jedoch einen Winkel α' ab, von dem man, soviel mir bekannt, nicht weiss ob er nicht etwa:

1) A. Fresnel, Oeuvres complètes. I. p. 225.

2) W. Hankel, Pogg. Ann. **100**. p. 302. 1857.

3) C. Christiansen, Wied. Ann. **23**. u. **24**. 1884 u. 1885.

$$\frac{\alpha_{\text{roth}} + \alpha_{\text{gelb}} + \alpha_{\text{grün}} + \cdots + \alpha_n}{n}$$

ist. Es kommen hier wohl physiologische Fragen in Betracht. Die beiden Tabellen können deshalb nicht im allgemeinen übereinstimmen, sondern nur in speciellen Fällen, so z. B. für den Fall, dass alle *α gleich*, d. h. nach dem Früheren für den Emanationswinkel, was in der That der Fall ist. Für ε = constant und variirenden Incidenzwinkel dagegen findet sich die Abweichung, da hier die α verschieden. Man kann deshalb aus den Messerschmitt'schen Messungen für den Azimutheinfluss, p. 884, nicht ohne Weiteres auf die absolute Grösse der Abweichungen schliessen.

II. Vergleich der Resultate mit den Theorien.

Bringt man, wie bisher üblich, die Abweichungen der Resultate von einem der beiden Gesetze, so kann aus diesen Werten nur eine Kritik des Gesamtgesetzes ausgeübt werden; während auf die Abweichungen der einzelnen Bestimmungsstücke nicht geschlossen werden kann. Messungen, wie die Wiener's zum Beispiel, haben aber gezeigt, dass für Gyps das Lambert'sche Emanationsgesetz mit grosser Annäherung gilt, während das Incidenzgesetz merkliche Abweichungen zeigt. Um diese Trennung der beiden Gesetze zu machen, sind die Tabellen II den Resultaten auf den Seiten 26 bis 30 beigefügt. Dieselben zeigen direct die Abweichungen vom Cosinus ε-Gesetz und sind vom Incidenzwinkel völlig unabhängig. Man sieht daraus, dass die Uebereinstimmung mit dem Lambert'schen Cosinusgesetz eine derartige ist, dass seine Gültigkeit wohl kaum einem Zweifel unterliegen kann. Eine Ausnahme bilden nur die Fälle $i = 80^0$, $\varepsilon = 60^0$ und 80^0 und $i = 60^0$ und $\varepsilon = 80^0$. Bei diesen kommen aber kleine Apparatfehler, besonders das nicht ideale Parallelsein des auffallenden Lichtbündels, so sehr in Betracht, dass sie zur Beurteilung eines Gesetzes nicht herbeigezogen werden können.

Um zu zeigen, wie die Abweichungen der Resultate vom vollständigen Lambert'schen Gesetz sind, gebe ich in den folgenden Tabellen die Differenzen aus den Lambert'schen Werten und den gemessenen und berechne daraus die mittlere

Abweichung Θ. Oben bezeichnete Grenzfälle sind dabei weggelassen.

1. Englisch Rot.

i	$\varepsilon = 0^0$	$\varepsilon = 20^0$	$\varepsilon = 40^0$	$\varepsilon = 60^0$	$\varepsilon = 80^0$
0°	—	—	−0054	−0095	+0001
20	—	+0049	−0010	+0031	+0077
40	−0004	−0040	−0020	+0291	+0805
60	+0305	+0236	+0277	+0304	+9747*
80	+0582	+0524	+0523	+6770*	+6642*

Θ = 0223.

2. Kaliumchromat.

i	$\varepsilon = 0^0$	$\varepsilon = 20^0$	$\varepsilon = 40^0$	$\varepsilon = 60^0$	$\varepsilon = 80^0$
0°	—	—	−0098	−0042	+0028
20	—	−0036	−0132	−0046	+0060
40	+0160	+0132	+0167	+0172	+0159
60	+0223	+0276	+0594	+1057	+2018*
80	+0327	+0294	+0653	+1444*	+6224*

Θ = 0245.

3. Zinkgrün.

i	$\varepsilon = 0^0$	$\varepsilon = 20^0$	$\varepsilon = 40^0$	$\varepsilon = 60^0$	$\varepsilon = 80^0$
0°	—	—	+0008	+0008	−0014
20	—	−0539	−0524	−0589	−0681
40	−0130	−0110	−0096	+0117	+0546
60	−0031	—0025	+0001	+0829	+2585*
80	−0133	−0134	+0334	+2976*	+7567*

Θ = 0255.

5. Kohlensaures Mg.

i	$\varepsilon = 0^0$	$\varepsilon = 20^0$	$\varepsilon = 40^0$	$\varepsilon = 60^0$	$\varepsilon = 80^0$
0°	—	—	−0085	−0197	−0281
20	—	−0142	−0114	−0254	−0254
40	−0354	−0329	−0159	−0274	−0355
60	−0146	−0019	+0006	+0676	+1787*
80	—0746	−0610	−0365	+1621*	+5799*

Θ = 0282.

Anmerkung. * Bei Berechnung von Θ weggelassen.

6. Kohlensaures Magnesium.

i	$e=0°$	$e=20°$	$e=40°$	$e=60°$	$e=80°$
0°	—	—	+0028	−0057	−0085
20	—	−0314	−0452	−0452	−0424
40	−0460	−0435	−0373	−0513	−0487
60	−1120	−1121	−1147	−0261	+0789*
80	−1134	−0905	−0763	+1316*	+5060*

Θ = 0554.

8. Gyps.

i	$e=0°$	$e=20°$	$e=40°$	$e=60°$	$e=80°$
0°	—	—	−0079	0000	0000
20	—	−0093	+0010	−0067	+0010
40	−0053	+0150	+0058	+0048	+0023
60	+0208	+0232	+0333	+0637	+1674*
80	−0263	−0172	−0081	+1428*	+4940*

Θ = 0132.

9. Gyps.

i	$e=0°$	$e=20°$	$e=40°$	$e=60°$	$e=80°$
0°	—	—	−0133	−0132	−0106
20	—	−0398	−0319	−0109	−0293
40	−0166	−0218	−0132	−0012	−0089
60	−0275	−0250	−0200	−0023	+1095*
80	−0714	−0627	−0628	+0690*	+4207*

Θ = 0254.

Es dürfte noch von Interesse sein, die Abweichungen vom Incidenzgesetz allein anzugeben. Es werden deshalb die Zahlen angegeben, die zu log cos i (Lambert's Gesetz) addirt werden müssen, um die beobachteten Helligkeitslogarithmen zu geben:

i	Englisch Rot	Kalium-chromat	Zinkgrün	im Mittel: Kohlens. Magnesium	im Mittel: Gyps
$i=0°$ $e=30°$	0000	0000	0000	0000	0000
$i=20$ $e=10$	+0071	−0063	−0552	−0298	−0194
$i=40$ $e=0$	−0004	+0160	−0130	−0407	−0110
$i=60$ $e=0$	+0305	+0223	−0031	−0633	−0034
$i=80$ $e=0$	+0582	+0327	−0133	−0940	−0489
Daraus	$\Theta'=0240$	$\Theta'=0193$	$\Theta'=0211$	$\Theta'=0569$	$\Theta'=0207$

Aus den Tabellen II ergeben sich als die Zahlen, die die Abweichung vom Cosinusgesetz bestimmen, folgende:

i	Englisch Rot	Kalium-chromat	Zinkgrün	Mittel aus Kohlens. Magnesium	Mittel aus Gyps
$i=0^0$	0050	0056	0010	0113	0075
$i=20$	0037	0059	0077	0046	0062
$i=40$	0298	0017	0236	0040	0081
$i=60$	0032*	0213*	0020*	0064*	0063*
$i=80$	0057	0179	0233	0280	0112
	$\Theta''=0095$	$\Theta''=0105$	$\Theta''=0115$	$\Theta''=0109$	$\Theta''=0079$

Anmerkung. * Hier ist auch $i=60^0$ $\varepsilon=60^0$ weggelassen.

Zur besseren Uebersicht dient die graphische Darstellung (vgl. Fig. 4), die Bouguer zuerst benutzt hat. Die Curven[1])

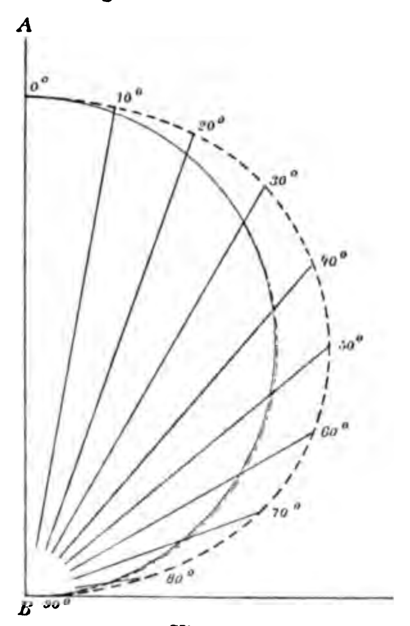


Fig. 4.

(Numératrice d'aspérité) werden dadurch gewonnen, dass man auf der Plattennormalen AB den Wert für $i=0$ $\varepsilon=0$ aufträgt

1) Die Curve ist für Zinkgrün gezeichnet, also die Substanz, die von den untersuchten am meisten von dem Cosinusgesetz abweicht, trotzdem aber die vorzügliche Uebereinstimmung beider Curven.

und auf den Radienvectoren bei den betreffenden Winkeln ε die entsprechenden Helligkeiten. —— ist die Curve für Lambert; dieselbe ist ein Kreis mit AB als Durchmesser; - - - - giebt das Lommel-Seeliger'sche Gesetz (eine Ellipse), und ·········· die gemessenen Werte, die mit Lambert also völlig zusammenfallen.

Da 0,0043 Einheiten der angeführten Logarithmen 1 % der Helligkeit sind, so ergeben sich als procentuelle Abweichungen folgende Zahlen:

	Englisch Rot	Kalium-chromat	Zinkgrün	im Mittel	
				Kohlens. Magnesium	Gyps
Θ in %	5,3 %	5,8 %	6,1 %	10,1 %	4,6 %
Θ' in „	5,7	4,6	5,0	14,0	4,9
Θ'' in „	2,2	2,5	2,7	2,5	1,8

Wenn man bedenkt, dass der wahrscheinliche Fehler der Messungen 2 % ist, so sieht man, dass das vollständige Lambert'sche Gesetz nicht als gültig sich ergiebt. Andererseits aber gilt das Gesetz vom Cosinus des Emanationswinkels ganz streng und allgemein; während die Abweichungen vom Gesetz des Incidenzwinkels[1]) so merklich und systematisch auftreten, dass an eine Bestätigung desselben nicht gedacht werden kann. Die Werte für die Incidenzwinkel bei constantem Emanationswinkel sind dabei durchschnittlich kleiner als die Lambert'schen, ein Ergebnis, das auch Seeliger und Wiener erhielten. Ein Beleuchtungsgesetz kann demgemäss nie symmetrisch in Bezug auf i und ε sein, wie Messerschmitt ebenfalls findet. Das Resultat, dass das Cosinusgesetz für sich allgemein gilt, scheint bei oberflächlicher Betrachtung in directem Widerspruch mit den bekanntesten bereits erwähnten Untersuchungen zu stehen. Bei genauer Durchsicht derselben ergiebt sich, dass jene Substanzen, bei welchen die Reflexe am geringsten, d. h. die In-

1) Schon Zöllner weist darauf hin (p. 37), dass das Gesetz vom cos i nicht so zweifellos richtig ist. J. F. Zöllner, Photometrische Untersuchungen. Leipzig 1865. Verlag von Engelmann.

tensität bei $+\varepsilon$ gleich der bei $-\varepsilon$ ist, thatsächlich das Cosinusgesetz mit grosser Annäherung befolgen. Es ist von vornherein nicht anzunehmen, dass Platten, die merklich spiegeln, ein Gesetz befolgen können, das auf derartige Verhältnisse gar keine Rücksicht nimmt. Vielmehr wird hier zum Gesetze für die diffuse Reflexion noch ein Summand kommen müssen, der die normale Reflexion beachtet. Nach diesem ist es einleuchtend, warum ich soviel Wert darauf gelegt habe, die Platten möglichst matt herzustellen; aus den angegebenen Werten sieht man, dass dies in der That auch gut gelungen ist. Bemerkenswert ist, dass es, wie Zöllner und Seeliger gezeigt, bisher noch nicht möglich war, das Cosinus-ε-Gesetz theoretisch abzuleiten; auch nicht, wenn die Bouguer'sche Vorstellung zu Grunde gelegt wird. Ich kann darin jedoch keinen Grund erblicken an der Thatsache des Bestehens dieses Gesetzes einen Zweifel deshalb zu rechtfertigen. Wie früher erwähnt sprechen die exacten Messungen für das Analogon der strahlenden Wärme auch sehr zu Gunsten des Cosinusgesetzes, während sie ebenfalls das Incidenzgesetz nicht bestätigen.

Das *Lommel'sche Gesetz* ist hierdurch als nicht geltend erwiesen. Eine Reihe von Möglichkeiten, die die Abweichungen erklären können, sind vorhanden und seien im Folgenden kurz erwähnt:

1. Das Gesetz berücksichtigt nur aus dem Inneren der Platte kommende Strahlen, während die Oberflächenreflexion ignorirt wird. Diese ist aber jedenfalls nicht zu vernachlässigen, sondern tritt additiv zu dem Werte für die aus dem Innern kommende Intensität hinzu.

2. Auf Brechung beim Eintritt und Austritt der Strahlen ist keine Rücksicht genommen, vielmehr ist der innere Incidenz- und Emanationswinkel gleich dem äusseren gesetzt. Es unterliegt wohl kaum einem Zweifel, dass thatsächlich Brechung auftritt.

3. Bei der gegebenen Grösse der Teilchen ist man zu der Annahme gezwungen, dass Beugungserscheinungen auftreten. Obwohl bei den Experimenten keine Beugungsbilder sich ermitteln liessen, so ist dadurch ein Einfluss auf die Intensität nicht ausgeschlossen. Ehe die Beugung also vernach-

lässigt wird, muss die Berechtigung hierzu durch den Versuch oder die Theorie erbracht werden.

4. Es wird die Annahme gemacht, dass nach allen Seiten hin die gleiche Lichtmenge $l.dw.d\varrho$ zerstreut wird. Für die Vorderseite der Teilchen, das ist die dem Auge des Beobachters zugekehrte, ist dies allerdings durch meine Resultate Seite 32 für Azimute 0 und für 180° bestätigt. Für die Rückseite dagegen darf man sicher annehmen, dass die Grösse $l'.dw.d\varrho$ kleiner ist als für die Vorderseite.

Messerschmitt will auch auf Polarisationen Rücksicht genommen haben. Als Grund hierfür führt er neben seiner eigenen Violle's[1]) Arbeit über Polarisation durch Emission an. Da dabei jedoch ganz andere Verhältnisse (flüssiges Silber) untersucht wurden, glaube ich nicht, dass dieselbe hier in Frage kommen kann. Vielmehr scheint durch p. 19 bewiesen zu sein, dass thatsächlich keine Polarisation bei Pulvern auftritt.

III. Zusammenstellung der Resultate.

Das Ergebnis der Versuche für gepresste Pulver von solcher Plattendicke, dass bis zur Rückseite kein merkliches Licht durchdringt, ist folgendes:

1. Natürliches Licht wird bei der diffusen Reflexion nicht polarisirt, vielmehr polarisirt auftreffendes völlig depolarisirt.

2. Die Intensität des unter dem Winkel $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ diffus reflectirten Lichts ist gleich; d. h. sie ist in diesem Falle unabhängig vom Azimut; es sind *keine Reflexe* vorhanden [ausser bei $i = 80^0$, $\varepsilon = 60^0 = 80^0$] (Lommel'sche Annahme).

3. Das Gesetz für die Emanation bei constanter Incidenz ist unabhängig von der Wellenlänge, d. h. das Diffusionsvermögen ist für Teilchen der gegebenen Grössenordnung (= 0,002 *mm*) unabhängig von der Wellenlänge. (Lommel'sche Annahme.)

4. Ein Beleuchtungsgesetz kann nicht symmetrisch sein in Bezug auf i und ε.

5. Die Intensität des diffus reflectirten Lichtes bei constantem Emanationswinkel ändert sich bei geändertem In-

1) J. Violle, Compt. rend. 105. II. p. 111. 1887.

cidenzwinkel nicht proportional dem cos i, wie Lambert annimmt.

6. Die Intensität des diffus reflectirten Lichtes bei vollkommen matten Flächen ändert sich bei constantem Incidenzwinkel mit variirendem Emanationswinkel wie der Cosinus desselben, d. h. das *Lambert'sche Emanationsgesetz* gilt für völlig *matte* Substanzen (Pulver) ganz *allgemein vollständig streng.*

7. Infolge der Abweichung vom Cosinus i-Gesetz gilt das vollständige Lambert'sche Gesetz $q = \Gamma_1 \,.\, d\,s \,.\, \cos i \,.\, \cos \varepsilon$ nicht; die Abweichungen betrugen zwischen 4,6 % und 10 %.

Zum Schlusse erfülle ich noch gerne die angenehme Pflicht, meinen hochverehrten Lehrern Hrn. Prof. Dr. v. Lommel, Prof. Dr. Seeliger und Prof. Dr. Graetz für die wertvollen Ratschläge meinen besten Dank auszusprechen.

München, Physikal. Inst. d. Univ., im December 1899.

(Eingegangen 4. December 1899.)

3. *Ueber anomale Dispersion im ultraroten Spectralgebiete; von E. Aschkinass.*

(Berliner Habilitationsschrift.)

I. Einleitung.

§ 1. Die grosse Entdeckung von Kirchhoff und Bunsen hat uns gelehrt, aus den Spectren glühender Gase und Dämpfe die chemischen Bestandteile der emittirenden Substanzen zu erkennen. Später zeigte insbesondere W. H. Julius, dass auch bei tieferen Temperaturen gewisse Molecülgruppen sich durch charakteristische Streifen in den Absorptionsspectren ihren Verbindungen zu erkennen geben. Es ist indessen bisher noch nicht gelungen, einen Zusammenhang zwischen den Wellenlängen solcher Spectralstreifen und den sonstigen physikalisch-chemischen Eigenschaften der Körper aufzufinden. Eine derartige Beziehung würde uns aber zweifellos einen tiefen Einblick in (intra-)moleculare Verhältnisse gewähren.

Wenn wir von diesem Gesichtspunkte aus zunächst die Emissionsspectra glühender Gase betrachten, so dürfte die ungeheuere Mannigfaltigkeit der beobachteten Thatsachen es allerdings fürs erste als fast aussichtslos erscheinen lassen, das angedeutete Ziel zu erreichen. Doch beginnt sich in neuester Zeit auch auf diesem Gebiete das Gewirr der Erscheinungen in manchen Punkten zu lösen. Da aber die letztgenannten Phänomene in der Regel — ja vielleicht in allen Fällen[1]) — mit chemischen Veränderungen der Substanz verknüpft sind, bei denen wahrscheinlich weitgehende Dissociationen eintreten, und sich die Körper somit in einem Zustande befinden, in welchem auch ihre übrigen Eigenschaften nur wenig bekannt sind, so mögen jene Spectralerscheinungen von unseren weiteren Betrachtungen ausgeschlossen bleiben.

Beschränken wir uns also auf die Erscheinungen bei tieferen Temperaturen, so kommen in erster Linie die Beobachtungen an Absorptionsspectren in Betracht. Im grossen

---

1) Vgl. E. Pringsheim, Wied. Ann. **49.** p. 347. 1893.

und ganzen zeigt schon die geringere Anzahl von Discontinuitäten dieser Spectra, dass wir es hier wohl mit übersichtlicheren Verhältnissen als wie bei den glühenden Gasen zu thun haben. Wir müssen nun aber scharf unterscheiden zwischen den starken, „metallischen“ Absorptionen und denjenigen von geringerer Intensität. Die ersteren sind im Gegensatz zu den anderen dahin zu charakterisiren, dass sie zu anomaler Dispersion Veranlassung geben.

Sämtliche annehmbaren Theorien der Dispersion basiren auf der Grundhypothese, dass ponderable, bez. elektrisch geladene Teilchen der Körper, die als schwingungsfähige Gebilde mit einer bestimmten Eigenperiode begabt sind, durch die Lichtwellen zum Mitschwingen veranlasst werden. Für diejenigen Wellen, für welche Consonanz mit den Körperteilchen besteht, ist dann die Absorption eine besonders hohe und in den entsprechenden Spectralgegenden tritt anomale Dispersion ein. Die Theorie setzt also jene Wellenlängen mit charakteristischen Bestandteilen der Körper in einen unmittelbaren Zusammenhang.

Zur Erklärung der schwächeren Absorptionen, die sich gleichzeitig in anderen Spectralregionen zeigen, fehlt es aber bislang an einer begründeten Vorstellung. Es liegt zwar nahe, akustische Analogien, wie Obertöne etc., zur Erläuterung heranzuziehen, doch ist es bisher nicht geglückt, die beobachteten Thatsachen mit derartigen Hypothesen in Einklang zu bringen. Dass aber das gesamte optische Verhalten eines Körpers von den resonirenden Partikeln beeinflusst wird, ergiebt sich aus der Thatsache, dass die Werte der Brechungsexponenten in der gesamten Ausdehnung des Spectrums in hervorragendem Maasse von der Grösse der Wellenlängen abhängen, für welche anomale Dispersion vorhanden ist.

Die Theorie lässt nun zwar in ihrer allgemeinen Gestalt für jeden Körper beliebig viele Gattungen von Elementarteilchen mit je einer anderen Eigenperiode zu; so weit aber die bisherigen Beobachtungen reichen, hat sich gezeigt, dass die Erscheinungen sich unter der Annahme einer ganz geringen Zahl solcher Partikelgruppen im völligen Einklange mit der Theorie darstellen lassen.

Alle diese Umstände lassen die Vermutung nicht un-

begründet erscheinen, dass sich am ehesten für die Wellenlängen der *metallischen* Absorptionen Beziehungen zu sonstigen Eigenschaften der Körper ergeben dürften. Diese Erwägung hat mich veranlasst, für eine Anzahl Substanzen die Stellen ihrer anomalen Dispersion im Spectrum zu bestimmen.

§ 2. Obwohl nämlich gerade in neuerer Zeit die Erscheinungen und die Theorie der anomalen Dispersion, im Zusammenhange mit der elektromagnetischen Lichttheorie und den Versuchen über Strahlen elektrischer Kraft, ein erhöhtes Interesse gewonnen haben, ist das auf diesem Gebiete bisher vorliegende Beobachtungsmaterial doch nur ein äusserst spärliches zu nennen. Und doch müssen wir annehmen, dass ein jeder Körper an irgendwelchen Stellen des Spectrums anomale Dispersion zeigen wird. Seit längerer Zeit ist diese Erscheinung im sichtbaren Gebiete erforscht worden und zwar für eine kleine Anzahl Substanzen von zumeist höchst complicirter Zusammensetzung. Erst neuerdings haben Untersuchungen im ultraroten Spectrum einige weitere Körper in ihrem diesbezüglichen Verhalten kennen gelehrt. Unter diesen Umständen können die im folgenden mitzuteilenden Ergebnisse fürs erste nicht viel mehr als eine Bereicherung des Beobachtungsmateriales bieten. Doch liefern sie gleichzeitig in mancher Hinsicht eine weitere Bestätigung der elektromagnetischen Dispersionstheorie.

II. Vorversuche.

§ 3. Die Messungen beziehen sich sämtlich auf das ultrarote Spectralgebiet. Die elektromagnetische Theorie führt zu der Schlussfolgerung, dass in diesen Gegenden anomale Dispersionen eintreten müssen, wenn der aus der Cauchy'schen Formel für unendlich lange Wellen extrapolirte Wert des Brechungsexponenten nicht mit der Wurzel aus der Dielektricitätsconstanten übereinstimmt. [1]) Dieser Satz bietet einen Fingerzeig für die Auswahl der Substanzen, von deren Untersuchung sich ein positives Resultat erwarten lässt. Bislang ist jedoch das ultrarote Spectrum nur bis zu einer gewissen Grenze unseren Messungen zugänglich, da weiterhin die Intensität aller Strahlungsquellen unmessbar klein wird. Wie von

1) Vgl. H. Rubens, Wied. Ann. **45.** p. 238. 1892.

Hrn. Rubens und mir gezeigt wurde, lässt sich bei Anwendung der empfindlichsten Hülfsmittel das Spectrum noch bis etwa 60 μ verfolgen[1]), während ein weiteres Vordringen vor der Hand kaum möglich zu sein scheint.[2]) Bei der Auswahl der zu untersuchenden Substanzen hat man sich daher von folgenden Erwägungen leiten zu lassen: Zunächst können nur solche Körper in Betracht kommen, für welche sich das Maxwell'sche Gesetz durch eine Extrapolation aus optischen Messungen nicht verificiren lässt. Für diese bestimme man den Brechungsexponenten bei einer möglichst grossen Wellenlänge, etwa 50—60 μ. Ergiebt sich dabei ein höherer Wert als ihn die auf Grundlage optischer Messungen aufgestellte Cauchy'sche Formel für die betreffende Wellenlänge liefert, so darf man folgern, dass bereits in einem der Messung zugänglichen Spectralgebiete anomale Dispersion vorhanden ist; ferner erkennt man auch, dass die Lage derselben bei relativ kurzen Wellen zu suchen ist, falls der auf jene Weise beobachtete Wert des Brechungsexponenten sich nur noch wenig von der Wurzel aus der Dielektricitätsconstanten unterscheidet. Um nun schliesslich die genauen Werte der Wellenlängen festzustellen, bei denen die Anomalie eintritt, ist es am praktischsten, das Reflexionsvermögen der betreffenden Substanzen zu untersuchen: mit anomaler Dispersion und Absorption ist ja in allen Fällen auch eine erhöhte Reflexion verbunden. Um die Untersuchungen aber auf langwellige Spectralregionen ausdehnen zu können, in welchen die vorhandenen Energiemengen nur geringfügige sind, ist es eine unerlässliche Vorbedingung, möglichst ausgedehnte Flächen der betreffenden Körper zur Verfügung zu haben. Hieraus erwächst eine weitere Beschränkung für die Auswahl geeigneter Materialien. In Anbetracht aller dieser Umstände befassen sich die folgenden Untersuchungen zunächst mit den vier Substanzen: Marmor, Kalkspat, Gyps und Alaun.

§ 4. Lässt man die Gesamtemission eines Auer'schen Brenners fünfmal an Steinsalz reflectiren, so erhält man eine Reststrahlung, deren Wellenlänge früher zu 51,2 μ bestimmt wurde.[3]) Durch Vergleichung mit einem Silberspiegel wurde

1) H. Rubens u. E. Aschkinass, Wied. Ann. **65**. p. 241. 1898.
2) l. c. **67**. p. 459. 1899.
3) l. c. **65**. p. 241. 1898.

für diese Strahlen das Reflexionsvermögen der genannten Substanzen ermittelt und hieraus nach der Fresnel'schen Formel der Brechungsexponent n berechnet. Es ergaben sich für n die folgenden Werte (Tab. I), denen die Wurzeln aus den Dielektricitätsconstanten K[1]) zur Seite gestellt sind.

Tabelle I.

	n	$\sqrt{K}$		n	$\sqrt{K}$
Marmor	3,0	—[2])	Gyps	2,6	2,25
Kalkspat	2,7	2,90[3])	Alaun	2,5	2,58

Die Werte von n zeigen innerhalb der Fehlergrenzen eine gute Uebereinstimmung mit $\sqrt{K}$, sodass die weitere Untersuchung der Substanzen mit genügender Aussicht auf einen Erfolg begonnen werden konnte.

§ 5. Die zuverlässigste Methode, um die Lage der vermuteten Reflexionsmaxima aufzufinden, wäre jedenfalls die, bis etwa 60 μ ein prismatisches Spectrum zu entwerfen und Schritt für Schritt das Reflexionsvermögen zu verfolgen. Leider fehlt es aber für das ganze Gebiet jenseits 20 μ an einer geeigneten Prismensubstanz, da keine Stoffe bekannt sind, welche hier noch hinreichende Durchlässigkeit und gleichzeitig eine merkliche Dispersion besitzen. Es wurde daher in folgender Weise verfahren, um zunächst eine rohe Orientirung über die ungefähre Lage der selectiven Reflexionen zu gewinnen.

Lässt man die Gesamtstrahlung einer Energiequelle mehrmals an Oberflächen der gleichen Substanz reflectiren, so muss die restirende Intensität eine wesentlich andere spectrale Zusammensetzung zeigen als die ursprüngliche, wenn für irgendwelche Wellenlängen selective Reflexionen vorhanden sind. So

---

1) Die Zahlenwerte von K sind der Arbeit des Hrn. Starke entnommen. Vgl. Wied. Ann. **60.** p. 629. 1897.

2) Für die Dielektricitätsconstante des Marmors finden sich in der Literatur keine Angaben. Man darf wohl aus den Zahlen unserer Tab. I schliessen, dass sich dieselbe nicht wesentlich von der des Kalkspates unterscheiden dürfte, der die gleiche chemische Zusammensetzung aufweist.

3) Die benutzte Kalkspatfläche war die eines natürlichen Spaltungsstückes; daher ist für K der Mittelwert aus den Dielektricitätsconstanten senkrecht und parallel zur Axe benutzt worden.

behält man bei einer genügend grossen Anzahl von reflectirenden Flächen ausschliesslich Strahlen derjenigen Bezirke übrig, für welche anomale Dispersion besteht.[1]) Im vorliegenden Falle wurde aber zunächt eine möglichst geringe Zahl solcher Spiegel in Anwendung gebracht, da anderenfalls anomale Absorptionsstreifen von mässiger Stärke und grosser Wellenlänge der Beobachtung entgehen würden. Absorptionen, die zu anomaler Dispersion Veranlassung geben, brauchen nämlich nicht notwendig so intensiv zu sein, um Reflexionen von der Höhe zu bedingen, wie sie z. B. beim Quarz, Steinsalz, Sylvin etc. beobachtet wurden. Für Wellen von 61 μ, die durch fünfmalige Reflexion an Sylvin erhalten wurden, ergab sich z. B. das Reflexionsvermögen derselben Substanz zu 80 Proc. Wäre dasselbe aber nur etwa halb so gross gewesen, so hätte die restirende Energie nur den 32. Teil der thatsächlich beobachteten betragen und wäre somit zu gering gewesen, um eine nähere Untersuchung dieser Strahlen zu ermöglichen. Wegen des enormen Ueberwiegens der kurzwelligen Energie in der Emission unserer Wärmequellen ist man aber dennoch gezwungen nicht unter ein gewisses Minimum in der Zahl der reflectirenden Flächen hinunterzugehen. Es erweist sich am vorteilhaftesten, im allgemeinen zuerst drei solcher Spiegel zu benutzen.

Um nun zunächst auf qualitativem Wege ein Urteil über die spectrale Zusammensetzung der restirenden Strahlung zu gewinnen, wurde die procentische Absorption derselben durch Platten von Quarz, Flussspat und Steinsalz (die Dicke der letzteren betrug bez. 1,6 und 4 mm) untersucht, deren Durchlässigkeitsgrenzen von früher her bekannt sind. Dieselben sind angenähert für Quarz 5 μ, für Flussspat 11 μ[2]) und für Steinsalz 22 μ. Ein viel präciseres Urteil liess sich aber erlangen durch Combination von Absorptions- und Reflexionsmessungen an verschiedenen Substanzen.

§ 6. Die hierbei angewandte Versuchsanordnung war im wesentlichen die gleiche wie die von Hrn. Rubens und mir

1) H. Rubens u. E. F. Nichols, Wied. Ann. **60.** p. 418. 1897.

2) Es mag an dieser Stelle unberücksichtigt bleiben, dass sowohl Quarz wie Flussspat für sehr lange Wellen wieder eine schwache Durchlässigkeit besitzen.

früher benutzte.[1]) Ein Auer'scher Brenner (ohne Zugglas) A befand sich vor dem Spalte s_1 des Spiegelspectrometers s_1, ϱ_1, ϱ_2, s_2 (vgl. Fig. 1). Ein Bild von s_1 entstand auf dem zweiten Spalte s_2; die Breite von s_1 und s_2 betrug stets 1 cm, ihre Höhe 4 cm. Auf dem Wege zwischen den Hohlspiegeln ϱ_1 und ϱ_2 erfuhren die parallel gemachten Strahlen eine Reflexion an einem auf dem Spectrometertischchen aufgestellten silbernen Planspiegel R. Nach ihrem Austritt aus dem Spalt s_2 wurden sie an den Flächen F_1 bis F_3 reflectirt und dann von dem grossen Concavspiegel Σ (Oeffnung = 12 cm, Brennweite = 15 cm) auf die Rubens'sche Thermosäule T concentrirt. Bei D befand sich ein Diaphragma und vor demselben eine Vorrichtung zur Einschaltung der absorbirenden Platten. Zur Bestimmung der Reflexionen wurde der Silberspiegel R durch die zu untersuchenden Substanzen ersetzt. Die Justirung derselben geschah in der Weise, dass das Bild einer bei s_1 befindlichen festen Marke mit einer ebensolchen bei s_2 zur Coincidenz gebracht wurde. Die einzelnen Teile des ganzen Strahlenweges waren durch geeignete (in der Figur nicht mitgezeichnete) Diaphragmen sorgfältig gegeneinander abgeschirmt.

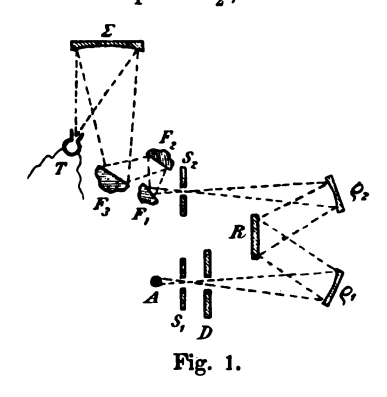


Fig. 1.

§ 7. Zunächst wurden mit dieser Versuchsanordnung die Durchlässigkeiten für die freie Gesamtstrahlung des Auer'schen Brenners (d. h. nach viermaliger Reflexion desselben an den Silberspiegeln ϱ_1, R, ϱ_2, Σ) ermittelt. Zu diesem Zwecke befand sich zwischen s_2 und Σ an Stelle der in der Figur gezeichneten drei Flächen F_1—F_3 nur ein einziger silberner Planspiegel.[2])

1) H. Rubens u. E. Aschkinass, Wied. Ann. 65. p. 241. 1898.

2) Derselbe bewirkt allerdings auch seinerseits eine geringe Modification der spectralen Zusammensetzung, da Silber die Strahlen von sehr kleiner Wellenlänge wesentlich schwächer reflectirt als die übrigen, für welche sein Reflexionsvermögen überall gleich 100 Proc. gesetzt werden darf; indessen kann dieser Umstand die vorliegenden Resultate nicht merklich beeinflussen.

Um bei diesen Messungen die Galvanometerausschläge auf ein geeignetes Maass zu reduciren, musste ein Widerstand von 1000 Ohm in den Stromkreis der Thermosäule eingeschaltet werden.

Die folgenden Zahlen geben die beobachteten Durchlässigkeiten wieder:

durch Quarz	Flussspat	Steinsalz
43 %	73 %	88 %

Tab. II. enthält in analoger Weise die procentischen Durchlässigkeiten der nach dreimaliger Reflexion an Marmor, Gyps und Alaun restirenden Strahlung. Für Kalkspat konnten gleichartige Versuche nicht angestellt werden, da mir drei genügend grosse Stücke nicht zur Verfügung standen.

Tabelle II.

Substanz der drei Spiegel $F_1 - F_3$	Proc.-Durchlässigkeit durch		
	Quarz	Flussspat	Steinsalz
Marmor	5	53	62
Gyps	1	65	88
Alaun	4	48	85

Wir erkennen in allen drei Fällen eine deutliche Aenderung der spectralen Zusammensetzung.

§ 8. Der Gang der weiteren Beobachtungen ist aus folgenden Darlegungen ersichtlich. Es sei die Intensität des nach dreimaliger Reflexion an einer Substanz A übrigbleibenden Strahlengemisches gleich J. Eine Platte aus einem beliebigen Material B lasse hiervon den Betrag i hindurch. Wir wollen voraussetzen, dass diese Platte B erst von einer bestimmten Wellenlänge λ_1 des ultraroten Spectrums an ein merkliches Absorptionsvermögen besitzt, und dass jenseits einer etwas grösseren Wellenlänge λ_2 vollkommene Undurchlässigkeit besteht. Diese Annahme entspricht den thatsächlichen Verhältnissen bei den von uns benutzten Probeplatten aus Quarz, Flussspat und Steinsalz, wenn wir davon absehen, dass die beiden erstgenannten Substanzen für sehr lange Wellen wieder eine geringe Durchlässigkeit besitzen. Die angenäherten Werte jener Grenzwellenlängen sind folgende:

Für die	1 mm	dicke	Quarzplatte:	$\lambda_1 = 3\mu$,	$\lambda_2 = 5\mu$,
„ „	6 „	„	Flussspatplatte:	$\lambda_1 = 8\mu$,	$\lambda_2 = 11\mu$,
„ „	4 „	„	Steinsalzplatte:	$\lambda_1 = 15\mu$,	$\lambda_2 = 22\mu$.

Die Wellenlängen der hindurchgelassenen Strahlen sind demnach kleiner als λ_2. Ihre Intensität hat aber beim Durchgang durch die Platte B eine Schwächung erlitten durch die zwei Reflexionen an deren Oberflächen. Der Coefficient dieser Reflexionen ergiebt sich aus dem mittleren Brechungsexponenten von B für die betreffenden kurzwelligen Strahlen oder kann durch directe Messung ermittelt werden. Seine gesammte Grösse sei gleich r. Die Intensität der durch die Platte B hindurchgehenden Strahlen war mithin vor dem Eintreten des Reflexionsverlustes gleich $i/(1-r)$. Es lässt sich demnach die gesammte ursprüngliche Energie J in zwei Teile zerlegen, nämlich in die Intensität $i/(1-r)$, deren Wellenlängen λ kleiner sind als λ_2, und $J - i/(1-r)$, deren Wellenlängen grösser sind als λ_1.

Wir lassen nunmehr die Strahlung J an irgend einem Körper C reflectiren, indem wir denselben auf das Spectrometertischchen bei R (vgl. Fig. 1) aufsetzen. Hierdurch sinkt die Intensität J auf die Grösse E. Durch Einschaltung der zuvor benutzten Platte B wird dieser Wert weiter verringert bis auf e. Jetzt können wir wieder, in analoger Weise wie vorher, E zerlegen in einen Strahlungsanteil $e/(1-r)$, der einen Spectralbereich umfasst, in welchem $\lambda < \lambda_2$, und in $E - e/(1-r)$, für welchen $\lambda > \lambda_1$.

Hieraus ergiebt sich das procentische Reflexionsvermögen des angewandten Spiegels C für die erste der beiden Strahlengattungen zu

$$R_1 = 100\,\frac{e}{i}\quad \ldots \quad (\lambda < \lambda_2)$$

und für die zweite zu

$$R_2 = 100\,\frac{E - \dfrac{e}{1-r}}{J - \dfrac{i}{1-r}}\quad \ldots \quad (\lambda > \lambda_1).$$

Auf diese Weise sind die Zahlenwerte der Tab. III—V ermittelt worden. Die Ueberschriften der folgenden Abschnitte bezeichnen die Substanzen A, an denen eine dreimalige Re-

flexion der vom Auer'schen Brenner kommenden Strahlung stattgefunden hat. In der ersten Horizontalreihe der Tabellen sind jedesmal die Platten B angegeben, deren Durchlässigkeit geprüft wurde; die erste Verticalreihe enthält die Substanzen C, deren Reflexionswerte R_1 und R_2 verzeichnet sind. An den Stellen, an denen keine Zahlen eingetragen sind, waren die betreffenden Galvanometerausschläge so klein, dass sich zuverlässige Resultate nicht berechnen liessen.

In der Discussion der Beobachtungsdaten wird die Bezeichnung „Reihe" für die horizontale, der Ausdruck „Columne" für die verticale Anordnung in den Tabellen gebraucht.

Marmor.

§ 9. Das verwendete Material stammte vom Pentelikon und bestand aus möglichst reinen weissen Stücken, die auf einer Seite polirt wurden.

Tabelle III.

		Quarz	Flussspat	Steinsalz
Quarz	R_1	—	5	6
	R_2	13	22	23
Flussspat	R_1	—	4	4
	R_2	28	58	72
Marmor	R_1	—	31	30
	R_2	42	52	61
Kalkspat	R_1	—	42	41
	R_2	48	51	57

Der Marmor selbst zeigt hiernach in Bezug auf seine eigene Reststrahlung für jeden der beiden Intensitätsanteile, in die wir dieselbe zerlegen können, wenn wir die Durchlässigkeit durch Steinsalz beobachten, ein hohes Reflexionsvermögen. Dieser Umstand könnte zunächst dahin gedeutet werden, dass die Strahlen, für welche selective Reflexion besteht, ausschliesslich dem Spectralgebiete angehörten, in welchem Steinsalz ein unvollkommenes Absorptionsvermögen besitzt (zwischen $\lambda_1 = 15\,\mu$ und $\lambda_2 = 22\,\mu$). Dieser Fall liegt aber thatsächlich nicht vor; denn die Prüfung mit der Flussspatplatte zeigt ganz gleichartige Verhältnisse. Wo aber Steinsalz unvollkommen

absorbirt, ist Flussspat total undurchlässig und die Wellen, die von letzteren nur teilweise absorbirt werden, gehen durch Steinsalz noch ungeschwächt hindurch. Wir haben es demnach mit wenigstens zwei Streifen anomaler Dispersion zu thun: der erste liegt unterhalb 11 μ, der zweite oberhalb 15 μ. Berücksichtigen wir noch die äusserst schwache Durchlässigkeit des Quarzes in Gemässheit der Tab. II und ferner die geringe Grösse der Quarzreflexion für die durch Flussspat hindurchgehenden Strahlen ($R_1 = 5$), so haben wir die Lage des ersten Streifens zwischen 5 und 8 μ zu erwarten.

Wir erkennen, dass der zweite Streifen der intensivere ist, da die Werte von R_2 in der Marmorreihe wesentlich höhere sind als diejenigen von R_1. Da nun der Flussspat den langwelligeren Strahlungsanteil in der Steinsalzcolumne mit 72 Proc. reflectirt, so haben wir den den längeren Wellen angehörigen Streifen nahe bei 24,4 μ zu erwarten; denn diese Wellenlänge wurde früher für die Reststrahlen des Flussspates ermittelt.[1]) Mit der Existenz eines anomalen Spectralgebietes von grosser Wellenlänge stehen auch die hohen R_2-Werthe der Quarzreihe im Einklang.

Wir bemerken ferner in unserer Tabelle, dass die R_2-Werte in der Flussspatcolumne sämtlich kleiner sind als in der Steinsalzcolumne. Ein derartiger Unterschied war von vornherein zu erwarten; denn wir haben es ja mit einem Strahlengemisch zu thun, in welchem auch diejenigen Wellen noch in gewissem Betrage vorhanden sind, für die der Marmor kein selectives Reflexionsvermögen aufweist. Ein gewisser Teil dieser „falschen" Strahlen muss daher von Flussspat absorbirt werden, ohne im Steinsalz eine Schwächung zu erleiden. Die bezeichneten Differenzen der zweiten und dritten Columne sind aber doch zu bedeutend, als dass sie allein durch diesen Umstand erklärt werden könnten. Ausserdem müssten sich, wenn die eben erwähnte Deutung zutreffend wäre, die R_1-Werte der nämlichen Columnen im umgekehrten Sinne und, da $R_1 < R_2$, in noch höherem Maasse unterscheiden, sodass sie in der zweiten Columne grösser wären als in der dritten. Dies ist aber keineswegs der Fall. Unter diesen Umständen ist es wahr-

1) H. Rubens u. E. F. Nichols, Wied. Ann. 60. p. 418. 1897.

scheinlich, dass noch ein dritter schwacher Streifen existirt in einem Gebiete, in welchem nur der Flussspat, nicht aber Steinsalz undurchlässig ist, also etwa zwischen 10 und 20 μ.

Weiter unten wird sich zeigen, dass die hier ausgesprochenen Voraussagungen durch die exacten Messungen vollkommen bestätigt werden.

Die für Kalkspat in der letzten Reihe mitgeteilten Zahlen stimmen sehr nahe mit denen von Marmor in der dritten Reihe überein. Wir dürfen daraus schliessen, dass diese beiden Substanzen, die in ihrer chemischen Zusammensetzung übereinstimmen, auch bezüglich ihrer anomalen Absorptionen keine wesentlichen Unterschiede gegeneinander aufweisen.

Gyps.

§ 10. Von der Firma R. Fuess-Steglitz erhielt ich drei sehr schöne, vorderseitig polirte, bis 100 qcm grosse Krystallplatten. Da nach Tab. I die erhaltenen Reststrahlen bis auf 1 Proc. durch Quarz geschwächt wurden, so konnte für die Reflexionsbeobachtungen die Prüfung mit der Quarzplatte entbehrt werden. Tab. IV enthält daher nur die zwei Columnen „Flussspat“ und „Steinsalz“.

Tabelle IV.

		Flussspat	Steinsalz			Flussspat	Steinsalz
Quarz	R_1	87	84	Marmor	R_1	10	10
	R_2	84	—		R_2	10	—

Es sind in obiger Tabelle nur die Reflexionsmessungen an Quarz und Marmor wiedergegeben, da sich aus den Beobachtungen an anderen Substanzen keine neue Thatsache entnehmen liess. Aus den mitgeteilten Daten ersehen wir, dass eine Stelle anomaler Dispersion ziemlich genau bei den Wellenlängen liegen muss, bei denen auch der Quarz eine solche aufweist. Und zwar können von den drei Quarzstreifen nur die beiden bei 8,50 und 9,02 μ in Frage kommen. Anderenfalls wäre nämlich die Durchlässigkeit des Steinsalzes (vgl. Tab. II) für unsere Strahlen eine geringere, da der dritte Quarzstreifen bei 20,75 μ gelegen ist. Mit jenem Resultat steht auch die Thatsache nicht im Widerspruch, dass

in der Flussspatcolumne die R_1 und R_2-Werte von der gleichen Grössenordnung sind; denn bei 9 μ besitzt Flussspat bereits ein erhebliches, aber kein totales Absorptionsvermögen.

Es ist nicht ausgeschlossen, dass der Gyps noch einen ganz schwachen Streifen bei längeren Wellen besitzt in einem Gebiete, in dem das Steinsalz bereits absorbirt. Die Durchlässigkeit dieser Substanz war nämlich für die dreimal an Gyps reflectirte Strahlung nach Tab. II 88 Proc., also nicht grösser als für die directe Strahlung (vgl. p. 49). Wenn die erstere aber fast ausschliesslich aus Wellen von ca. 9 μ bestände, so könnte die Schwächung im Steinsalz höchstens 8 Proc. — infolge des Reflexionsverlustes — betragen. In Wirklichkeit ist die Schwächung also ein wenig grösser; indessen sind die vorhandenen Unterschiede zu klein, um zuverlässige Werte für R_2 in der zweiten Columne berechnen zu können.

Für Marmor finden wir hier (bei einer Wellenlänge von ca. 9 μ) Reflexionswerte von 10 Proc. Diese Beobachtung befindet sich in guter Uebereinstimmung mit unserem früheren Resultat, dass der erste Marmorstreifen zwischen 5 und 8 μ gelegen sein muss.

Kali-Alaun.

§ 11. Der Kali-Alaun kommt zwar in der Natur im klaren krystallischen Zustande vor, doch ist es sehr schwierig, solche Stücke in beträchtlicher Grösse zu erhalten. Ich benutzte daher das künstlich hergestellte Material und wählte aus einer grösseren Anzahl von Stücken, nachdem dieselben durchsägt waren, diejenigen aus, welche die wenigsten Risse und Löcher aufwiesen. Auch die weitere Bearbeitung, das Schleifen und Poliren, wurde von mir selbst vorgenommen.

Tabelle V.

		Flussspat	Steinsalz			Flussspat	Steinsalz
Alaun	R_1	30	28	Marmor	R_1	8	8
	R_2	23	—		R_2	8	—
Quarz	R_1	64	63	Gyps	R_1	46	38
	R_2	50	—		R_2	28	—

Besonders intensiv sind die Reflexionen am Quarz und am Gyps. Wir befinden uns also wiederum in der Nähe von 9 μ. Auch hier liegt möglicherweise — gemäss einer analog der beim Gyps (p. 54) angestellten Betrachtung — noch ein sehr schwacher Streifen im Gebiete der Steinsalzabsorption.

III. Bestimmung der Wellenlängen.

§ 12. Zur genauen Wellenlängenbestimmung der selectiven Reflexionen werden wir am vorteilhaftesten ein Steinsalzprisma benutzen, soweit es sich um Spectralgebiete handelt, in denen diese Substanz noch nicht absorbirt. Im Bereiche längerer Wellen werden wir den Streifen des Marmors nach der Methode der Reststrahlen im Gitterspectrum auffinden können. Für Gyps und Alaun konnte die Existenz solcher langwelligen Streifen nicht mit völliger Gewissheit festgestellt werden. Die Möglichkeit einer eventuellen Wellenlängenmessung nach der letztgenannten Methode ist daher in diesen Fällen ausgeschlossen, da die Reflexionen zu schwach sind, um genügende Energiemengen zu liefern.

Zunächst seien die mit dem Beugungsgitter ausgeführten Messungen mitgeteilt. Die in Fig. 1 dargestellte Anordnung wurde zu dem Ende in der Weise modificirt, dass hinter F_3 noch eine vierte Marmorfläche eingeschaltet wurde, sodass die Strahlen eine viermalige Reflexion an dieser Substanz erfuhren, bevor sie auf die Thermosäule gelangten. Hierdurch wurde eine grössere Reinheit dieser Reststrahlen erzielt. Ferner wurde der Spectrometerarm s_1, ϱ_1 herumgedreht, sodass s_1 und ϱ_1 ihre frühere Stellung gegeneinander vertauschten. Vor s_1 befand sich wieder ein Auer'scher Glühkörper, der zusammen mit dem Collimatorarm s_1, ϱ_1 bewegt wurde. Auf dem Tischchen des Spectrometers befand sich statt des Spiegels R das bei früheren Untersuchungen mehrfach benutzte Gitter aus parallel gespannten Silberdrähten (Constante = 0,3716 mm), welches nur Bilder ungerader Ordnungszahl liefert. Die Breite der Spalte s_1 und s_2 wurde auf je 3 mm reducirt.

In Fig. 2 ist eine der ausgeführten Versuchsreihen graphisch dargestellt. In üblicher Weise bedeuten die Ordinaten die beobachteten Galvanometerausschläge, die Abscissen die am

Teilkreise abgelesenen Stellungen des drehbaren Spectrometerarmes. Wir erkennen auf beiden Seiten des Centralbildes je zwei Maxima: für die Lage des stärker abgelenkten ergab sich als Mittelwert aller Beobachtungen die Wellenlänge **29,4 μ** (Ablenkung $\delta = 4^0\,32'$), für das andere 6,7 μ ($\delta = 1^0\,2'$). Die Lage des letzteren sollte, wie oben gesagt, auch im prismatischen Spectrum aufgesucht werden, in welchem die Beobachtungen mit noch grösserer Genauigkeit ausgeführt werden

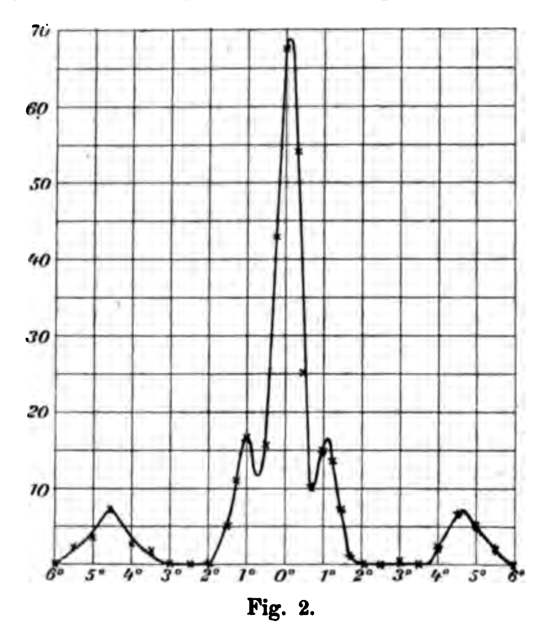


Fig. 2.

können. An dieser Stelle concentrirt sich daher das Hauptinteresse auf das zweite Beugungsbild bei 29,4 μ.

Wir hatten oben bemerkt, dass die Lage dieses Absorptionsstreifens sich nahe bei 24,4 μ finden muss, da der von Steinsalz absorbirte Antheil der nach dreimaliger Marmorreflexion resultirenden Strahlung mit 72 Proc. von Flussspat reflectirt wurde (vgl. Tab. III). In der nunmehr benutzten Anordnung haben wir die Strahlen durch eine vierte Reflexion an Marmor noch weiter gereinigt, und bei Anstellung eines analogen Reflexionsversuches mit Flussspat ergab sich jetzt, dass diese Substanz die von Steinsalz absorbirten Strahlen sogar mit 86 Proc. reflectirte.

Es besteht somit eine scheinbare Discrepanz zwischen der hier gefundenen Wellenlänge 29,4 μ und derjenigen von 24,4 μ, die früher von den Herren Rubens und Nichols als diejenige der Reststrahlen des Flussspates angegeben wurde. Nun sagen die genannten Autoren (l. c.) aber selbst, dass das von ihnen beobachtete Maximum wahrscheinlich aus zwei gesonderten Erhebungen besteht; der eigenartige Energieabfall in den l. c. wiedergegebenen Beugungsbildern deutete auf das Vorhandensein eines zweiten Streifens bei einer etwas grösseren Wellenlänge. Die Realität eines solchen Maximums in der Nähe von 30 μ befände sich demnach im völligen Einklang mit meinen Untersuchungen am Marmor.[1])

§ 13. Zu den weiteren Messungen, die behufs Ermittelung der ausgezeichneten Wellenlängen angestellt wurden, bediente ich mich der folgenden, auch von anderen Autoren früher benutzten Methode: Es wurde in dem Spectrum eines Steinsalzprismas die Verteilung des Reflexionsvermögens der betreffenden Substanz mit derjenigen des Silbers verglichen. Die auf diese Weise erhaltenen relativen Beträge sind aber von ca. 4 μ an mit den absoluten Reflexionswerten identisch, da die Reflexion des Silbers jenseits dieser Wellenlänge überall eine totale ist. Die Versuchsanordnung ist in Fig. 3 dargestellt.

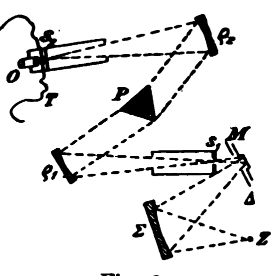


Fig. 3.

Die Strahlen der Wärmequelle Z wurden von dem grossen Hohlspiegel Σ — demselben, der schon in der vorigen Anordnung (Fig. 1) zur Anwendung gekommen war — auf den Collimatorspalt s_1 des Spiegelspectrometers s_1, ϱ_1, ϱ_2, s_2 concentrirt; bevor sie aber dorthin gelangten, erfuhren sie eine Reflexion bei M unter einem Einfallswinkel von ungefähr 23°. Auf dem

1) *Zusatz*: Nach Abschluss der vorliegenden Untersuchung hat Hr. Rubens die früheren Messungen an Flussspat mit den jetzigen, verbesserten Hülfsmitteln wiederholt. Es zeigte sich thatsächlich, dass das Gebiet der hohen Reflexionen sich um ein Beträchtliches über 24 μ hinaus erstreckt und bei 24,0 μ und 31,6 μ zwei maximale Erhebungen aufweist (H. Rubens, Wied. Ann. 69. p. 576. 1899).

Spectrometertischchen befand sich ein Steinsalzprisma P von $60^0 2'$ brechendem Winkel und 36 qcm grossen Seitenflächen. Das Ocularrohr enthielt die „lineare“ Thermosäule T und unmittelbar vor derselben den Spalt s_2, auf welchem ein scharfes Bild von s_1 entstand. Die Breite beider Spalte betrug stets $^1/_3$ mm. Die Vorrichtung bei M bestand aus einer verticalen Schlittenführung, längs deren sich eine starke Messingplatte bewegen konnte. Die letztere war auf der Vorderseite mit Russ geschwärzt, auf der Rückseite plan geschliffen und besass zwei kreisrunde Ausschnitte von je 2 cm Durchmesser. In zwei bestimmten Stellungen der Platte, die durch Anschläge fixirt waren, befand sich je einer dieser Ausschnitte genau hinter der Oeffnung des Diaphragmas Δ. Ein Silberspiegel und ein polirtes Stück der zu untersuchenden Substanz waren hinter jenen Löchern an die Messingplatte festgekittet, sodass in je einer Stellung des Schlittens die Reflexion der Strahlen nur an einem dieser beiden Spiegel stattfand.

Als Wärmequelle diente bei diesen Messungen der Zirkonbrenner. Pro Flächeneinheit ist die Emission desselben nämlich eine wesentlich höhere als die des Auer'schen Glühkörpers. Die grosse Ausdehnung, die die strahlende Fläche des letzteren besitzt, bewirkte zwar, dass seine Anwendung bei den früheren Versuchen sich als zweckmässiger erwies; bei der soeben beschriebenen Anordnung kann dieser Vorteil aber naturgemäss nicht ausgenutzt werden. Ausserdem verdient der Zirkonbrenner im Gebiete kurzer Wellen den Vorzug vor dem Auer'schen, weil die zeitlichen Schwankungen seiner Emission wesentlich geringere sind. Bei grossen Wellenlängen dagegen ist die Constanz aller unserer Energiequellen eine vortreffliche, weil sich hier die Intensität der Strahlung relativ sehr wenig mit der Temperatur ändert.

Der drehbare Arm $\varrho_2 s_2$ des Spectrometers, der die Thermosäule trug, wurde im Spectrum herumgeführt und seine Einstellungen am Teilkreis abgelesen. Das Prisma P wurde in der Stellung fixirt, für welche die Ablenkung der D-Linie ein Minimum war; diese Justirung wurde mittels eines hinter der Thermosäule befindlichen Oculars O vorgenommen, während der Spalt s_1 mit Natriumlicht beleuchtet wurde. Die den abgelesenen Ablenkungen entsprechenden Wellenlängen sind nach

den vorliegenden Bestimmungen der Steinsalzdispersion berechnet worden.[1])

Die bei grösseren Wellenlängen im prismatischen Spectrum nicht zu vermeidende diffuse kurzwellige Energie konnte durch Einschaltung einer Quarzplatte in den Strahlengang als solche erkannt und zur Ermittelung der wahren Reflexionswerte in gehöriger Weise in Rechnung gezogen werden.

Beim Beginn und am Ende der Beobachtungen wurden zur Prüfung der exacten Justirung des Schlittens M die Reflexionen zweier Silberspiegel miteinander verglichen. Es ergab sich in beiden Fällen eine gegenseitige Differenz der Ausschläge von nur 1 Proc. Sämtliche Messungen wurden in entsprechendem Maasse corrigirt.

Die Beobachtungsresultate sind in den folgenden Figg. 4 bis 6 in graphischer Weise wiedergegeben. Als Abscissenaxe ist die Scala der Wellenlängen (in μ) gewählt; als Ordinaten sind die Reflexionswerte in Procenten der auffallenden Strahlung eingezeichnet.

Marmor.

Das Material war mit dem früher benutzten identisch: von einer jener Platten wurde für die neuen Messungen ein kleineres Stück abgesägt.

Die Curve 1 der Fig. 4 zeigt in Uebereinstimmung mit den Resultaten der Vorversuche die Existenz zweier ausgeprägter Reflexionsmaxima, von denen das zweite im Bereich der Flussspatabsorption gelegen ist und eine wesentlich geringere Intensität besitzt als das erste. Die genauen Wellenlängen der höchsten Erhebungen sind **6,69** und **11,41** μ. Das erstere fanden wir oben bereits im Beugungsspectrum bei 6,7 μ.

Kalkspat.

Es wurde die Reflexion an einem polirten natürlichen Spaltungsstück untersucht. Die Curve 2 der Fig. 4 giebt die

---

1) S. P. Langley, Phil. Mag. (5) **22.** p. 149. 1886; H. Rubens, Wied. Ann. **54.** p. 476. 1895; H. Rubens u. A. Trowbridge, Wied. Ann. **60** p. 724. 1897.

Beobachtungen wieder. Wir erhalten demnach genau den gleichen Verlauf der Reflexion wie beim Marmor. Die Maxima liegen innerhalb der Fehlergrenzen an den nämlichen Stellen des Spectrums: bei **6,67** und **11,40** μ. Ein Unterschied zeigt sich nur in der Hinsicht, dass die Reflexionsbeträge für Kalkspat durchweg grösser sind. Diese Differenz ist wohl dadurch zu erklären, dass das benutzte Kalkspatstück hinsichtlich der Reinheit des Materiales, sowie der Güte der Politur die Marmorplatte wesentlich übertraf.

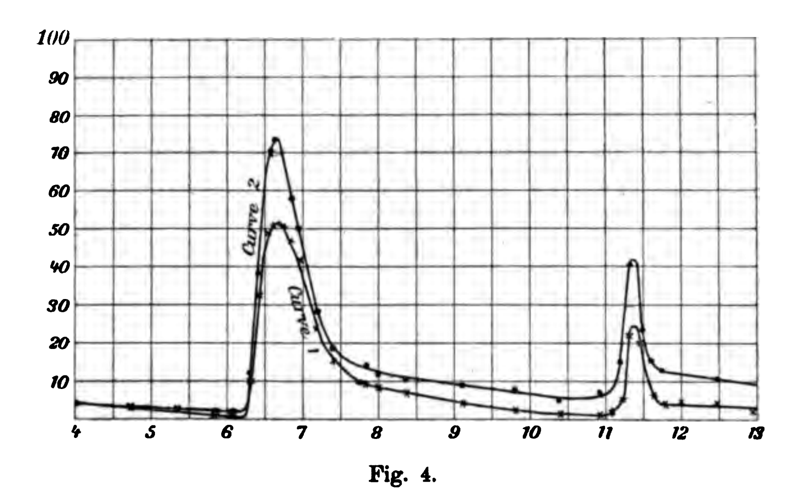


Fig. 4.

Wir hatten nun oben (vgl. Tab. III) gesehen, dass von den nach dreimaliger Reflexion an Marmor erhaltenen Reststrahlen der von Steinsalz absorbirte Betrag von Marmor und Kalkspat ungefähr gleich stark, nämlich mit ca. 60 Proc. reflectirt wurde. Es kann daher, nachdem wir für die zwei ersten Streifen zwischen den beiden Substanzen völlige Identität gefunden haben, kaum zweifelhaft sein, dass auch der dritte Streifen des Kalkspates ebenso wie der des Marmors bei **29,4** μ gelegen ist.

Wir bemerken also, dass die physikalische Structur eines Körpers von bestimmter chemischer Zusammensetzung die Lage seiner anomalen Dispersionen nicht zu beeinflussen scheint.

Gyps.

Wie aus Fig. 5 zu ersehen ist, liegt ein intensiver Reflexionsstreifen bei **8,69** μ.

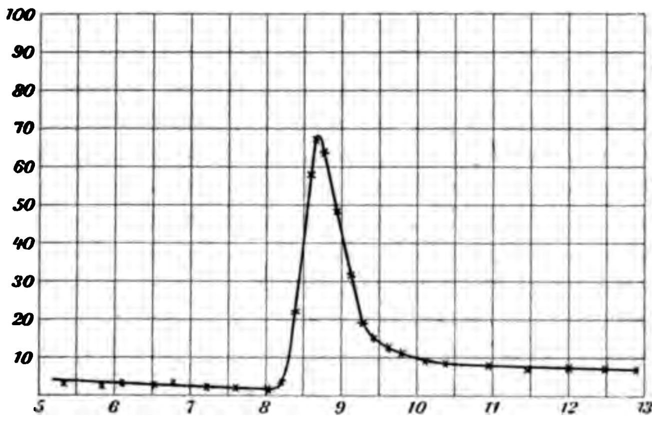


Fig. 5.

Kali-Alaun.

Zur Untersuchung gelangte ein polirtes natürliches Spaltungsstück eines Alaunkrystalles. Ein ausgesprochenes Reflexionsmaximum befindet sich gemäss der in Fig. 6 wiedergegebenen Curve bei der Wellenlänge **9,05** μ.

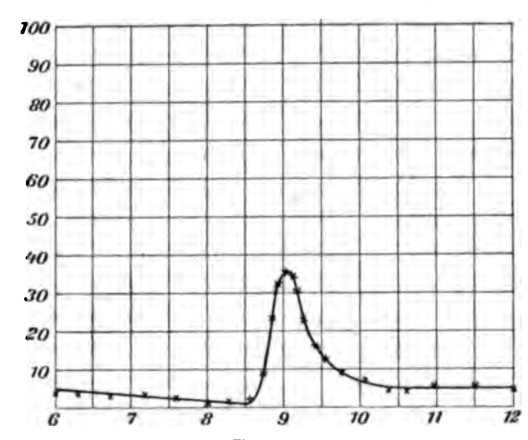


Fig. 6.

§ 14. Sowohl beim Gyps wie beim Alaun sinken die Reflexionen jenseits der Gebiete ihrer anomalen Dispersion auf 6—7 Proc. Beträchtlich höher waren dieselben aber für 51 μ

(vgl. Tab. I), nämlich nahezu von der Grösse, welche gemäss den Werten ihrer Dielektricitätsconstanten der Wellenlänge $\lambda = \infty$ zukommt. Diese Thatsache führt mit Notwendigkeit zu dem Schluss, dass jede der beiden Substanzen wenigstens noch einen Dispersionsstreifen im Gebiete längerer Wellen besitzen muss. In Uebereinstimmung hiermit wurden wir oben bereits durch die Ergebnisse der Vorversuche dazu veranlasst, das Vorhandensein solcher Anomalien als möglich hinzustellen. Die Beträge der bezüglichen Reflexionsgrössen erwiesen sich indessen als so gering, dass ein Versuch, die Wellenlängen zu messen, als aussichtslos bezeichnet werden musste. Um aber die spectrale Lage jener Streifen in möglichst enge Grenzen einzuschliessen, bestimmte ich nunmehr für die nach viermaliger Reflexion an Flussspat erhaltene Reststrahlung, die einen Wellenlängenbereich von etwa 24—32 μ umfasst, das Reflexionsvermögen von Gyps und Alaun. Dasselbe ergab sich für ersteren zu 12 Proc., für letzteren zu 8 Proc., war also bereits ein wenig höher als bei 12—13 μ. Aus diesem Umstand ist in Verbindung mit den übrigen Ergebnissen zu schliessen, dass die oben bezeichneten Anomalien ungefähr zwischen 30 und 40 μ vorhanden sein müssen.

IV. Untersuchungen an geschmolzenen Salzen.

§ 15. Die im Vorstehenden mitgetheilten Untersuchungen sollten einen Beitrag liefern zu spectralanalytischen Studien, deren Endziel sich dahin präcisiren liesse, dass es gelingen möchte, die Wellenlängen der anomalen Dispersionen eines Körpers, also die Eigenperioden seiner Elementarteilchen aus gewissen physikalisch-chemischen Constanten desselben im voraus zu berechnen. Um sich diesem Ziele zu nähern, wäre es wünschenswert, in systematischer Weise homologe Gruppen von chemischen Verbindungen der Untersuchung zu unterziehen. Für ein solches Unternehmen erwächst aber eine grosse Schwierigkeit aus dem Umstande, dass die betreffenden Substanzen, soweit sie überhaupt natürlich vorkommen, im allgemeinen nicht in genügend grossen Stücken, oder nur in unreinem Zustande zu beschaffen sind. Man wird daher genötigt sein, sich nicht auf die Verwendung der Naturproducte zu beschränken, sondern die geeigneten Materialien auf künst-

lichem Wege darzustellen. Dies liesse sich etwa in der Weise bewerkstelligen, dass die auf chemischen Wege gewonnenen Substanzen durch Schmelzen in die geeignete Form gebracht würden.

Ich habe daher begonnen, die Versuche nach dieser Richtung hin fortzusetzen. Nun ist es offenbar am zweckmässigsten, zunächst möglichst einfache Verbindungen ins Auge zu fassen. Aus diesem Grunde knüpfte ich an die früheren Beobachtungen über Chlornatrium und Chlorkalium — Steinsalz und Sylvin — an, indem ich das Verhalten der homologen Stoffe Bromnatrium und Bromkalium zum Gegenstand der Untersuchung machte.

Diese Salze wurden als chemisch rein von Kahlbaum bezogen. Ihre Schmelzpunkte liegen bei 710° (NaBr) und 700° (KBr). Zur Ausführung der Schmelzungen konnte ich einen der vorzüglichen Muffelöfen benutzen, welche im metallurgischen Laboratorium des chemischen Instituts der Technischen Hochschule zu Charlottenburg aufgestellt sind. Dem Vorsteher dieses Laboratoriums Hrn. Prof. Dr. Weeren möchte ich auch an dieser Stelle für sein gütiges Entgegenkommen meinen ergebensten Dank aussprechen.

Ich versuchte im Anfang, durch langsames Abkühlen der in glasirten Porzellanschalen geschmolzenen Massen die erstarrte Substanz in einer Form zu gewinnen, die eine weitere Bearbeitung zuliess. Ich erhielt jedoch, selbst wenn die Abkühlung im verschlossenen Ofen mehrere Tage lang andauerte, ein gänzlich unbrauchbares brüchiges Product, das von zahllosen Sprüngen durchsetzt war. Ein befriedigendes Resultat erzielte ich schliesslich in der Weise, dass ich die flüssige Schmelze in kalte Eisenschalen goss. Nach dem Erstarren an freier Luft zeigten sich nunmehr die Platten zwar stark gewölbt und mit vielen Falten bedeckt, doch waren sie ziemlich frei von schädlichen Sprüngen. Wurde ihre Dicke nicht zu klein bemessen, etwa 2 cm, so waren sie genügend consistent, um eine längere Bearbeitung vertragen zu können. Zuerst erhielten sie unter Benutzung einer breiten Feile eine ebene (bis 75 qcm grosse) Oberfläche, sodann wurden sie in üblicher Weise mit feinstem Schmirgel oder Bimsstein und Alkohol auf einer matten Glasplatte plan geschliffen und schliesslich auf einer mit Atlas überzogenen Scheibe polirt.

Um mich von der principiellen Brauchbarkeit dieses Ver-

fahrens zu überzeugen, stellte ich in der angegebenen Weise eine Platte aus geschmolzenem Chlornatrium her und bestimmte das Reflexionsvermögen derselben für die Reststrahlen des Steinsalzes ($\lambda = 51,2\ \mu$). Ich erhielt thatsächlich für die Chlornatriumplatte Reflexionswerte von 75—80 Proc., in Uebereinstimmung mit den früher an natürlichem Steinsalz ausgeführten Messungen.[1])

Bromnatrium.

§ 16. Die durch Schmelzung gewonnenen Spiegel aus Bromnatrium erwiesen sich leider nicht als luftbeständig. Kurze Zeit nach dem Poliren, oft bereits nach wenigen Stunden, war die Oberfläche durch Wasseraufnahme trübe geworden. Aus diesem Grunde musste die Politur unmittelbar vor den Beobachtungen jedesmal erneuert werden. Die Versuche wurden nach derselben Methode ausgeführt, die wir oben in § 6 und § 8 auseinandergesetzt haben. Die Strahlung des Auer'schen Brenners wurde demnach dreimal an Bromnatrium reflectirt. Sogleich zeigte es sich, dass die gesamte restirende Intensität bedeutend kleiner war als in den früheren Versuchen. Diese Thatsache liess bereits — wenn auch noch nicht mit Gewissheit — darauf schliessen, dass selective Reflexion erst bei ziemlich grossen Wellenlängen eintritt.

Zunächst seien wieder die von Quarz, Flussspat und Steinsalz hindurchgelassenen Intensitäten angegeben:

Quarz	Flussspat	Steinsalz
30%	56%	60%

Die Zahlen der folgenden Tab. VI sind aus Reflexions- und Absorptionsbeobachtungen in derselben Weise (vgl. § 8)

Tabelle VI.

		Flussspat	Steinsalz
Bromnatrium	R_1	7	8
	R_2	32	29
Steinsalz	R_1	—	—
	R_2	32	33
Quarz	R_1	—	—
	R_2	15	15

1) H. Rubens u. E. Aschkinass, Wied. Ann. 65. p. 241. 1898.

berechnet worden, wie diejenigen der Tab. III bis V. Die Werte von R_2 beziehen sich also auf den Strahlungsanteil von relativ grosser Wellenlänge.

Wegen der geringen Grösse der Galvanometerausschläge ist die Genauigkeit obiger Zahlenwerte wesentlich kleiner als diejenige der früheren Tabellen. Wir erkennen aber dennoch ohne Zweifel, dass das Bromnatrium ungefähr in der gleichen Spectralgegend wie Steinsalz ein anomales Verhalten zeigen muss. Die Intensität des Reflexionsmaximums ist aber bedeutend geringer als bei der Chlorverbindung, wie sich aus der Kleinheit der R_2-Werte in der Bromnatriumreihe ergiebt. Es sind in der Tab. VI keine Werte verzeichnet, die aus Beobachtungen über die Durchlässigkeit der Quarzplatte zu entnehmen wären, d. h. es fehlt eine Columne mit der Ueberschrift: „Quarz". Als nämlich aus solchen Beobachtungen die betreffenden Zahlen berechnet wurden, indem die durchgelassenen Intensitäten mit einem Reflexionsfactor von der gleichen Grösse wie früher corrigirt wurden, ergaben sich die R_1-Werte durchweg nur wenig verschieden von den zugehörigen R_2-Werten. Diese Thatsache findet ihre Erklärung durch den Umstand, dass der Quarz für jene langwelligen Wärmestrahlen wieder eine merkliche Durchlässigkeit besitzt. Aus diesem Grunde konnten jene Messungen nicht dazu benutzt werden, um eine Trennung der Strahlen verschiedener Spectralgebiete voneinander durchzuführen. Auch Flussspat beginnt bei diesen Wellen wieder durchlässig zu werden, jedoch in viel schwächerem Maasse, sodass die Zahlen der ersten Columne durch diesen Umstand nicht wesentlich beeinflusst sein können, zumal die Dicke der benutzten Flussspatplatte sechsmal so gross war als diejenige der Quarzplatte. Die für den Quarz selbst verzeichneten Reflexionen von 15 Proc. sind in guter Uebereinstimmung mit den Werten, die in der Gegend von 50—60 μ früher beobachtet wurden: dieselben betrugen für $\lambda = 51,2\,\mu$: 18 Proc. und für $\lambda = 61,1\,\mu$: 13 Proc.

Da die Intensität der selectiven Reflexion beim Bromnatrium sich nur als gering erwies und überdies die Politur der Platten beim Stehen an der Luft nicht lange erhalten blieb, so war es nicht möglich, eine exacte Wellenlängenmessung vorzunehmen. Ich musste mich daher darauf be-

schränken, zur Bekräftigung der obigen Schlussfolgerungen das Reflexionsvermögen des Bromnatriums für die Reststrahlen des Steinsalzes und des Sylvins zu bestimmen; dasselbe ergab sich für $\lambda = 51,2\ \mu$ zu 45 Proc. und für $\lambda = 61,1\ \mu$ zu 15 Proc.

Wir dürfen aus den vorliegenden Daten den Schluss ziehen, dass das Reflexionsmaximum des Bromnatriums ungefähr zwischen **50** und **55** μ liegt und dass der genaue Wert dieser Wellenlänge wahrscheinlich ein wenig grösser als derjenige ist, bei welchem früher das Reflexionsmaximum des Steinsalzes gefunden wurde.

Bromkalium.

§ 17. Das Bromkalium war wesentlich luftbeständiger als das Natriumsalz, sodass die Politur sich mehrere Tage lang tadellos erhielt. Boten aber schon die Versuche mit dem letzteren wegen der geringen Grösse der restirenden Intensitätsmengen ziemlich erhebliche Schwierigkeiten, so war dies in noch ungleich höherem Maasse beim Bromkalium der Fall. Nach dreimaliger Reflexion an dieser Substanz blieb nur eine äusserst schwache Strahlung zurück, von welcher durch

Quarz	Flussspat	Steinsalz
37 %	57 %	71 %

hindurchgelassen wurden. Es werden also offenbar die langen Wellen bei der Reflexion bevorzugt; die Intensitäten waren aber zu gering, um eingehendere Untersuchungen anstellen zu können. Ich kann daher nur die folgenden zuverlässigen Daten mittheilen: Das Reflexionsvermögen des Salzes betrug

für $\lambda = 24-32\ \mu$: 4 Proc.
„ $\lambda = 51,2\ \mu$: 4 „
„ $\lambda = 61,1\ \mu$: 24 „

Wir werden also auch hier auf analoge Verhältnisse geführt wie im vorigen Paragraphen: Bromkalium besitzt anomale Dispersion ungefähr in derselben Spectralregion, in welcher dieselbe für Chlorkalium beobachtet wurde. In Anbetracht der geringen Intensität der restirenden Strahlung sowie des Ganges der mitgetheilten Reflexionsgrössen scheint die Haupt-

wellenlänge noch etwas grösser zu sein als diejenige der Reststrahlen des Sylvins. Das Reflexionsmaximum des Bromkaliums befände sich demnach ungefähr zwischen **60** und **70** μ.

V. Schluss.

§ 18. In der folgenden Tab. VII gebe ich eine Zusammenstellung aller bisher im ultraroten Spectrum beobachteten anomalen Dispersionen.

Tabelle VII.

ubstanz	Chemische Formel	Wellenlängen der anomalen Dispersionsstreifen (μ)
rz	SiO_2	8,50 9,02 20,75
nmer	$K_2O, (H_2O)_2, (Al_2O_3)_3, (SiO_2)_6$	8,32 9,38 18,40 21,25
sspat	$CaFl_2$	24,0 31,6
mor (lkspat)	$CaCO_3$	6,69 11,41 29,4
s	$CaSO_4 + 2\,H_2O$	8,69 30—40
m	$AlK(SO_4)_2 + 12\,H_2O$	9,05 30—40
nsalz	NaCl	51,2
mnatrium	NaBr	50—55
rin	KCl	61,1
mkalium	KBr	60—

Weitgehende Schlussfolgerungen lassen sich aus diesem beschränkten Beobachtungsmaterial noch nicht herleiten; in qualitativer Hinsicht bemerken wir allerdings einige unverkennbare Gesetzmässigkeiten. Die Aehnlichkeit, welche die Anomalien des Glimmers mit denen des Quarzes besitzen, hatte schon die Herren Rubens und Nichols veranlasst, die Streifen des ersteren bei 8,32, 9,38 und 21,25 μ als Kennzeichen seines Kieselsäuregehaltes anzusprechen. Ob die nahe Uebereinstimmung der Anomalien von Gyps und Alaun bei 8,69 bez. 9,05 μ mit den ersten beiden Quarzstreifen auf Zufall beruht, muss vorläufig noch dahingestellt bleiben. Die chemische Zusammensetzung dieser drei Körper enthält als einzigen ge-

meinsamen Bestandteil nur Sauerstoff. Die drei calciumhaltigen Substanzen Flussspat, Marmor und Gyps zeigen sämtlich in der Nähe von 30 μ ein selectives Verhalten. Schliesslich giebt sich die Homologie der untersuchten Halogenverbindungen dadurch zu erkennen, dass die Natrium- und Kaliumsalze je in den gleichen Spectralregionen metallisch reflectiren.

Charlottenburg, Physik. Institut der Techn. Hochschule, Mai 1899.

(Eingegangen 15. November 1899.)

4. *Ueber irreversible Strahlungsvorgänge;* *von Max Planck.*

(Nach den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 4. Februar 1897, 8. Juli 1897, 16. December 1897, 7. Juli 1898, 18. Mai 1899 und nach einem auf der 71. Naturf.-Vers. in München gehaltenen Vortrage für die Annalen bearbeitet vom Verfasser.)

Die nachfolgende Arbeit enthält eine Darlegung der Hauptergebnisse meiner unter dem obigen Titel veröffentlichten Untersuchungen über die Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik für die Erscheinungen der Wärmestrahlung, vom Standpunkt der elektromagnetischen Lichttheorie betrachtet.

Dass auch die strahlende Wärme den Forderungen des zweiten Hauptsatzes Genüge leistet, dass z. B. die gegenseitige Zustrahlung verschieden temperirter Körper immer im Sinne einer Ausgleichung ihrer Temperaturen erfolgt, ist wohl allgemein unbestritten, und schon G. Kirchhoff hat hierauf seine Theorie des Emissions- und Absorptionsvermögens der Körper gegründet. Daher macht es die fortschreitende Erkenntnis der elektromagnetischen Natur der Wärmestrahlung zur dringenden Aufgabe, den zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie in seiner Anwendung auf die strahlende Wärme rein elektromagnetisch zu begreifen und womöglich auch zu beweisen. Erste Voraussetzung hierbei ist natürlich, dass man die Erscheinungen der Emission und Absorption strahlender Wärme als elektromagnetische Vorgänge auffasst, dass man also die Emission von Wärmestrahlen als bedingt ansieht durch die Aussendung elektromagnetischer Wellen von Seiten gewisser elementarer Oscillatoren, die man sich in irgend einem Zusammenhang mit den ponderablen Atomen der strahlenden Körper denken mag, und ferner, dass man die Absorption strahlender Wärme nicht etwa als Folge eines galvanischen Leitungswiderstandes oder irgend einer Art Reibung, sondern lediglich als Resonanzphänomen auffasst, indem die genannten Oscillatoren nicht nur Wellen aussenden, sondern auch durch auffallende Wellen zu Schwingungen angeregt werden. Hierin liegt zugleich in-

begriffen, dass die Dämpfung der elektrischen Schwingungen, die ein Oscillator ausführt, lediglich durch die Ausstrahlung elektromagnetischer Energie verursacht wird. Jede andere Art von Dämpfung würde nämlich locale (Joule'sche oder Reibungs-) Wärme erzeugen müssen, und durch die Annahme einer „Erwärmung der Atome“ würde keine Lösung der Aufgabe, sondern im Gegenteil eine ins Ungemessene gehende Vermehrung ihrer Schwierigkeit geschaffen.

Denken wir uns also in einem homogenen Isolator, etwa in einem Vacuum, das rings von festen spiegelnden Wänden umschlossen ist, eine Anzahl solcher schwingender elementarer Oscillatoren von bestimmten Eigenperioden befindlich, so werden dieselben durch ihre Schwingungen Wellen emittiren und dadurch Energie verausgaben, gleichzeitig aber auch wieder die auf sie fallenden Wellen durch Resonanz selectiv absorbiren und dadurch ihre Schwingungsenergie verstärken. Vom thermischen Standpunkt aus betrachtet muss für diesen, allen äusseren Einflüssen entzogenen Vorgang der zweite Hauptsatz gelten, d. h. die Veränderungen gehen in einem bestimmten Sinne vor sich, indem die Entropie des ganzen Systemes fortwährend wächst, und endigen schliesslich in einen stationären Zustand, den des Wärmegleichgewichtes, der durch das Maximum der Entropie bestimmt ist.

Gilt nun das nämliche auch dann, wenn man den Vorgang rein vom elektromagnetischen Standpunkt betrachtet? Existirt auch dann eine durch den augenblicklichen Zustand des Systemes bestimmte, etwa als elektromagnetische Entropie zu bezeichnende Grösse, welche im Laufe des Processes fortwährend wächst? Auf den ersten Blick muss diese Frage principiell verneint werden, und zwar aus folgendem Grunde. Die Veränderungen des betrachteten Systemes werden geregelt durch die elektromagnetischen (Maxwell'schen) Grundgleichungen und durch die Grenzbedingungen an den spiegelnden Wänden und an den oscillirenden Resonatoren, wobei jeglicher Reibungsvorgang oder galvanischer Leitungswiderstand ausgeschlossen ist. Daher lassen sowohl die Grundgleichungen als auch die Grenzbedingungen für jeden möglichen Vorgang auch den gerade umgekehrten zu; denn zu jeder Lösung des Gleichungssystemes kann man eine entsprechende entgegen-

gesetzte finden, indem man das Vorzeichen der Zeit und zugleich das der magnetischen Kraft umkehrt. Damit ist aber offenbar die vom Entropieprincip geforderte Einseitigkeit der Veränderungen keineswegs gewährleistet. Ja, es scheint auch gar keine Aussicht vorhanden, durch Einführung einer neuen, ausserhalb der Maxwell'schen Gleichungen stehenden Hypothese diejenige Beschränkung der zulässigen Lösungen einzuführen, welche zum zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie hinleitet. Denn die Maxwell'schen Gleichungen bestimmen bekanntlich bei gegebenem Anfangszustand und gegebenen Grenzbedingungen den Vorgang eindeutig und für alle Zeiten. Was also ausserdem noch hinzugefügt wird, wäre entweder falsch — dann nämlich, wenn es einen Widerspruch gegen die Maxwell'schen Gleichungen enthält —, oder es wäre überflüssig —, wenn es keinen derartigen Widerspruch enthält.

So einfach und bündig diese Ueberlegung erscheint, so hat sie dennoch eine Lücke. Es ist in der That nicht nur möglich, sondern sogar unumgänglich notwendig, neben den Maxwell'schen Gleichungen noch eine besondere Hypothese einzuführen, wenn man in dem vorliegenden Falle auf rein elektromagnetischem Wege überhaupt zu bestimmten Resultaten kommen will.

Zur besseren Anschaulichkeit exemplificire ich auf einen einfachen concreten Fall. Denken wir uns einen aus einem continuirlichen Spectrum herausgeschnittenen monochromatischen Licht- oder Wärmestrahl, etwa von der Farbe einer der D-Linien, von constanter Intensität, und durch ein Nicol'sches Prisma polarisirt, so wird, vom thermischen Standpunkt betrachtet, der Strahl vollständig definirt sein, wenn ausser seinen rein geometrischen Bestimmungsstücken die Polarisationsebene, die Farbe und die Intensität gegeben ist. Nun weiss man, dass es absolut scharfe Linien im Spectrum nicht giebt, d. h. dass auch der homogenste Strahl einen gewissen endlichen, wenn auch noch so geringen Bezirk im Spectrum einnimmt. Dieser Unbestimmtheit könnte etwa dadurch abgeholfen werden, dass man zu der Schwingungszahl, welche die Farbe charakterisirt, noch die Angabe der Breite des von dem Strahl eingenommenen Spectralbezirkes hinzufügt. Mit diesen Daten wird der Thermodynamiker zufrieden sein; er

wird, und zwar, wie die Erfahrung lehrt, mit Recht, erwarten, dass alle Wirkungen, die dieser Strahl unter gewissen gegebenen Umständen ausübt, vollkommen bestimmte sind.

Ganz anders wird man vom elektrodynamischen Standpunkt aus die Sache ansehen. Will man nämlich den Strahl als elektromagnetische Welle darstellen, indem man etwa die auf der Polarisationsebene des Strahles senkrecht stehende elektrische Kraft an einem bestimmten Ort als Function der Zeit bestimmt, so ergiebt sich für den monochromatischen Strahl, mag er auch noch so homogen sein, eine vielfach unendliche Zahl von Möglichkeiten. Denn nehmen wir an, der Spectralbezirk des Strahles umfasse auch nur den millionsten Teil des sichtbaren Spectrums, also ein Schwingungsintervall, das etwa durch das Verhältnis 1:1,000001 dargestellt wird, so bleibt für die Periode der betrachteten Welle noch die Auswahl unter allen zwischen 510 Billionen und 510000510000000 gelegenen Schwingungszahlen, d. h. unter 510 Millionen verschiedenen Schwingungszahlen übrig. Entwickelt man, was immer möglich ist, die elektrische Kraft als Function der Zeit für die Dauer einer Secunde in eine Fourier'sche Reihe, so wird im allgemeinen jede dieser 510 Millionen Schwingungszahlen in der betrachteten Welle vertreten sein, und da jeder einfach periodischen Partialschwingung eine andere Amplitude und eine andere Phase entsprechen kann, so haben wir im Ganzen noch zweimal 510 Millionen unbekannte Grössen, zu deren Bestimmung nur die beiden Grössen zur Verfügung sind, welche die Intensität und die Spectralbreite des Strahles angeben. Diese Grössen sind als gewisse Mittelwerte aufzufassen, aus denen man natürlich keine bestimmten Schlüsse auf die einzelnen Partialschwingungen der Fourier'schen Reihe ziehen kann. Eine Messung derselben ist schon aus dem Grunde undenkbar, weil die Partialschwingungen einzeln überhaupt gar keine unmittelbare physikalische Bedeutung haben; denn die Glieder der Reihe hängen von der Wahl der Grundperiode ab.

Andererseits darf man aber auch nicht glauben, dass die Werte der Amplituden und Phasen der einzelnen Partialschwingungen, wenn ihre Perioden so nahe beieinander liegen, überhaupt ohne merklichen Einfluss seien auf die vom ganzen

Strahl ausgehenden messbaren Wirkungen. Allerdings: wenn es sich nur um die Messung der Gesamtintensität des Strahles handelt, kommt nur die Summe der Einzelstrahlungen in Betracht. Aber gerade in dem vorliegenden Falle haben wir es mit der selectiven Absorption der Strahlung durch Resonatoren mit bestimmten Eigenperioden zu thun, und man weiss, dass, je kleiner das logarithmische Dämpfungsdecrement eines Resonators ist, um so kleinere Veränderungen der Schwingungsperiode der erregenden Welle dazu gehören, um recht beträchtliche Aenderungen der Resonanzwirkung nach sich zu ziehen. In der That würde es leicht sein, bei Festhaltung der Farbe, Spectralbreite und Intensität des Strahles die Verteilung der Amplituden und Phasen auf die einzelnen Partialschwingungen so vorzunehmen, dass die Resonanzwirkungen auf einen und denselben Resonator die allerverschiedensten und sonderbarsten Eigenschaften aufweisen würden.

Die angestellte Ueberlegung führt also zu dem unausweichlichen Schluss, dass bei gegebener Farbe, Spectralbreite und Intensität eines Strahles die Maxwell'schen Gleichungen keineswegs ausreichen, um alle messbaren Wirkungen des Strahles vorauszusagen, dass im Gegenteil die elektromagnetische Theorie in demselben Falle, wo die Thermodynamik ein ganz bestimmtes Resultat fordert, geradezu unendlich viele Möglichkeiten offen lässt, und dass man folglich vom Standpunkt der Elektrodynamik zunächst genötigt ist, die gestellte Aufgabe für unzureichend formulirt und daher für unlösbar zu erklären.

Will man sich also mit der Thermodynamik, und auch mit der Erfahrung, in Uebereinstimmung setzen, so ist das nur möglich auf Grund einer neuen, von den Maxwell'schen Gleichungen unabhängigen Hypothese. Eine derartige Hypothese ist enthalten in dem unten (§ 9) eingeführten Begriff der „natürlichen Strahlung“. Wenn gesagt wird, ein elektromagnetischer Strahl besitze die Eigenschaften der natürlichen Strahlung, so soll dies kurz gesagt heissen: Die Energie der Strahlung vertheilt sich vollkommen *unregelmässig* auf die einzelnen Partialschwingungen, aus denen der Strahl zusammengesetzt gedacht werden kann.

Diese durch ihre Einfachheit fast selbstverständlich scheinende Voraussetzung erweist sich dennoch bei weiterer Durch-

führung als sehr weittragend. Zunächst führt sie auf rein elektromagnetischem Wege mit Notwendigkeit zur Gültigkeit eines dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik analogen Satzes. Wenn man, um wieder zu dem am Anfang betrachteten System von Resonatoren zurückzukehren, die Annahme macht, dass sämtliche im System vorkommende Strahlen zu allen Zeiten die Eigenschaften der natürlichen Strahlung besitzen, so lässt sich eine elektromagnetische Function des Zustandes angeben, welche fortwährend wächst, und deren Maximum mithin einen stationären Zustand angiebt. Man kann daher auch sagen: Die Hypothese der natürlichen Strahlung, für alle Orte und Zeiten als gültig vorausgesetzt, enthält in nuce den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik in seiner Anwendung auf Strahlungsvorgänge, sie ist nur ein anderer Ausdruck für denselben. Ihr Vorteil besteht aber darin, dass man die Grösse der Strahlungsentropie in allen Einzelheiten, und damit auch den Betrag ihrer Aenderung in einer bestimmten Zeit angeben kann, während der zweite Hauptsatz in seiner gewöhnlichen Fassung den Begriff der Zeit überhaupt nicht enthält. Durch Identificirung der elektromagnetischen Entropie mit der thermodynamischen Entropie ergiebt sich ohne weiteres die elektromagnetische Definition der Temperatur eines Wärmestrahles, und das Maximum der Entropie ergiebt das Wärmegleichgewicht, d. h. den Zustand der stationären Wärmestrahlung. Das Gesetz der spectralen Energieverteilung in diesem Zustande erweist sich als identisch mit dem von W. Wien auf anderem Wege abgeleiteten Gesetz, das bekanntlich in neuerer Zeit durch die Untersuchungen von F. Paschen, sowie von O. Lummer und E. Pringsheim experimentell in gewisser Annäherung bestätigt worden ist. —

Die hier unternommene elektrodynamische Deutung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik legt es nahe, einen kurzen vergleichenden Blick auch auf dessen *mechanische* Deutung, namentlich auf die entsprechenden Fragen in der kinetischen Gastheorie, zu werfen. Auch hier finden wir bekanntlich denselben, oft besprochenen Gegensatz zwischen den Grundgleichungen der Mechanik, welche einen vollkommen reversibeln Charakter haben, und dem Inhalt des zweiten Hauptsatzes, welcher für alle wirklichen Vorgänge Irrever-

sibilität fordert. Aber auch hier lässt sich der Gegensatz in ganz ähnlicher Weise lösen durch die Einführung einer besonderen Hypothese, welche, solange sie in Gültigkeit bleibt, alle Consequenzen des zweiten Hauptsatzes in sich birgt. Es ist dies in der Ausdrucksweise von L. Boltzmann[1]) die Hypothese der „molecularen Unordnung“. Sie ist notwendig und hinreichend für die Existenz einer durch den augenblicklichen Zustand bestimmten Function, welche sich fortwährend in dem nämlichen Sinne ändert und daher die wesentlichen Eigenschaften der Entropie besitzt. Allerdings erweist sich die Hypothese der molecularen Unordnung, falls man sie nicht nur für den Anfangszustand, sondern für alle Zeiten gültig annimmt, als unvereinbar mit der Voraussetzung einer endlichen Anzahl von einfachen, innerhalb starrer Wände eingeschlossenen Atomen, und dieser Umstand bereitet der Einführung des zweiten Hauptsatzes als eines allgemeinen Principes in die Gastheorie eine gewisse Schwierigkeit, welche auf der einen Seite zu Einwänden gegen die Berechtigung der Gastheorie überhaupt, auf der anderen dagegen zu Zweifeln an der Allgemeingültigkeit des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie geführt hat. Indessen handelt es sich hier in Wirklichkeit gar nicht um eine derartige Alternative. Wenn man von den eben genannten Voraussetzungen nur eine, etwa die Annahme starrer Wände, deren Existenz im strengen Sinne ohnehin von vornherein höchst unwahrscheinlich ist, fallen lässt, so scheint einer allgemeinen Durchführung der Hypothese der molecularen Unordnung nichts im Wege zu stehen, und damit bleibt auch vom Standpunkt der kinetischen Gastheorie aus die Möglichkeit gesichert, den zweiten Hauptsatz auf alle Zeiten auszudehnen.

Für die Hypothese der natürlichen Strahlung, angewendet auf den Fall eines zwischen spiegelnden Wänden befindlichen strahlenden Systemes, und die Frage ihrer unbeschränkten Gültigkeit würde sich übrigens wahrscheinlich eine ganz ähnliche Schwierigkeit wie die soeben geschilderte ergeben, falls man auf die Natur der als Strahlungscentren fungirenden elementaren Oscillatoren näher eingehen wollte. Das ist aber

---

1) L. Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie 1. p. 21. 1895.

bei der hier entwickelten Theorie gar nicht nötig, weil hier von vornherein die Voraussetzung eingeführt wird, dass die Wellenlänge der Eigenschwingung eines Oscillators gross ist gegen seine linearen Dimensionen; und unter dieser Voraussetzung lassen sich die Gesetze der Emission und Absorption ganz ohne Rücksicht auf die specielle Beschaffenheit des Resonators entwickeln. Es kann auch z. B. ganz dahingestellt bleiben, ob die Schwingungen der elementaren Resonatoren auf Leitungsströmen (selbstverständlich ohne galvanischen Widerstand) oder auf Convectionsströmen (Bewegungen elektrisch geladener Teilchen) beruhen. Sobald man aber diese Frage offen lässt, ist auch kein Anhaltspunkt vorhanden, um den Gültigkeitsbereich der Hypothese der natürlichen Strahlung zeitlich irgendwie einzuschränken, und damit verlieren auch die Bedenken gegen eine beständige Zunahme der Entropie ihre Stütze.[1])

Erster Abschnitt.

Emission und Absorption elektromagnetischer Strahlung durch einen Resonator.

§ 1. Schwingungen eines geradlinigen Resonators.

In einem von beliebigen elektromagnetischen Wellen durchzogenen Vacuum befinde sich ein geradliniger elektrischer Resonator, dessen Eigenperiode einer im Verhältnis zu seinen Lineardimensionen grossen Wellenlänge entspricht und dessen Schwingungen nur durch Ausstrahlung von Energie in den umgebenden Raum, nicht durch galvanischen Leitungswiderstand oder andere in seinem Innern wirksame, Energie consumirende Vorgänge gedämpft werden. Bezeichnet dann $f(t)$ das Moment des vom Resonator zur Zeit t dargestellten elektrischen Dipols, $Z(t)$ die in die Richtung des Resonators fallende Componente der Intensität des elektrischen Feldes, welches von den im Vacuum sich fortpflanzenden Wellen am Orte des Resonators

1) Die folgende Darstellung bildet, mit einigen Abänderungen und Zusätzen, eine Wiedergabe meiner letzten, das Wesentliche der Theorie zusammenfassenden Mittheilung an die Berliner Akademie der Wissenschaften (vom 18. Mai 1899).

gebildet wird, beides gemessen im absoluten elektrostatischen Maass, so ist die Schwingung des Resonators bestimmt durch seinen Anfangszustand (für $t = 0$) und durch die folgende Differentialgleichung[1]):

$$(1) \qquad \frac{d^2 f}{d t^2} + 2 \sigma \nu_0 \frac{d f}{d t} + 4 \pi^2 \nu_0^2 f = \frac{3 c^3 \sigma}{4 \pi^2 \nu_0} Z.$$

c bedeutet hierbei die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum, σ das logarithmische Decrement der Schwingungsamplituden, das nach den gemachten Voraussetzungen notwendig klein ist, ν_0 die Schwingungszahl des Resonators (Anzahl der Schwingungen in der Zeiteinheit).

Die Energie U_0 des Resonators ist bestimmt durch die Gleichung:

$$(2) \qquad U_0 = \tfrac{1}{2} K f^2 + \tfrac{1}{2} L \left(\frac{d f}{d t}\right)^2,$$

wobei die Constanten[2]):

$$(3) \qquad K = \frac{16 \pi^4 \nu_0^3}{3 c^3 \sigma}, \qquad L = \frac{4 \pi^2 \nu_0}{3 c^3 \sigma}.$$

Mit der Einführung von U_0 lässt sich die Schwingungsgleichung (1) in folgender Form schreiben:

$$(4) \qquad d U_0 = Z \cdot \frac{d f}{d t} d t - \frac{8 \pi^2 \nu_0^2}{3 c^3} \left(\frac{d f}{d t}\right)^2 d t.$$

Das erste Glied rechts bezeichnet die in der Zeit dt vom Resonator aus der Umgebung absorbirte Energie, das zweite Glied die in derselben Zeit vom Resonator nach aussen emittirte Energie. Während diese letztere ein constantes Vorzeichen hat, wird, wie man sieht, die absorbirte Energie unter Umständen negativ, nämlich immer dann, wenn die „erregende Schwingung“, als welche wir Z kurz bezeichnen wollen, entgegengesetzt gerichtet ist dem im Resonator fliessenden elektrischen Strome, dessen Intensität das Vorzeichen von df/dt besitzt. In diesem Falle wird also durch die „erregende Schwingung“ dem Resonator Energie entzogen.

---

1) M. Planck, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 165. 1896; Wied. Ann. 60. p. 593. 1897.

2) l. c.

§ 2. Darstellung der erregenden Schwingung durch ein Fourier'sches Integral.

In jedem Falle lässt sich Z für ein beliebig grosses endliches Zeitintervall, etwa von $t = 0$ bis $t = T$, folgendermaassen schreiben:

$$Z = \int_0^\infty d\nu \cdot C_\nu \cos(2\pi\nu t - \vartheta_\nu), \tag{5}$$

wobei C_ν (positiv) und ϑ_ν gewisse Functionen der positiven Integrationsvariabeln ν bedeuten[1]), deren Werte übrigens durch das Verhalten der Grösse Z in dem genannten Zeitintervall bekanntlich noch nicht bestimmt sind, sondern ausserdem noch von der Art abhängen, wie die Zeitfunction Z über jenes Intervall hinaus nach beiden Seiten fortgesetzt wird. Es wäre daher auch ganz unrichtig, wenn man die Schwingung Z sich etwa als ein continuirliches „Spectrum" von periodischen Schwingungen mit den constanten Amplituden C_ν vorstellen würde.

Wir wollen T so gross wählen, dass nicht nur $\nu_0 T$, sondern auch $\sigma\nu_0 T$ durch eine grosse Zahl ausgedrückt wird, und wollen im Folgenden immer nur solche zwischen 0 und T gelegene Zeiten t betrachten, für welche $\sigma\nu_0 t$, und um so mehr $\nu_0 t$, grosse Werte hat. Diese Festsetzung gewährt nämlich den Vorteil, dass wir dann von dem Anfangszustand des Resonators (für $t = 0$) ganz absehen können, weil derselbe sich zur Zeit t nur mit einem Gliede von der Grössenordnung $e^{-\sigma\nu_0 t}$ geltend macht und daher dann keinen merklichen Einfluss auf den Zustand mehr ausübt.

§ 3. Berechnung der Resonatorschwingung.

Unter den gemachten Voraussetzungen ergiebt sich für irgend eine erregende Schwingung (5) als allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung (1), wie leicht zu verificiren:

---

1) Die Einführung der „Frequenz" $n = 2\pi\nu$ statt der Schwingungszahl ν würde in diesem Abschnitt zu einer Vereinfachung, in den folgenden dagegen zu einer Complicirung der Ausdrücke führen. Statt der Darstellung durch ein Integral könnte man übrigens ebenso gut Z in eine Fourier'sche Reihe, etwa mit der Grundperiode T, entwickeln; der Unterschied ist, soweit ich sehe, nur ein formeller. Auf die Vorzüge des Integrals hat mich mein Freund Carl Runge hingewiesen.

$$f(t) = \frac{3\,c^3}{16\,\pi^3\,\nu_0^2} \int d\nu \cdot \frac{C_\nu}{\nu} \cdot \sin\gamma_\nu \cdot \cos(2\,\pi\,\nu\,t - \vartheta_\nu - \gamma_\nu),$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\operatorname{ctg}\gamma_\nu = \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{\sigma\,\nu_0\,\nu} \cdot \pi.$$

Um γ_ν eindeutig zu machen, wollen wir noch festsetzen, dass γ_ν von 0 bis π wächst, wenn ν/ν_0 von kleinen zu grossen Werten übergeht.

Da σ klein ist, so weicht $\sin\gamma_\nu$ nur dann merklich von Null ab, wenn ν/ν_0 nahezu $= 1$, d. h. es tragen nur diejenigen Glieder des Fourier'schen Integrals (5) merklich zur Resonanzerregung bei, deren Index ν der Eigenschwingung ν_0 des Resonators nahe liegt. Man kann daher für gewöhnlich einfacher schreiben:

$$(6)\quad \begin{cases} f(t) = \dfrac{3\,c^3}{16\,\pi^3\,\nu_0^3} \displaystyle\int d\nu\, C_\nu \sin\gamma_\nu \cos(2\pi\,\nu\,t - \vartheta_\nu - \gamma_\nu) \\ \text{und:} \\ \operatorname{ctg}\gamma_\nu = 2\,\pi \cdot \dfrac{\nu_0 - \nu}{\sigma\,\nu_0}. \end{cases}$$

§ 4. Intensität der erregenden Schwingung.

Die „Intensität der erregenden Schwingung" J als Function der Zeit t definiren wir als den Mittelwert von Z^2 in dem Zeitintervall von t bis $t + \tau$, wobei τ möglichst klein genommen ist gegen die Zeit T, aber immer noch gross gegen die Zeit $1/\nu_0$, d. h. gegen die Zeitdauer einer Schwingung des Resonators. In dieser Festsetzung liegt eine gewisse Unbestimmtheit, welche bewirkt, dass im allgemeinen J nicht nur von t, sondern auch von τ abhängig bleiben wird. Wenn dies der Fall ist, kann man von einer Intensität der erregenden Schwingung überhaupt nicht reden; denn es gehört mit zum Begriff der Schwingungsintensität, dass ihr Betrag sich innerhalb der Zeitdauer einer einzelnen Schwingung nur unmerklich ändert. Daher wollen wir künftig nur solche Vorgänge in Betracht ziehen, bei denen unter den angegebenen Bedingungen ein nur von t abhängiger Mittelwert von Z^2 existirt. Die später (§ 9) vorzunehmende weitere Beschränkung auf den Fall der „natürlichen Strahlung" wird zugleich auch die Erfüllung

der hier als nothwendig erkannten Bedingung enthalten. Um ihr in mathematischer Hinsicht zu genügen, wollen wir zunächst annehmen, dass die Grössen C_ν in (5) für alle diejenigen Werte von ν unmerklich klein sind, welche gegen ν_0 verschwinden, oder, anders ausgedrückt, dass in der erregenden Schwingung Z keine ganz langsamen Perioden von merklicher Amplitude enthalten sind.

Zur Berechnung von J bilden wir nun aus (5) den Wert von Z^2 und bestimmen den Mittelwert $\overline{Z^2}$ dieser Grösse durch Integration nach t von t bis $t + \tau$, Division durch τ und Uebergang zur Grenze durch gehörige Verkleinerung von τ. Es ergiebt sich so zunächst:

$$Z^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty d\nu'\, d\nu\, C_{\nu'}\, C_\nu \cos(2\pi\nu' t - \vartheta_{\nu'}) \cos(2\pi\nu t - \vartheta_\nu).$$

Vertauscht man die Werte von ν und ν', so ändert sich die Function unter dem Integralzeichen nicht; daher setzen wir fest:

$$\nu' > \nu$$

und schreiben:

$$Z^2 = 2\iint d\nu'\, d\nu\, C_{\nu'}\, C_\nu \cos(2\pi\nu' t - \vartheta_{\nu'}) \cos(2\pi\nu t - \vartheta_\nu)$$

oder:

$$Z^2 = \iint d\nu'\, d\nu\, C_{\nu'}\, C_\nu \{\cos[2\pi(\nu' - \nu)t - \vartheta_{\nu'} + \vartheta_\nu]$$
$$+ \cos[2\pi(\nu' + \nu)t - \vartheta_{\nu'} - \vartheta_\nu]\}.$$

Folglich:

$$J = \overline{Z^2} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} Z^2\, dt$$

$$= \iint d\nu'\, d\nu\, C_{\nu'}\, C_\nu \left\{\frac{\sin\pi(\nu' - \nu)\tau \,.\, \cos[\pi(\nu' - \nu)(2t + \tau) - \vartheta_{\nu'} + \vartheta_\nu]}{\pi(\nu' - \nu)\tau}\right.$$
$$\left. + \frac{\sin\pi(\nu' + \nu)\tau \,.\, \cos[\pi(\nu' + \nu)(2t + \tau) - \vartheta_{\nu'} - \vartheta_\nu]}{\pi(\nu' + \nu)\tau}\right\}.$$

Da nach der oben gemachten Voraussetzung alle diejenigen C_ν unmerklich klein sind, für welche ν gegen ν_0 verschwindet, so kann man in dem vorstehenden Ausdruck ν, und umsomehr ν', als von gleicher oder höherer Grössenordnung wie ν_0 annehmen. Lassen wir nun τ immer kleiner werden, so ist vermöge der Bedingung, dass $\nu_0\tau$ gross bleibt,

der Nenner $(\nu' + \nu)\tau$ des zweiten Bruches jedenfalls gross, während der des ersten Bruches, $(\nu' - \nu)\tau$, mit abnehmendem τ unter jeden endlichen Betrag herabsinken kann. Daher reducirt sich das Integral für genügend kleine Werte von $\nu' - \nu$ auf:

$$\iint d\nu' \, d\nu \, C_{\nu'} \, C_\nu \cos [2 \pi (\nu' - \nu) t - \vartheta_{\nu'} + \vartheta_\nu],$$

also unabhängig von τ. Die übrigen Glieder des Doppelintegrals, welche grösseren Werten von $\nu' - \nu$, d. h. schnelleren Aenderungen mit der Zeit entsprechen, hängen im allgemeinen von τ ab und müssen daher verschwinden, wenn die Intensität J nicht von τ abhängen soll. Daher ist in unserem Falle, wenn man noch

$$\mu = \nu' - \nu (> 0)$$

als zweite Integrationsvariable statt ν' einführt:

$$J = \iint d\mu \, d\nu \, C_{\nu+\mu} C_\nu \cos (2 \pi \mu t - \vartheta_{\nu+\mu} + \vartheta_\nu) \tag{7}$$

oder:

$$\left\{ \begin{aligned} J &= \int d\mu \, (A_\mu \sin 2 \pi \mu t + B_\mu \cos 2 \pi \mu t), \\ &\text{wobei:} \\ A_\mu &= \int d\nu \, C_{\nu+\mu} \, C_\nu \sin (\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu) \\ B_\mu &= \int d\nu \, C_{\nu+\mu} \, C_\nu \cos (\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu). \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Hierdurch ist die Intensität J der erregenden Schwingung, falls sie überhaupt existirt, in der Form eines Fourier'schen Integrals dargestellt.

§ 5. Schnell veränderliche und langsam veränderliche Grössen.

Schon in dem Begriff der Schwingungsintensität J liegt die Voraussetzung enthalten, dass diese Grösse mit der Zeit t viel langsamer variirt als die Schwingungsamplitude Z selber. Dasselbe folgt aus der Berechnung von J im vorigen Paragraphen. Denn dort ist für alle in Betracht kommenden Wertenpaare von C_ν und $C_{\nu'}$ $\nu \tau$ und $\nu' \tau$ gross, dagegen $(\nu' - \nu)\tau$ klein; folglich a fortiori

$$\frac{\nu' - \nu}{\nu} = \frac{\mu}{\nu} \text{ klein,} \tag{9}$$

und demgemäss sind die Fourier'schen Integrale (5) und (8) in ganz verschiedener Weise mit der Zeit veränderlich. Wir werden daher im Folgenden in Bezug auf die Abhängigkeit von der Zeit zwei verschiedenartig veränderliche Arten von Grössen zu unterscheiden haben: schnell veränderliche Grössen, wie Z und das mit Z durch die Differentialgleichung (1) verbundene f, und langsam veränderliche Grössen, wie J und ebenso auch U_0, die Energie des Resonators, welche sich wegen der geringen Dämpfung ebenfalls nur langsam im Verhältnis gegen f ändert.[1] Doch ist dieser Unterschied in der zeitlichen Veränderlichkeit der genannten Grössen nur ein relativer, da der absolute Wert des Differentialquotienten von J nach der Zeit von der Grösse der Zeiteinheit abhängt und durch geeignete Wahl derselben beliebig gross gemacht werden kann. Man ist daher nicht berechtigt, $J(t)$ oder $U_0(t)$ schlechthin als langsam veränderliche Functionen von t zu bezeichnen. Wenn wir diese Ausdrucksweise der Kürze halber in der Folge dennoch anwenden, so geschieht das stets im relativen Sinne, nämlich mit Bezug auf das abweichende Verhalten der Functionen $Z(t)$ oder $f(t)$.

Was nun aber die Abhängigkeit der Phasenconstante ϑ_ν von ihrem Index ν anbetrifft, so besitzt diese notwendig die Eigenschaft der schnellen Veränderlichkeit im *absoluten* Sinne. Denn obwohl μ klein ist gegen ν, ist doch die Differenz $\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu$ im allgemeinen nicht klein, weil sonst die Grössen A_μ und B_μ in (8) zu specielle Werte erhalten würden, und daraus folgt, dass $(\partial \vartheta_\nu / \partial \nu) . \nu$ durch eine grosse Zahl dargestellt wird. Hieran ändert auch ein Wechsel der Zeiteinheit oder eine Verlegung des Anfangspunktes der Zeit nichts wesentliches.

Die schnelle Veränderlichkeit der Grössen ϑ_ν mit ν ist also eine im absoluten Sinne notwendige Bedingung für die Existenz einer bestimmten Schwingungsintensität J, oder mit anderen Worten: für die Möglichkeit der Einteilung der von der Zeit abhängigen Grössen in schnell veränderliche und in langsam veränderliche — einer Einteilung, die auch in anderen physikalischen Theorien häufig gemacht wird und auf welche sich alle folgenden Untersuchungen gründen.

---

1) In der Akustik und Optik pflegt man bekanntlich diesen Unterschied durch die Worte „Schwingung" und „Schwebung" anzudeuten.

§ 6. Berechnung der Energie des Resonators.

Die im vorstehenden eingeführte Unterscheidung zwischen schnell veränderlichen und langsam veränderlichen Grössen ist in physikalischer Beziehung hier deshalb wichtig, weil wir im Folgenden nur die langsame Abhängigkeit von der Zeit als direct messbar annehmen wollen. Damit nähern wir uns eben den in der Optik und in der Wärmestrahlung thatsächlich stattfindenden Verhältnissen. Unsere Aufgabe wird dann darin bestehen, Beziehungen ausschliesslich zwischen langsam veränderlichen Grössen aufzustellen; denn diese allein sind es, welche mit den Ergebnissen der Erfahrung verglichen werden können. Wir bestimmen daher nun zunächst die Werte der wichtigsten hier in Betracht kommenden langsam veränderlichen Grössen, nämlich die Energie des Resonators und den Betrag der vom Resonator emittirten und absorbirten Energie.

Die Energie des Resonators, die in (2) gegeben ist, besteht aus zwei Teilen: der elektrischen Energie und der magnetischen Energie. Da wegen der kleinen Dämpfung der Mittelwert dieser beiden Energiearten jedenfalls der nämliche ist, d. h.

$$K\overline{f^2} = L\overline{\left(\frac{df}{dt}\right)^2}, \tag{10}$$

so können wir auch schreiben:

$$U_0 = K\overline{f^2}, \tag{11}$$

indem wir mit $\overline{f^2}$ den Mittelwert von f^2 in dem Zeitintervall von t bis $t + \tau$ (§ 4) bezeichnen. Dieser Mittelwert berechnet sich nach (6) genau in der nämlichen Weise wie der von $\overline{Z^2}$ in § 4, nur dass hier $(3\,c^3/16\,\pi^3\nu_0^3)\,C_\nu \sin\gamma_\nu$ statt C_ν, und $\vartheta_\nu + \gamma_\nu$ statt ϑ_ν zu setzen ist. Wir erhalten daher analog (7), mit Rücksicht auf den Wert von K in (3):

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} U_0 = \frac{3\,c^3}{16\,\pi^3\sigma\nu_0^3}\iint d\mu\, d\nu\, C_{\nu+\mu}\, C_\nu \sin\gamma_{\nu+\mu} \sin\gamma_\nu \times \\ \cos(2\,\pi\,\mu\,t - \vartheta_{\nu+\mu} + \vartheta_\nu - \gamma_{\nu+\mu} + \gamma_\nu). \end{aligned} \right.$$

Oder

$$
(13)\quad \left\{
\begin{aligned}
& U_0 = \int d\mu\, (a_\mu \sin 2\pi\mu t + b_\mu \cos 2\pi\mu t), \\
& \text{wobei:} \\
& a_\mu = \frac{3 c^3}{16 \pi^2 \sigma \nu_0^3} \int d\nu\, C_{\nu+\mu} C_\nu \sin\gamma_{\nu+\mu} \sin\gamma_\nu \times \\
& \qquad \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu + \gamma_{\nu+\mu} - \gamma_\nu), \\
& b_\mu = \frac{3 c^3}{16 \pi^2 \sigma \nu_0^3} \int d\nu\, C_{\nu+\mu} C_\nu \sin\gamma_{\nu+\mu} \sin\gamma_\nu \times \\
& \qquad \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu + \gamma_{\nu+\mu} - \gamma_\nu).
\end{aligned}
\right.
$$

Ebenso wie ϑ_ν so ist auch γ_ν, wie man aus (6) erkennt, im absoluten Sinne schnell veränderlich mit ν. Man darf daher, obwohl für alle in Betracht kommenden Werte der C μ klein ist gegen ν, den Winkel $\gamma_{\nu+\mu}$ nicht etwa annähernd gleich γ_ν setzen, nämlich dann nicht, wenn μ von gleicher oder sogar höherer Grössenordnung ist wie $\sigma\nu_0$.

§ 7. Berechnung der vom Resonator emittirten und absorbirten Energie.

Der Betrag der vom Resonator in der Zeit dt emittirten Energie, als einer „langsam veränderlichen“ Grösse, ergiebt sich direct aus der Gleichung (4) als:

$$\frac{8\pi^2\nu_0^2}{3c^3}\overline{\left(\frac{df}{dt}\right)^2}dt$$

oder nach (10), (11) und (3):

$$= \frac{8\pi^2\nu_0^2}{3c^3}\cdot\frac{K}{L}\cdot\overline{f^2}\,dt$$

$$= \frac{8\pi^2\nu_0^2}{3c^3}\cdot\frac{1}{L}\cdot U_0\cdot dt$$

$$(14)\qquad = 2\sigma\nu_0\, U_0\, dt.$$

Die in einem Zeitelement vom Resonator emittirte Energie ist proportional der Energie des Resonators, ferner seiner Schwingungszahl und seinem logarithmischen Decrement.

Der Betrag der vom Resonator absorbirten Energie, als einer „langsam veränderlichen“ Grösse, lässt sich aus (4) entweder berechnen durch die Bildung des Mittelwertes von $Z.(df/dt)$ mit Hülfe der bekannten Ausdrücke für Z und f, oder kürzer direct aus der soeben gefundenen Form jener Gleichung:

$$(15)\qquad \overline{Z.\frac{df}{dt}}\,dt = dU_0 + 2\sigma\nu_0\, U_0\, dt.$$

Setzt man für U_0 den in (13) gegebenen Wert, so ergiebt sich für *die in der Zeit dt vom Resonator absorbirte Energie* der Wert:

$$(16)\quad \begin{cases} dt \cdot \int d\mu\,(a'_\mu \sin 2\pi\mu t + b'_\mu \cos 2\pi\mu t), \\ \text{wobei:} \quad a'_\mu = 2\sigma\nu_0 a_\mu - 2\pi\mu b_\mu \\ \qquad\qquad b'_\mu = 2\sigma\nu_0 b_\mu + 2\pi\mu a_\mu. \end{cases}$$

Diese Grössen wollen wir nun mit der Intensität der erregenden Schwingung in eine allgemeine Beziehung bringen, wobei immer festzuhalten ist, dass das Verhältnis $\mu : \sigma\nu_0$ beliebig grosse und kleine Werte annehmen kann.

§ 8. Spectrale Zerlegung der Intensität der erregenden Schwingung.

Von den bisher in unseren Gleichungen auftretenden Energiegrössen dürfen wir als direct messbar ansehen nur die Intensität J der erregenden Schwingung und die Energie U_0 des Resonators. Dieselben stehen aber im allgemeinen in keinem einfachen Zusammenhang miteinander, da die Energie des Resonators nicht allein von der Gesamtintensität J der erregenden Schwingung Z, sondern noch von specielleren Eigentümlichkeiten dieser Schwingung abhängt. Man kann nun offenbar die Eigenschaften einer bestimmten erregenden Schwingung Z dadurch weiter verfolgen, dass man die zu untersuchende Schwingung Z auf verschiedene Resonatoren wirken lässt und die Energie misst, welche ein jeder Resonator einzeln unter dem Einfluss derselben erregenden Schwingung Z annimmt. Es ist dies ganz die nämliche Methode, welche in der Akustik zur Analyse eines Klanges angewendet wird.

Hierauf gründen wir unsere Definition der in der Gesamtintensität J enthaltenen *Intensität $\mathfrak{J}_\nu$ einer bestimmten Schwingungszahl ν.* Wir setzen nämlich:

$$(17)\qquad J = \int_0^\infty \mathfrak{J}_\nu \, d\nu$$

und definiren $\mathfrak{J}_\nu$, eine „langsam veränderliche“ Function der beiden Variabeln ν und t, durch die Energie, welche ein Resonator mit der Schwingungszahl ν unter dem Einfluss der erregenden Schwingung Z annimmt.

Hier ist aber sogleich noch ein wichtiger Punkt zu erledigen. Da nämlich die Energie eines von der Schwingung Z erregten Resonators nicht allein von seiner Eigenschwingung, sondern ausserdem auch von seiner Dämpfung abhängt, so ist noch auf eine geeignete Wahl der Dämpfungsconstanten des zur Messung der Intensität $\mathfrak{J}_\nu$ benutzten Resonators Rücksicht zu nehmen. Damit der Resonator auf eine bestimmte Schwingungszahl und nicht etwa auf ein endliches Intervall von Schwingungszahlen merklich reagirt, muss sein Dämpfungsdecrement klein sein. Es darf aber auch andererseits nicht allzu klein genommen werden; denn ein Resonator mit sehr kleiner Dämpfung braucht sehr lange Zeit zum Abklingen, und ein solcher Resonator würde den Zweck, durch sein Mitschwingen jederzeit eine *gleichzeitige* Eigenschaft der ihn erregenden, im allgemeinen mit der Zeit veränderlichen Schwingung anzugeben, nicht erfüllen, da seine Energie nicht von der gleichzeitigen Beschaffenheit, sondern zugleich auch von der Vorgeschichte der erregenden Schwingung abhängen würde. Die Energie des Resonators würde also nicht die Intensität $\mathfrak{J}_\nu$ selber, sondern einen gewissen, über einen grösseren Zeitraum erstreckten Mittelwert dieser Grösse zum Ausdruck bringen.

Um diesen Umstand zu berücksichtigen, wählen wir das logarithmische Decrement ϱ aller zur Analyse der erregenden Schwingung Z benutzten Resonatoren zwar klein gegen 1, machen aber doch $\varrho\,\nu$ gross gegen alle μ, was stets möglich ist, da nach (9) μ klein ist gegen ν. Dann ist der Zustand eines analysirenden Resonators, z. B. desjenigen mit der Schwingungszahl ν_0, vollständig bestimmt durch die gleichzeitige Beschaffenheit der erregenden Schwingung, und man kann sagen, dass der Resonator alle Intensitätsschwankungen der erregenden Schwingung momentan anzeigt. In der That ersieht man z. B. leicht aus (16), wenn man darin ϱ statt σ setzt, dass die Glieder mit dem Factor μ gegen die Glieder mit dem Factor $\varrho\,\nu_0$ verschwinden und dass dadurch die vom Resonator absorbirte Energie proportional wird seiner augenblicklichen Energie U_0, was nur dann möglich ist, wenn der Zustand des Resonators nur von der gleichzeitigen Beschaffenheit der erregenden Schwingung abhängt.

Unter den gemachten Voraussetzungen ist die in der Ge-

samtintensität J der erregenden Schwingung enthaltene Intensität der Schwingungszahl ν_0, die wir kurz mit $\mathfrak{J}_0$ bezeichnen wollen, nach (12) als Function der Zeit gegeben durch:

$$\mathfrak{J}_0 = \varkappa_0 \cdot \frac{3\,c^3}{16\,\pi^2\,\varrho\,\nu_0^3} \iint d\,\mu\,d\,\nu\,C_{\nu+\mu}\,C_\nu \sin^2\delta_\nu \times$$
$$\cos(2\,\pi\,\mu\,t - \vartheta_{\nu+\mu} + \vartheta_\nu).$$

Hier ist $\varkappa_0$ ein von ν_0 abhängiger, sogleich zu bestimmender Proportionalitätsfactor; der Winkel δ_ν geht aus γ_ν in § 3 hervor, wenn man darin ϱ statt σ setzt, also:

$$\operatorname{ctg}\delta_\nu = \pi \cdot \frac{\nu_0^2 - \nu^2}{\varrho\,\nu_0\,\nu}, \tag{18}$$

und $\delta_{\nu+\mu}$ ist $= \delta_\nu$ gesetzt, da μ klein ist gegen $\varrho\,\nu_0$. Der Proportionalitätsfactor $\varkappa_0$ bestimmt sich aus der Bedingung (17). Schreibt man nämlich diese Bedingung nach (7) in der Form:

$$\iint d\,\mu\,d\,\nu\,C_{\nu+\mu}\,C_\nu \cos(2\,\pi\,\mu\,t - \vartheta_{\nu+\mu} + \vartheta_\nu) = \int_0^\infty \mathfrak{J}_0\,d\,\nu_0,$$

so folgt aus dem soeben für $\mathfrak{J}_0$ gefundenen Ausdruck, da μ und ν nicht von ν_0 abhängen:

$$1 = \int_0^\infty d\,\nu_0 \cdot \frac{3\,c^3\,\varkappa_0}{16\,\pi^2\,\varrho\,\nu_0^3} \cdot \sin^2\delta_\nu,$$

oder nach (18):

$$\frac{16\,\pi^2}{3c^3} = \int_0^\infty d\,\nu_0 \cdot \frac{\varkappa_0}{\varrho\,\nu_0^3} \cdot \frac{1}{1 + \pi^2 \cdot \dfrac{(\nu_0^2 - \nu^2)^2}{\varrho^2\,\nu_0^2\,\nu^2}}.$$

Da nun ϱ klein ist gegen 1, so braucht man nur diejenigen Werte der Function unter dem Integralzeichen zu berücksichtigen, für welche ν_0 nahe $= \nu$ ist, und erhält so:

$$\frac{16\,\pi^2}{3\,c^3} = \frac{\varkappa}{2\,\nu^2}$$

($\varkappa$ ist der Wert von $\varkappa_0$ für $\nu_0 = \nu$), oder:

$$\varkappa_0 = \frac{32\,\pi^2\,\nu_0^2}{3\,c^3},$$

welcher Wert thatsächlich den verlangten Wert des letzten Integrals ergiebt.[1])

Daher ist die Intensität $\mathfrak{J}_0$ der Schwingungszahl ν_0:

$$
(19)\quad \begin{cases}
\mathfrak{J}_0 = \int d\mu\,(\mathfrak{A}_\mu^0 \sin 2\pi\mu t + \mathfrak{B}_\mu^0 \cos 2\pi\mu t), \\
\text{wobei:} \\
\mathfrak{A}_\mu^0 = \dfrac{2}{\varrho\,\nu_0}\int d\nu\, C_{\nu+\mu} C_\nu \sin^2\delta_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu), \\
\mathfrak{B}_\mu^0 = \dfrac{2}{\varrho\,\nu_0}\int d\nu\, C_{\nu+\mu} C_\nu \sin^2\delta_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu).
\end{cases}
$$

Im allgemeinen werden die Werte von $\mathfrak{A}_\mu^0$ und $\mathfrak{B}_\mu^0$ noch von ϱ abhängig sein. In diesem Falle kann man von einer Intensität der Schwingungszahl ν_0 in bestimmtem Sinne gar nicht reden. Wir wollen nun für das folgende die Voraussetzung machen, dass eine jede Schwingungszahl ν eine ganz bestimmte, mit der Zeit „langsam veränderliche" Schwingungsintensität $\mathfrak{J}_\nu$ besitzt, unabhängig von der zu ihrer Messung dienenden Grösse ϱ. Dann ist zugleich auch die schon in § 4 eingeführte Bedingung erfüllt, dass eine Gesamtintensität

$$J = \int_0^\infty \mathfrak{J}_\nu\, d\nu$$

der erregenden Schwingung Z existirt. Auf die Frage, weshalb und inwieweit diese Annahme, welche übrigens in der Wärme- und Lichtstrahlung bisher thatsächlich stets gemacht wurde, in der Natur gerechtfertigt ist, soll hier nicht näher eingegangen werden.

§ 9. Natürliche Strahlung.

Wir haben jetzt die erregende Schwingung Z, die zu den „schnell veränderlichen" und daher nicht direct messbaren Grössen gehört, so weit analysirt, dass wir ihre Gesamtintensität J zu jeder Zeit in eine Reihe von messbaren Grössen zerlegt haben: den Intensitäten $\mathfrak{J}_\nu$ der verschiedenen Schwin-

1) Diese Deduction ist gegen die frühere Darstellung (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin vom 18. Mai 1899, p. 450), Dank einer mündlichen Bemerkung des Hrn. Boltzmann, etwas verändert worden.

gungszahlen ν. Weitere Mittel, um „langsam veränderliche“ Eigenschaften von Z abzuleiten, besitzen wir nicht; die Methoden der Analyse sind also hiermit erschöpft. Was wir durch sie von der schnell veränderlichen Schwingung Z kennen gelernt haben, ist aber im Vergleich zu der in ihr noch enthaltenen Mannigfaltigkeit von Eigenschaften nur äusserst wenig. Die Functionen C_ν und ϑ_ν selber, in ihrer Abhängigkeit von ν, sind und bleiben uns innerhalb eines breiten Spielraumes gänzlich unbekannt.

Stellen wir nun zunächst dasjenige zusammen, was wir durch Messung der Intensität $\mathfrak{J}_0$ der Schwingungszahl ν_0, als einer langsam veränderlichen Function der Zeit t, über die schnell veränderlichen Grössen C_ν und ϑ_ν erfahren können. Als messbar haben wir in (19) die Grössen $\mathfrak{A}_\mu^0$ und $\mathfrak{B}_\mu^0$ zu betrachten, für alle Werte von μ. Setzen wir nun:

$$(20)\qquad \begin{cases} C_{\nu+\mu}\, C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu) = \mathfrak{A}_\mu^0 + \xi, \\ C_{\nu+\mu}\, C_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu) = \mathfrak{B}_\mu^0 + \eta, \end{cases}$$

wobei ξ und η schnell veränderliche Functionen von ν und μ sind, so folgt aus (19):

$$\mathfrak{A}_\mu^0 = \mathfrak{A}_\mu^0 \cdot \frac{2}{\varrho\,\nu_0} \cdot \int d\nu \sin^2\delta_\nu + \frac{2}{\varrho\,\nu_0} \int \xi \sin^2\delta_\nu\, d\nu.$$

Nun ist mit Rücksicht auf (18):

$$\frac{2}{\varrho\,\nu_0} \int \sin^2\delta_\nu\, d\nu = 1.$$

Folglich:

$$\int \xi \sin^2\delta_\nu\, d\nu = 0\,.$$

Ebenso:

$$\int \eta \sin^2\delta_\nu\, d\nu = 0\,.$$

Da $\sin\delta_\nu$ für alle Werte von ν verschwindet, deren Verhältnis zu ν_0 nicht nahe gleich 1 ist, so stellt die Grösse $\mathfrak{A}_\mu^0$ in (20) den langsam veränderlichen *Mittelwert* der schnell veränderlichen Grösse $C_{\nu+\mu}\, C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ für ν nahe gleich ν_0 vor, und ebenso $\mathfrak{B}_\mu^0$ den entsprechenden Mittelwert der schnell veränderlichen Grösse $C_{\nu+\mu}\, C_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$.[1]

---

1) Man könnte auch sehr viel einfacher die Intensität $\mathfrak{J}_\nu$ einer bestimmten Schwingungszahl ν durch die genannten Mittelwerte *definiren*,

Kehren wir nun zu der Untersuchung des Resonators mit der Schwingungszahl ν_0 und dem Dämpfungsdecrement σ zurück, so ist zunächst von vornherein einleuchtend, dass zur Berechnung des Einflusses, welchen die erregende Schwingung Z auf den Resonator ausübt, die Kenntnis der Mittelwerthe $\mathfrak{A}_\mu^0$ und $\mathfrak{B}_\mu^0$ im allgemeinen noch nicht genügt, sondern dass dazu die Grössen C_ν und ϑ_ν selber bekannt sein müssen. In der That ersieht man aus dem in (13) abgeleiteten Ausdruck der Energie U_0 des Resonators, dass diese erst dann genau berechnet werden kann, wenn man die Werte von $C_{\nu+\mu}\, C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ und von $C_{\nu+\mu}\, C_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ für jeden Wert von ν anzugeben vermag, für den $\nu:\nu_0$ nahe gleich 1 ist. Mit anderen Worten: die in der erregenden Schwingung enthaltene Intensität $\mathfrak{J}_0$ der Schwingungszahl ν_0, auch wenn sie für alle Zeiten bekannt ist, bestimmt im allgemeinen noch nicht die Energie U_0 des von der Schwingung getroffenen Resonators.

Somit bleibt nichts anderes übrig, als entweder auf die Constatirung eines allgemeinen Zusammenhangs der Grössen U_0 und $\mathfrak{J}_0$ überhaupt zu verzichten, was aber den Ergebnissen aller Erfahrung zuwiderlaufen würde, oder mittels einer neu einzuführenden Hypothese die vorhandene Kluft zu überbrücken. Die physikalischen Thatsachen entscheiden für die zweite Alternative.

Die Hypothese, welche wir jetzt als die nächstliegende und wohl einzig mögliche einführen und für alles folgende beibehalten wollen, besteht in der Annahme, dass bei der Berechnung von U_0 aus der Gleichung (13) in den Integralen, welche die Werte der Coefficienten a_μ und b_μ angeben, für die schnell veränderlichen Grössen $C_{\nu+\mu}\, C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ und $C_{\nu+\mu}\, C_\nu \cos(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ — die einzigen von C_ν und ϑ_ν abhängigen Grössen, die in diesen Integralen vorkommen — ohne merklichen Fehler ihre langsam veränderlichen Mittelwerte $\mathfrak{A}_\mu^0$ und $\mathfrak{B}_\mu^0$ gesetzt werden können. Damit erhält dann die Aufgabe, U_0 aus $\mathfrak{J}_0$ zu berechnen, eine ganz bestimmte,

indem man das für die Gesamtintensität J aufgestellte Integral (7) einfach in der Form von (17) schreibt und daraus die Werte der $\mathfrak{A}_\mu$ und $\mathfrak{B}_\mu$ ableitet. Dann geht aber die hier benutzte physikalische Bedeutung der Definition verloren.

durch Messungen zu verificirende Lösung. Um aber auszudrücken, dass die hier abzuleitenden Gesetze nicht für jede Art Schwingungen, sondern nur mit Ausschliessung gewisser besonderer Einzelfälle gelten, wollen wir jede Art Strahlung, auf welche die hier eingeführte Hypothese passt, als „natürliche“ Strahlung bezeichnen. Dieser Name empfiehlt sich deshalb, weil, wie sich im dritten Abschnitt zeigen wird, der Licht- und Wärmestrahlung thatsächlich die Eigenschaften der „natürlichen“ Strahlung zukommen.

Man kann den Begriff der natürlichen Strahlung noch anschaulicher, aber weniger direct, als oben geschehen, auch dahin fassen, dass bei ihr die Abweichungen der unmessbaren schnell veränderlichen Grössen $C_{\nu+\mu} C_\nu \sin(\vartheta_{\nu+\mu} - \vartheta_\nu)$ etc. von ihren messbaren langsam veränderlichen Mittelwerten $\mathfrak{A}_\mu^0$ etc. gänzlich unregelmässig sind.

§ 10. Fundamentalgleichung der entwickelten Theorie.

Gemäss der im vorigen Paragraphen eingeführten Hypothese ergiebt sich aus der Gleichung (13):

$$a_\mu = \frac{3c^3}{16\pi^2\sigma\nu_0^3}\int d\nu \sin\gamma_{\nu+\mu} \times$$
$$\sin\gamma_\nu\left(\mathfrak{A}_\mu^0 \cos(\gamma_{\nu+\mu}-\gamma_\nu) + \mathfrak{B}_\mu^0 \sin(\gamma_{\nu+\mu}-\gamma_\nu)\right),$$

$$b_\mu = \frac{3c^3}{16\pi^2\sigma\nu_0^3}\int d\nu \sin\gamma_{\nu+\mu} \times$$
$$\sin\gamma_\nu\left(\mathfrak{B}_\mu^0 \cos(\gamma_{\nu+\mu}-\gamma_\nu) - \mathfrak{A}_\mu^0 \sin(\gamma_{\nu+\mu}-\gamma_\nu)\right),$$

oder:

$$a_\mu = \frac{3c^3}{16\pi^2\sigma\nu_0^3}(\mathfrak{A}_\mu^0\alpha + \mathfrak{B}_\mu^0\beta),$$

$$b_\mu = \frac{3c^3}{16\pi^2\sigma\nu_0^3}(\mathfrak{B}_\mu^0\alpha - \mathfrak{A}_\mu^0\beta),$$

wobei:

$$\alpha = \int_0^\infty d\nu \sin\gamma_{\nu+\mu} \sin\gamma_\nu \cos(\gamma_{\nu+\mu}-\gamma_\nu),$$

$$\beta = \int_0^\infty d\nu \sin\gamma_{\nu+\mu} \sin\gamma_\nu \sin(\gamma_{\nu+\mu}-\gamma_\nu).$$

Nun ergiebt sich mit Berücksichtigung der in (6) gegebenen Werte von $\operatorname{ctg}\gamma_\nu$ und $\operatorname{ctg}\gamma_{\nu+\mu}$ durch elementare Rechnungen:

$$\alpha = \frac{\sigma \nu_0}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \mu^2}{\sigma^2 \nu_0^2}},$$

$$\beta = \frac{\pi \mu}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \mu^2}{\sigma^2 \nu_0^2}}.$$

Folglich, wenn man daraus a_μ und b_μ berechnet und die so erhaltenen Werte in (16) einsetzt:

$$a'_\mu = \frac{3 c^3 \sigma}{16 \pi^2 \nu_0} \mathfrak{A}^0_\mu,$$

$$b'_\mu = \frac{3 c^3 \sigma}{16 \pi^2 \nu_0} \mathfrak{B}^0_\mu.$$

Die in der Zeit dt vom Resonator absorbirte Energie ist also nach (16):

$$dt \cdot \frac{3 c^3 \sigma}{16 \pi^2 \nu_0} \cdot \int d\mu (\mathfrak{A}^0_\mu \sin 2 \pi \mu t + \mathfrak{B}^0_\mu \cos 2 \pi \mu t),$$

oder nach (19):

$$(21) \qquad = dt \cdot \frac{3 c^3 \sigma}{16 \pi^2 \nu_0} \cdot \mathfrak{J}_0.$$

Die in einem Zeitelement vom Resonator absorbirte Energie ist proportional der in der erregenden Schwingung enthaltenen Intensität seiner Eigenperiode, ferner seinem logarithmischen Decrement und dem Cubus der Lichtgeschwindigkeit, und umgekehrt proportional der Schwingungszahl.

Bei der natürlichen Strahlung wird also stets positive Energie absorbirt, was gewöhnlich als selbstverständlich vorausgesetzt wird, aber doch im allgemeinen, wie schon in der zu (4) gemachten Bemerkung betont wurde, nicht der Fall zu sein braucht.

Durch Substitution des Wertes der absorbirten Energie in (15) erhält man schliesslich die Fundamentalgleichung der entwickelten Theorie:

$$dt \cdot \frac{3 c^3 \sigma}{16 \pi^2 \nu_0} \cdot \mathfrak{J}_0 = d U_0 + 2 \sigma \nu_0 U_0 dt$$

oder:

$$(22) \qquad \frac{d U_0}{dt} + 2 \sigma \nu_0 U_0 = \frac{3 c^3 \sigma}{16 \pi^2 \nu_0} \mathfrak{J}_0.$$

Diese Differentialgleichung kann zur Berechnung der Energie U_0 des Resonators benutzt werden, wenn die seiner Schwingungs-

zahl entsprechende Intensität $\mathfrak{J}_0$ der erregenden Schwingung als Function der Zeit gegeben ist. Da die Functionen $U_0(t)$ und $\mathfrak{J}_0(t)$ hier nicht mehr durch Fourier'sche Integrale dargestellt zu werden brauchen, so können wir von jetzt ab auch die früher in § 2 eingeführte Beschränkung in Bezug auf das betrachtete Zeitintervall wieder aufheben, und diese und die folgenden Gleichungen als für alle positiven und negativen Zeiten gültig ansehen.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist:

$$U_0 = \frac{3\,c^3\,\sigma}{16\,\pi^2\,\nu_0}\int_{-\infty}^{t} \mathfrak{J}_0(x)\, e^{2\sigma\nu_0(x-t)}\, d\,x\,.$$

Für constantes $\mathfrak{J}_0$ hat man:

$$U_0 = \frac{3\,c^3}{32\,\pi^2\,\nu_0^2}\,\mathfrak{J}_0\,.$$

Bei constanter Bestrahlung ist die Energie des Resonators proportional der in der erregenden Schwingung enthaltenen Intensität seiner Schwingungszahl, ferner dem Cubus der Lichtgeschwindigkeit, und umgekehrt proportional dem Quadrat der Schwingungszahl, aber unabhängig von der Dämpfung.

Nachdem wir so die Abhängigkeit der Energie des Resonators von der Intensität der erregenden Schwingung festgestellt haben, wird es unsere nächste Aufgabe sein, die letztere Grösse in Zusammenhang zu bringen mit der im umgebenden Felde stattfindenden Energiestrahlung. Dies geschieht nach bekannten Methoden im nächsten Abschnitt und führt zur Formulirung der Gesetze der Energie und der Entropie.

Zweiter Abschnitt.

Erhaltung der Energie und Vermehrung der Entropie.

Indem wir jetzt zur Untersuchung der Vorgänge in dem den Resonator umgebenden elektromagnetischen Felde übergehen, wollen wir überall im Folgenden von den im vorigen Abschnitt abgeleiteten Resultaten Gebrauch machen, selbstverständlich unter der Voraussetzung, dass dabei überall und zu allen Zeiten die Bedingungen der natürlichen Strahlung erfüllt sind. Dementsprechend brauchen wir künftig nie mehr

mit Amplituden und Phasen zu rechnen, sondern stets nur mit Intensitäten und Energien, d. h. mit „langsam veränderlichen" (im Sinne des § 5) Grössen. In diesem Sinne ist auch die Bedeutung der unten benutzten Raumelemente und Zeitelemente zu verstehen, nämlich als Grössen, welche unendlich klein sind gegen die Dimensionen der betrachteten Räume und Zeiten, aber immer noch gross gegen die betrachteten Wellenlängen und Schwingungsdauern. Die Wände des durchstrahlten Raumes denken wir uns als ruhende, absolut spiegelnde Flächen, deren Krümmungsradien gross sind gegen alle in Betracht kommenden Wellenlängen. Dann können wir auch von allen Beugungsphänomenen absehen und immer nur von geradliniger Fortpflanzung der Strahlung sprechen.

§ 11. Intensität der Energiestrahlung von bestimmter Richtung, Schwingungszahl und Polarisation.

In einem von irgend welchen elektromagnetischen Strahlen durchsetzten Vacuum ist die Intensität der Strahlung an irgend einem Orte $\mathfrak{O}$ zu einer bestimmten Zeit nach Richtung, Schwingungszahl (Farbe) und Polarisation zu unterscheiden. Um zunächst die Richtung ins Auge zu fassen, denken wir uns von dem Punkte $\mathfrak{O}$ eine kleine geradlinige Strecke von der Länge r gezogen in derjenigen Richtung, welche durch die Polarcoordinatenwinkel ϑ (zwischen 0 und π) und φ (zwischen 0 und 2 π) bestimmt ist. Denken wir uns nun sowohl im Anfangspunkt $\mathfrak{O}$ als auch im Endpunkt der Strecke je ein Flächenelement, $d\sigma$ und $d\sigma'$, senkrecht zu r gelegt, so wird die gesamte Energiemenge, welche in der Zeit dt durch die bei $\mathfrak{O}$ liegende Fläche $d\sigma$ der Fläche $d\sigma'$ zugestrahlt wird, gleich sein dem Ausdruck:

$$dt \cdot \frac{d\sigma \cdot d\sigma'}{r^2} \cdot K, \tag{23}$$

wobei K, die Intensität der Energiestrahlung in der Richtung (ϑ, φ), eine endliche positive Function des Ortes, der Zeit und der beiden Winkel ϑ und φ bedeutet. Setzt man darin z. B. für ϑ den Wert $\pi - \vartheta$ und für φ den Wert $\varphi + \pi$, so erhält man für K die Intensität der Energiestrahlung in der entgegengesetzten Richtung, eine von der vorigen im allgemeinen gänzlich verschiedene Grösse.

Weiter lässt sich die Strahlung K zerlegen in eine Reihe von monochromatischen, in derselben Richtung fortschreitenden Strahlen, bei deren jedem ausser der Intensität noch die Polarisation zu unterscheiden ist. Zerlegt man einen in bestimmter Richtung fortschreitenden monochromatischen Strahl von beliebigem Polarisationszustande in zwei geradlinig polarisirte Componenten, deren Polarisationsebenen aufeinander senkrecht stehen, im übrigen aber beliebig sind, so ist bekanntlich die Summe der Intensitäten der beiden Componenten gleich der Intensität des ganzen Strahles, unabhängig von der Orientirung des Ebenenpaares. Die Grösse der beiden Componenten kann stets dargestellt werden durch zwei Ausdrücke von der Form:

$$\mathfrak{K} \cos^2 \omega + \mathfrak{K}' \sin^2 \omega$$

und

$$\mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega ,$$

wobei ω das Azimut der Polarisationsebene einer Componente bedeutet. Die Summe dieser beiden Ausdrücke ergiebt in der That die Intensität des ganzen Strahles: $\mathfrak{K} + \mathfrak{K}'$, unabhängig von ω. $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ repräsentiren zugleich den grössten und den kleinsten Wert der Intensität, den eine Componente überhaupt annehmen kann (für $\omega = 0$ und $\omega = \pi/2$). Daher wollen wir diese Werte die „Hauptwerte der Intensität" und die entsprechenden Polarisationsebenen die „Hauptpolarisationsebenen" des Strahles nennen. Beide sind natürlich im allgemeinen mit der Zeit veränderlich. Somit können wir allgemein setzen:

$$K = \int_0^\infty d\nu (\mathfrak{K}_\nu + \mathfrak{K}_\nu') , \tag{24}$$

wobei die positiven Grössen $\mathfrak{K}_\nu$ und $\mathfrak{K}_\nu'$, die beiden Hauptwerte der Strahlungsintensität von der Schwingungszahl ν, ausser von ν noch vom Orte, von der Zeit und von den Winkeln ϑ und φ abhängen. Für unpolarisirte Strahlen ist $\mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{K}_\nu'$ und

$$K = 2 \int_0^\infty \mathfrak{K}_\nu \, d\nu . \tag{25}$$

§ 12. Energie und Energiedichte.

Die totale Energie U_t eines durchstrahlten Vacuums und einer darin befindlichen Anzahl von Resonatoren der betrachteten Art ist von der Form:

$$U_t = \Sigma U + \int u\, d\tau\,, \tag{26}$$

wobei U die Energie eines einzelnen Resonators (der im vorigen Abschnitt hinzugefügte Index 0 kann von jetzt an überall weggelassen werden), Σ die Summation über alle Resonatoren, und u die Dichte der strahlenden Energie im Raumelement $d\tau$ des Vacuums bezeichnet. Da die Resonatoren verschwindend kleine Räume einnehmen, so ist es gleichgültig, ob in dem Integral die Integration auch über die von den Resonatoren erfüllten Räume erstreckt wird oder nicht.

Berechnen wir nun die Energiedichte u, eine Function des Ortes und der Zeit, für irgend einen Punkt $\mathfrak{O}$ des Vacuums, aus der Strahlungsintensität K. Zu diesem Zwecke legen wir um den Punkt $\mathfrak{O}$ als Centrum eine Kugelfläche vom kleinen Radius r. Alle Strahlen, die durch das Kugelcentrum hindurchgehen, kommen von Elementen der Kugelfläche her. Betrachten wir z. B. denjenigen Strahl, welcher in der Richtung (ϑ, φ) durch das Centrum geht; derselbe kommt von einem Flächenelement ds her, dessen Lage durch die Polarcoordinaten r, $\pi - \vartheta$, $\varphi + \pi$ bestimmt ist.

Die Energiemenge, welche dieser Strahl in der Zeit dt durch ein beim Kugelcentrum befindliches, senkrecht zu seiner Fortpflanzungsrichtung orientirtes Flächenelement $d\sigma$ hindurchsendet, beträgt nach (23):

$$dt \cdot \frac{d\sigma \,.\, ds}{r^2} \cdot K.$$

Folglich die Energiedichte, die dieser Strahl im Kugelcentrum besitzt, durch Division mit $d\sigma$ und mit der in der Zeit dt zurückgelegten Strecke $c\,.\,dt$:

$$\frac{ds}{c\,r^2} \cdot K.$$

Durch Integration über alle Elemente ds der Kugelfläche erhält man also die gesamte elektromagnetische Energiedichte im Kugelcentrum $\mathfrak{O}$:

$$u = \int \frac{ds}{c r^2} \cdot K$$

oder, da

$$ds = r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = r^2 . d\Omega ,$$

wenn man mit $d\Omega$ den Oeffnungswinkel des dem Element ds entsprechenden Kegels bezeichnet:

$$u = \int \frac{1}{c} K . d\Omega , \tag{27}$$

eine Grösse, die nur mehr von Ort und Zeit abhängt.

Ist speciell die Strahlungsintensität K nach allen Richtungen constant, so ergiebt sich hieraus die oft benutzte Beziehung:

$$u = \frac{K}{c} \int d\Omega = \frac{4\pi K}{c} . \tag{28}$$

Durch Substitution des Wertes von K aus (24) findet man auch leicht die Energiedichte, die jeder einzelne monochromatische Strahl in irgend einem Punkt des Raumes zu irgend einer Zeit besitzt.

Andererseits ist die räumliche Dichte der elektromagnetischen Energie in einem Punkte des Vacuums:

$$u = \frac{1}{8\pi} (\overline{X^2} + \overline{Y^2} + \overline{Z^2} + \overline{L^2} + \overline{M^2} + \overline{N^2}),$$

wo X^2, Y^2, Z^2, L^2, M^2, N^2 die Quadrate der Componenten des elektromagnetischen Feldes bedeuten, als „langsam veränderliche“ Grössen (§ 5) betrachtet, und daher mit dem auf den Mittelwert deutenden Querstrich versehen. Da für jeden einzelnen Strahl die mittlere elektrische und magnetische Energie gleich sind, so kann man immer schreiben:

$$u = \frac{1}{4\pi} (\overline{X^2} + \overline{Y^2} + \overline{Z^2}) . \tag{29}$$

§ 13. Intensität der einen Resonator erregenden Schwingung.

Nun nehmen wir in dem Centrum $\mathfrak{O}$ der vorhin betrachteten Kugel einen Resonator der im ersten Abschnitt untersuchten Art befindlich an, dessen Axe wir zur Z-Axe machen. Dann ist die Intensität der den Resonator erregenden Schwingung nach § 4:

$$J = \overline{Z^2} .$$

Wir wollen daher nun den Wert von $\overline{Z^2}$ berechnen. Zu diesem Zweck müssen wir auch auf die Polarisation der den Punkt $\mathfrak{O}$ treffenden monochromatischen Strahlen Rücksicht nehmen. Fassen wir also wieder denjenigen Strahl ins Auge, der, vom Flächenelemente ds am Orte $(r, \pi - \vartheta, \varphi + \pi)$ kommend, in der Richtung (ϑ, φ) den Punkt $\mathfrak{O}$ trifft, so zerfällt derselbe in eine Reihe monochromatischer Strahlen, von denen einer die Hauptwerte der Intensität $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ besitzen möge. Bezeichnen wir nun den Winkel, welchen die zur Hauptintensität $\mathfrak{K}$ gehörige Polarisationsebene mit der durch die Richtung des Strahles und die Z-Axe (die Resonatoraxe) gelegten Ebene bildet, mit ω, einerlei in welchem Quadranten, so lässt sich der ganze monochromatische Strahl zerlegen in die beiden geradlinig und senkrecht aufeinander polarisirten Componenten:

$$(30) \qquad \begin{cases} \mathfrak{K}\cos^2\omega + \mathfrak{K}'\sin^2\omega, \\ \mathfrak{K}\sin^2\omega + \mathfrak{K}'\cos^2\omega, \end{cases}$$

von denen die erste in der durch die Z-Axe gehenden Ebene polarisirt ist, da sie für $\omega = 0$ gleich $\mathfrak{K}$ wird. Diese Componente liefert *keinen* Beitrag zu dem Werthe von $\overline{Z^2}$ im Punkte $\mathfrak{O}$, weil die elektrische Kraft eines geradlinig polarisirten Strahles senkrecht steht auf der Polarisationsebene. Es bleibt also nur übrig die zweite Componente, deren elektrische Kraft den Winkel $\pi/2 - \vartheta$ mit der Z-Axe bildet. Nun ist nach dem Poynting'schen Satze die Intensität eines geradlinig polarisirten Strahles im Vacuum gleich $c/4\pi$ mal dem mittleren Quadrat der elektrischen Kraft. Folglich ist das mittlere Quadrat der elektrischen Kraft des hier betrachteten Strahles:

$$\frac{4\pi}{c}(\mathfrak{K}\sin^2\omega + \mathfrak{K}'\cos^2\omega)$$

und das mittlere Quadrat der Componente davon in der Richtung der Z-Axe:

$$(31) \qquad \frac{4\pi}{c}(\mathfrak{K}\sin^2\omega + \mathfrak{K}'\cos^2\omega)\sin^2\vartheta.$$

Durch Integration über alle Schwingungszahlen und alle Oeffnungswinkel erhalten wir mithin den gesuchten Wert:

$$(32) \qquad \overline{Z^2} = \frac{4\pi}{c}\int \sin^2\vartheta\, d\Omega \int d\nu (\mathfrak{K}_\nu \sin^2\omega_\nu + \mathfrak{K}'_\nu \cos^2\omega_\nu) = J.$$

Sind speciell alle Strahlen unpolarisirt und die Strahlungsintensität nach allen Richtungen constant, so ist $\mathfrak{K}_\nu = \mathfrak{K}'_\nu$ und, da:

$$\int \sin^2 \vartheta \, d\Omega = \iint \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{8\pi}{3},$$

$$\overline{Z^2} = \frac{32\pi^2}{3c} \int \mathfrak{K}_\nu \, d\nu = \overline{X^2} = \overline{Y^2}$$

und durch Substitution in (29) und in (25):

$$u = \frac{8\pi}{c} \int \mathfrak{K}_\nu \, d\nu = \frac{4\pi K}{c},$$

übereinstimmend mit (28).

Nehmen wir nun nach § 8 die spectrale Zerlegung der Intensität J vor:

$$J = \int \mathfrak{J}_\nu \, d\nu,$$

so ergiebt sich durch Vergleichung mit (32) für die in der erregenden Schwingung enthaltene Intensität einer bestimmten Schwingungszahl ν der Wert:

$$\mathfrak{J}_\nu = \frac{4\pi}{c} \int \sin^2 \vartheta \, d\Omega \, (\mathfrak{K}_\nu \sin^2 \omega_\nu + \mathfrak{K}'_\nu \cos^2 \omega_\nu). \tag{33}$$

Da nun $\mathfrak{J}$ mit der Energie U des Resonators durch die Gleichung (22) zusammenhängt, so ist hiermit die Möglichkeit gegeben, die Schwingung des Resonators zu berechnen, wenn die Intensitäten und Polarisationen aller den Resonator treffenden Strahlen für alle Zeiten bekannt sind. Insbesondere ergiebt sich für unpolarisirte und nach allen Richtungen gleichmässige Strahlung:

$$\mathfrak{J} = \frac{32\pi^2}{3c} \mathfrak{K}$$

und nach (22):

$$\frac{dU}{dt} + 2\sigma\nu U = \frac{2c^2\sigma}{\nu} \mathfrak{K}.$$

Ist die Strahlung auch noch unabhängig von der Zeit, oder der Strahlungszustand „stationär“, so ist auch U von der Zeit unabhängig und:

$$U = \frac{c^2}{\nu^2} \mathfrak{K}. \tag{34}$$

§ 14. Absorbirte und emittirte Energie.

Die ganze in der Zeit dt von dem Resonator absorbirte Energie beträgt nach (21):

$$dt \cdot \frac{3 c^3 \sigma}{16 \pi^2 \nu} \cdot \mathfrak{J}$$

oder nach (33):

$$dt \cdot \frac{3 c^2 \sigma}{4 \pi \nu} \int \sin^2 \vartheta \, d\,\Omega \, (\mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega).$$

Daher wird von der in der Richtung (ϑ, φ) auf den Resonator fallenden Strahlung in der Zeit dt der Energiebetrag:

$$dt \cdot \frac{3 c^2 \sigma}{4 \pi \nu} (\mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega) \sin^2 \vartheta \, d\,\Omega$$

absorbirt.

Nun beträgt die Intensität der in der Richtung (ϑ, φ) auf den Resonator fallenden Strahlung, soweit sie „absorbirbar“ ist, d. h. die dem Resonator entsprechende Schwingungszahl und Polarisation besitzt, nach (31), da der Factor $4 \pi / c$ hier wegzulassen ist:

$$(35) \qquad (\mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega) \sin^2 \vartheta.$$

Daraus ergiebt sich der Satz: Der absolute Betrag der vom Resonator in der Zeit dt absorbirten Energie wird erhalten, wenn man die Intensität der in irgend einer Richtung (ϑ, φ) auf ihn fallenden absorbirbaren Strahlung mit

$$(36) \qquad dt \cdot \frac{3 c^2 \sigma}{4 \pi \nu} \cdot d\,\Omega$$

multiplicirt und diesen Ausdruck über alle Richtungen (ϑ, φ) integrirt. Der Factor $3 c^2 \sigma / 4 \pi \nu$ bestimmt also die Breite des vom Resonator aufgefangenen Strahlenbündels, indem er ein Maass liefert für das Product aus dem Querschnitt des Resonators und der Breite des von ihm beeinflussten Spectralbezirkes.

Auf der anderen Seite beträgt die vom Resonator in der Zeit dt nach allen Richtungen emittirte Energie nach (14):

$$dt \, . \, 2 \sigma \nu U$$

oder, was dasselbe ist:

$$dt \cdot \frac{3 \sigma \nu}{4 \pi} U \cdot \int \sin^2 \vartheta \, d\,\Omega.$$

Da nun die Intensität der vom Resonator in der Richtung (ϑ, φ) emittirten Strahlung bekanntlich unabhängig ist von φ und proportional $\sin^2\vartheta$, so beträgt die in der Zeit dt in dieser Richtung emittirte Energie:

$$dt \cdot \frac{3\,\sigma\,\nu}{4\,\pi} \cdot U \sin^2\vartheta \, d\Omega$$

und die *Intensität* der vom Resonator in derselben Richtung emittirten Strahlung, durch Division mit (36):

$$\frac{\nu^2\, U \sin^2\vartheta}{c^2}. \tag{37}$$

Für den am Schluss des vorigen Paragraphen betrachteten „stationären" Strahlungszustand ist

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' \quad \text{und} \quad U = \frac{c^2}{\nu^2}\,\mathfrak{K}.$$

Man sieht also, dass im stationären Strahlungszustand die Intensität (35) der in irgend einer Richtung auf den Resonator fallenden absorbirbaren Strahlung gleich ist der Intensität (37) der in derselben Richtung vom Resonator emittirten Strahlung, wie es sein muss.

§ 15. Intensität und Polarisation der den Resonator passirenden Strahlenbündel.

Wir wollen nun, als Vorbereitung für die folgenden Deductionen, die Eigenschaften der verschiedenen den Resonator passirenden Strahlenbündel noch näher ins Auge fassen. Von allen Seiten treffen Strahlen auf den im Anfangspunkt $\mathfrak{O}$ der Coordinaten liegend gedachten Resonator; betrachten wir denjenigen Strahl, welcher in der Richtung (ϑ, φ), also von einem Punkte mit den Polarcoordinaten $\pi - \vartheta$, $\varphi + \pi$ kommend, auf den Resonator fällt, so können wir ihn uns zunächst zerlegt denken in seine monochromatischen Bestandteile, und brauchen uns nur mit demjenigen dieser Bestandteile weiter zu beschäftigen, welcher der Schwingungszahl ν des Resonators entspricht; denn alle übrigen Strahlen streichen über den Resonator einfach hinweg, ohne ihn zu beeinflussen oder von ihm beeinflusst zu werden. Die Intensität des monochromatischen Strahles von der Schwingungszahl ν ist:

$$\mathfrak{K} + \mathfrak{K}',$$

wenn $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ die Hauptintensitäten vorstellen. Dieser Strahl wird nun je nach den Richtungen seiner Hauptpolarisationsebenen in zwei Componenten (30) zerlegt.

Die eine Componente:

$$\mathfrak{K}\cos^2\omega + \mathfrak{K}'\sin^2\omega$$

geht direct über den Resonator hinweg und tritt völlig ungeändert auf der anderen Seite wieder aus; sie liefert also einen in der Richtung (ϑ, φ) vom Resonator ausgehenden geradlinig polarisirten Strahl, dessen Polarisationsebene durch die Axe des Resonators hindurchgeht, und dessen Intensität beträgt:

$$\mathfrak{K}\cos^2\omega + \mathfrak{K}'\sin^2\omega = \mathfrak{K}''. \tag{38}$$

Die andere, senkrecht auf der vorigen polarisirte Componente:

$$\mathfrak{K}\sin^2\omega + \mathfrak{K}'\cos^2\omega$$

zerfällt wiederum in zwei Teile:

$$(\mathfrak{K}\sin^2\omega + \mathfrak{K}'\cos^2\omega)\cos^2\vartheta$$

und:

$$(\mathfrak{K}\sin^2\omega + \mathfrak{K}'\cos^2\omega)\sin^2\vartheta,$$

von denen der erste ungeändert durch den Resonator hindurchpassirt, der zweite dagegen absorbirt wird. Statt des letzteren erscheint aber in der vom Resonator ausgehenden Strahlung die Intensität des emittirten Strahles (37):

$$\frac{\nu^2 U \sin^2\vartheta}{c^2}.$$

Diese liefert zusammen mit dem ersten, unverändert gebliebenen Theil die gesammte Intensität des vom Resonator in der Richtung (ϑ, φ) ausgehenden, senkrecht auf (38) polarisirten Strahles:

$$(\mathfrak{K}\sin^2\omega + \mathfrak{K}'\cos^2\omega)\cos^2\vartheta + \frac{\nu^2 U}{c^2}\sin^2\vartheta = \mathfrak{K}'''. \tag{39}$$

Im ganzen haben wir also schliesslich in der Richtung (ϑ, φ) vom Resonator ausgehend einen aus zwei senkrecht zu einander polarisirten Componenten zusammengesetzten Strahl, dessen eine Polarisationsebene durch die Axe des Resonators geht und dessen Hauptintensitäten die Werte $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'''$ besitzen.

§ 16. Erhaltung der Energie.

Es ist nun leicht, sich Rechenschaft zu geben von der Erhaltung der Gesamtenergie des Systemes auf Grund der localen darin stattfindenden Energieänderungen.

Wenn gar kein Resonator im Felde vorhanden ist, so behält ein jedes der zweifach unendlich vielen elementaren Strahlenbündel beim geradlinigen Fortschreiten mit seiner Intensität auch seine Energie unverändert bei, auch bei der Reflexion an einer als eben und absolut spiegelnd vorausgesetzten Grenzfläche des Feldes.

Jeder Resonator dagegen bewirkt im allgemeinen eine Aenderung der ihn treffenden Strahlenbündel. Berechnen wir die ganze Energieänderung, die der oben betrachtete Resonator in der Zeit dt in dem ihn umgebenden Felde hervorruft. Dabei brauchen wir nur diejenigen monochromatischen Strahlen zu berücksichtigen, welche der Schwingungszahl ν des Resonators entsprechen, da die übrigen durch ihn gar nicht alterirt werden.

In der Richtung (ϑ, φ) wird der Resonator von einem irgendwie polarisirten Strahlenbündel getroffen, dessen Intensität durch die Summe der beiden Hauptintensitäten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ gegeben ist. Dieses Strahlenbündel lässt, der Bedeutung des Ausdruckes (36) gemäss, in der Zeit dt die Energie:

$$(\mathfrak{K} + \mathfrak{K}')\,dt \cdot \frac{3\,c^2\,\sigma}{4\,\pi\,\nu} \cdot d\Omega$$

auf den Resonator fallen, und dadurch wird auf der Seite der ankommenden Strahlen der nämliche Energiebetrag dem Felde entzogen. Auf der anderen Seite geht dafür vom Resonator in derselben Richtung (ϑ, φ) ein in bestimmter Weise polarisirtes Strahlenbündel aus, dessen Intensität durch die Summe der beiden Hauptintensitäten $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'''$ gegeben ist. Dadurch wird dem umgebenden Felde in der Zeit dt der Energiebetrag

$$(\mathfrak{K}'' + \mathfrak{K}''')\,dt \cdot \frac{3\,c^2\,\sigma}{4\,\pi\,\nu}\,d\Omega$$

zugeführt.

Im ganzen beträgt also die in der Zeit dt eingetretene Energieänderung des den Resonator umgebenden Feldes, durch

Subtraction des vorletzten Ausdruckes vom letzten und Integration über $d\,\Omega$:

$$dt \cdot \frac{3\,c^2\,\sigma}{4\,\pi\,\nu} \int d\,\Omega\,(\mathfrak{K}'' + \mathfrak{K}''' - \mathfrak{K} - \mathfrak{K}')\,.$$

Nimmt man dazu die in derselben Zeit eingetretene Energieänderung des Resonators:

$$dt \cdot \frac{d\,U}{d\,t}\,,$$

so verlangt das Princip der Erhaltung der Energie, dass die Summe der letzten beiden Ausdrücke verschwindet, d. h. dass

$$\frac{d\,U}{d\,t} + \frac{3\,c^2\,\sigma}{4\,\pi\,\nu} \int d\,\Omega\,(\mathfrak{K}'' + \mathfrak{K}''' - \mathfrak{K} - \mathfrak{K}') = 0\,, \tag{40}$$

und das ist in der That der Inhalt der beiden Gleichungen (22) und (33), wenn man berücksichtigt, dass nach (38) und (39):

$$\mathfrak{K}'' + \mathfrak{K}''' - \mathfrak{K} - \mathfrak{K}' = \left(\frac{\nu^2\,U}{c^2} - \mathfrak{K}\sin^2\omega - \mathfrak{K}'\cos^2\omega\right)\sin^2\vartheta\,.$$

§ 17. Definition der elektromagnetischen Entropie.

Wir definiren jetzt, analog der für die totale Energie U_t des Systemes aufgestellten Gleichung (26), eine neue Grösse S_t, die ebenfalls durch den augenblicklichen Zustand des Systems bestimmt ist und die wir die *totale elektromagnetische Entropie* des Systemes nennen:

$$S_t = \sum S + \int s\,d\,\tau\,.$$

Die Summation Σ ist wieder über alle Resonatoren, die Integration über alle Raumelemente $d\,\tau$ des durchstrahlten Feldes zu erstrecken. Daher nennen wir S die Entropie eines einzelnen Resonators und s die Entropiedichte in einem Punkte des Feldes.

Die Entropie S eines Resonators mit der Schwingungszahl ν und der Energie U definiren wir folgendermaassen:

$$S = -\frac{U}{a\,\nu}\log\frac{U}{e\,b\,\nu}\,, \tag{41}$$

wobei a und b zwei universelle positive Constanten bezeichnen, deren Zahlenwerte im absoluten C.G.S.-System im folgenden

Abschnitt (§ 25) auf thermodynamischem Wege ermittelt werden; e, die Basis der natürlichen Logarithmen, ist nur aus äusseren Zweckmässigkeitsgründen hinzugefügt.

Die räumliche Entropiedichte s in einem Punkte $\mathfrak{O}$ des durchstrahlten Feldes bestimmen wir ebenso wie die räumliche Energiedichte u aus der Betrachtung aller Strahlen, die diesen Punkt durchkreuzen. Wir schreiben nämlich jedem Strahlenbündel ausser einer bestimmten Energie auch eine bestimmte Entropie zu, die sich mit dem Bündel zusammen fortpflanzt. Denken wir uns, ganz ebenso wie im § 11, vom Punkte $\mathfrak{O}$ aus in irgend einer Richtung (ϑ, φ) eine kleine geradlinige Strecke r gezogen und sowohl im Anfangspunkt als auch im Endpunkt der Strecke je ein Flächenelement, $d\sigma$ und $d\sigma'$, senkrecht zu r gelegt, so sei der Gesamtbetrag der Entropie, welche in der Zeit dt durch die Fläche $d\sigma$ der Fläche $d\sigma'$ zugestrahlt wird, gleich dem Ausdruck:

$$dt \cdot \frac{d\sigma\, d\sigma'}{r^2} \cdot L, \tag{42}$$

wobei L, die Intensität der Entropiestrahlung in der Richtung (ϑ, φ), auf sogleich näher anzugebende Weise von der Beschaffenheit der Strahlung abhängt.

Wir setzen L, ebenso wie K im § 11, gleich einer Summe, deren Glieder durch die einzelnen monochromatischen in derselben Richtung fortschreitenden Strahlen bedingt werden, und definiren die Intensität der Entropiestrahlung eines monochromatischen geradlinig polarisirten Strahles von der Intensität $\mathfrak{K}$ durch den Ausdruck:

$$-\frac{\mathfrak{K}}{a\nu} \log \frac{c^2 \mathfrak{K}}{e\, b\, \nu^3} = \mathfrak{L}\,. \tag{43}$$

Der beim Vergleich mit (41) hinter dem Logarithmuszeichen auftretende Factor c^2/ν^2 ist durch die Gleichung (34) bedingt.

In dem allgemeinen Fall, dass der monochromatische Strahl nicht geradlinig polarisirt ist, sondern die Hauptintensitäten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ besitzt, beträgt die Intensität seiner Entropiestrahlung:

$$\mathfrak{L} + \mathfrak{L}',$$

wobei $\mathfrak{L}'$ den Wert bedeutet, den der Ausdruck (43) für $\mathfrak{K}'$ statt $\mathfrak{K}$ annimmt. Daher ist die Gesamtintensität der Entropiestrahlung in der Richtung (ϑ, φ):

$$L = \int_0^\infty d\nu (\mathfrak{L} + \mathfrak{L}')$$

und die räumliche Entropiedichte, analog der Gleichung (27):

$$s = \frac{1}{c} \int L \, . \, d\Omega.$$

Sind speciell alle durch $\mathfrak{O}$ gehenden Strahlen unpolarisirt und ihre Intensität unabhängig von der Richtung, so wird $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}'$,

$$L = 2 \int_0^\infty d\nu \, . \, \mathfrak{L} \tag{44}$$

und:

$$s = \frac{4 \pi L}{c} = \frac{8 \pi}{c} . \int_0^\infty d\nu \, . \, \mathfrak{L}. \tag{45}$$

Die Bedeutung der vorstehenden Definition der elektromagnetischen Entropie beruht darauf, dass mit ihrer Hülfe das Princip der Vermehrung der Entropie für die hier betrachteten Strahlungsvorgänge als gültig nachgewiesen werden kann, und weiter darauf, dass die nämliche Definition, durch eine Identificirung der elektromagnetischen mit der bekannten thermodynamischen Entropie, zu einer thermodynamischen Deutung der elektromagnetischen Strahlungsvorgänge, sowie zu einer Formulirung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik für alle Erscheinungen der Wärmestrahlung führt. Daraus folgen dann unter anderem die Gesetze des stationären Strahlungszustandes, in welchem die Entropie den grössten Wert annimmt, dessen sie nach den gegebenen Bedingungen des Systemes fähig ist.

Der Beweis für die angegebenen Eigenschaften der elektromagnetischen Entropie ist dann geliefert, wenn gezeigt werden kann, dass in allen elektromagnetischen und thermodynamischen Processen die totale Entropie des Systemes zunimmt. Für die hier betrachteten Strahlungsvorgänge, die allerdings noch lange nicht die allgemeinsten sind, wird dieser Nachweis im folgenden Paragraphen geführt und dadurch zugleich auch deren irreversibler Charakter dargethan, während die thermodynamischen Folgerungen erst im letzten Abschnitt Besprechung finden.

Ueber die *Nothwendigkeit* der gegebenen Definition der Entropie vgl. unten § 23.

§ 18. Vermehrung der Entropie.

Wir wollen nun, auf Grund vorstehender Definition, die Aenderung berechnen, welche die totale Entropie S_t unseres Systemes im Zeitelement dt erleidet. Wir halten uns dabei genau an die analoge im § 16 für die Energie des Systemes durchgeführte Rechnung.

Wenn gar kein Resonator im Felde vorhanden ist, so behält ein jedes der zweifach unendlich vielen Strahlenbündel beim geradlinigen Fortschreiten zugleich mit seiner Intensität seine Entropie unverändert bei, auch bei der Reflexion an einer als eben und absolut spiegelnd vorausgesetzten Grenzfläche des Feldes. Durch die Strahlungsvorgänge im freien Felde kann also keine Entropieänderung des Systemes hervorgerufen werden. Dagegen bewirkt jeder Resonator im allgemeinen eine Entropieänderung der ihn treffenden Strahlenbündel. Berechnen wir die ganze Entropieänderung, welche der oben betrachtete Resonator in der Zeit dt in dem ihn umgebenden Felde hervorruft. Dabei brauchen wir nur diejenigen monochromatischen Strahlen zu berücksichtigen, welche der Schwingungszahl ν des Resonators entsprechen, da die übrigen durch ihn gar nicht alterirt werden.

In der Richtung (ϑ, φ) wird der Resonator von einem irgendwie polarisirten Strahlenbündel getroffen, dessen Energiestrahlung die Hauptintensitäten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, und dessen Entropiestrahlung daher die Intensität $\mathfrak{L} + \mathfrak{L}'$ besitzt. Dieses Strahlenbündel lässt, der Bedeutung des Ausdruckes (36) gemäss, in der Zeit dt die Entropie:

$$(\mathfrak{L} + \mathfrak{L}') \cdot dt \cdot \frac{3 c^2 \sigma}{4 \pi \nu} \cdot d\Omega$$

auf den Resonator fallen, und dadurch wird auf der Seite der ankommenden Strahlen der nämliche Entropiebetrag dem Felde entzogen. Auf der anderen Seite geht vom Resonator in derselben Richtung (ϑ, φ) ein in bestimmter Weise polarisirtes Strahlenbündel aus, dessen Energiestrahlung die Hauptintensitäten $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'''$, und dessen Entropiestrahlung daher die entsprechende Intensität $\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}'''$ besitzt. Dadurch wird dem umgebenden Felde in der Zeit dt die Entropie:

$$(\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}''') dt \, . \frac{3 c^2 \sigma}{4 \pi \nu} \, . \, d\Omega$$

zugeführt. Im ganzen beträgt also die in der Zeit dt eingetretene Entropieänderung des den Resonator umgebenden Feldes, durch Subtraction des vorletzten Ausdruckes vom letzten und Integration über $d\Omega$:

$$dt \cdot \frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} \cdot \int d\Omega (\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}''' - \mathfrak{L} - \mathfrak{L}'). \tag{46}$$

Nimmt man dazu nach (41) die in derselben Zeit erfolgte Entropieänderung des Resonators:

$$\frac{dS}{dt} \cdot dt = -\frac{1}{a\nu} \frac{dU}{dt} \cdot \log \frac{U}{b\nu},$$

so ergiebt sich durch Addition zu (46) und Summation über alle Resonatoren die gesuchte Aenderung der totalen Entropie des Systemes:

$$\frac{dS_t}{dt} \cdot dt = dt \cdot \sum \left[\frac{3c^2\sigma}{4\pi\nu} \int d\Omega (\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}''' - \mathfrak{L} - \mathfrak{L}') - \frac{1}{a\nu} \frac{dU}{dt} \log \frac{U}{b\nu} \right].$$

Wir wollen nun weiter den Nachweis führen, dass der Ausdruck hinter dem Σ-Zeichen stets positiv ist, inbegriffen den Grenzfall Null.

Zu diesem Zwecke setzen wir für dU/dt den in (40) gegebenen Wert und erhalten dadurch und durch Berücksichtigung der Bedeutung von $\mathfrak{L}$ in (43):

$$\frac{dS_t}{dt} = \sum \frac{3c^2\sigma}{4\pi a\nu^2} \cdot \int d\Omega \left(\mathfrak{K} \log \frac{c^2\mathfrak{K}}{e\nu^2 U} + \mathfrak{K}' \log \frac{c^2\mathfrak{K}'}{e\nu^2 U} \right.$$
$$\left. - \mathfrak{K}'' \log \frac{c^2\mathfrak{K}''}{e\nu^2 U} - \mathfrak{K}''' \log \frac{c^2\mathfrak{K}'''}{e\nu^2 U} \right).$$

Es erübrigt jetzt noch zu zeigen, dass der eingeklammerte Ausdruck oder, falls man diesen mit der positiven Grösse $c^2/e\nu^2 U$ multiplicirt, dass der Ausdruck:

$$\alpha \log \alpha + \beta \log \beta - \gamma \log \gamma - \delta \log \delta,$$

wobei:

$$\alpha = \frac{c^2\mathfrak{K}}{e\nu^2 U}, \qquad \gamma = \frac{c^2\mathfrak{K}''}{e\nu^2 U},$$
$$\beta = \frac{c^2\mathfrak{K}'}{e\nu^2 U}, \qquad \delta = \frac{c^2\mathfrak{K}'''}{e\nu^2 U}$$

für alle beliebigen Werte der positiven Grössen $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, U, ϑ, ω, während $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'''$ durch (38) und (39) gegeben sind, positiv ist.

Nun haben wir für δ nach (39):

$$\delta = \frac{c^2}{e\nu^2 U} \left\{ (\mathfrak{K} \sin^2\omega + \mathfrak{K}' \cos^2\omega) \cos^2\vartheta + \frac{\nu^2 U}{c^2} \sin^2\vartheta \right\}$$

oder nach (38):

$$\delta = \frac{c^2}{e\,\nu^2\,U}\left\{(\mathfrak{K} + \mathfrak{K}' - \mathfrak{K}'')\cos^2\vartheta + \frac{\nu^2\,U}{c^2}\sin^2\vartheta\right\}$$
$$= (\alpha + \beta - \gamma)\cos^2\vartheta + \frac{\sin^2\vartheta}{e}.$$

Daher liegt δ zwischen dem Werte $1/e$ und dem Werte:

$$\alpha + \beta - \gamma = \delta_0. \tag{47}$$

Da nun für $\delta = 1/e$ die Function $-\delta\log\delta$ ihr absolutes und einziges Maximum annimmt, so liegt $-\delta\log\delta$ zwischen diesem Maximalwert und dem Wert $-\delta_0\log\delta_0$, d. h. es ist:

$$-\delta\log\delta > -\delta_0\log\delta_0$$

oder:

$$\alpha\log\alpha + \beta\log\beta - \gamma\log\gamma - \delta\log\delta$$
$$> \alpha\log\alpha + \beta\log\beta - \gamma\log\gamma - \delta_0\log\delta_0.$$

Um also das positive Vorzeichen des oberen Ausdruckes nachzuweisen, genügt es, dasselbe bei dem unteren Ausdruck zu thun. Setzen wir die Summe:

$$\alpha + \beta = \sigma,$$

so ist nach (47) auch die Summe:

$$\gamma + \delta_0 = \sigma.$$

Der zu untersuchende Ausdruck ist also:

$$[\alpha\log\alpha + (\sigma - \alpha)\log(\sigma - \alpha)] - [\gamma\log\gamma + (\sigma - \gamma)\log(\sigma - \gamma)]. \tag{48}$$

Betrachten wir jetzt das Verhalten der Function von x:

$$x\log x + (\sigma - x)\log(\sigma - x),$$

wo σ constant bleiben möge.

Diese Function erreicht ihr absolutes und einziges Minimum für $x = \sigma/2$, ihr Wert wird also um so kleiner, je näher x dem Werte $\sigma/2$ rückt, einerlei ob $x >$ oder $< \sigma/2$. Nun liegt nach (38) $\mathfrak{K}''$ zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$, folglich auch γ zwischen α und β, d. h. zwischen α und $\sigma - \alpha$, und daher liegt γ dem Werte $\sigma/2$, als dem arithmetischen Mittel von α und β, näher als α. Daraus folgt nach dem obigen, dass:

$$\gamma\log\gamma + (\sigma - \gamma)\log(\sigma - \gamma) < \alpha\log\alpha + (\sigma - \alpha)\log(\sigma - \alpha),$$

wodurch das positive Vorzeichen von (48) und somit die Vermehrung der Entropie nachgewiesen ist.

§ 19. Bedingungen des stationären Zustandes.

Derjenige Zustand des Systemes, dem das absolute Maximum der totalen Entropie entspricht, ist als stationärer Zustand zu bezeichnen; denn nach dem Satz der Vermehrung der Entropie ist von ihm aus überhaupt keine Veränderung mehr möglich, solange von aussen keine Einwirkungen auf das System erfolgen. Als notwendige Bedingung für den stationären Zustand ergiebt sich zunächst, dass die totale Entropie sich mit der Zeit nicht mehr ändert, dass also alle Ungleichungen des vorigen Paragraphen sich in Gleichungen verwandeln. Diese Bedingung wird, wie leicht einzusehen ist, erfüllt, wenn für alle Orte und für alle Richtungen:

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' = \mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}''' = \frac{\nu^2}{c^2} U. \tag{49}$$

Wir nehmen daher im ganzen Felde alle Strahlen einer jeden Schwingungszahl als unpolarisirt und von gleicher Intensität an.

Aber die für das absolute Maximum der totalen Entropie notwendigen Bedingungen gehen noch weiter. Es muss nämlich für *jede* unendlich kleine virtuelle Zustandsänderung des Systemes die Variation der totalen Entropie S_t verschwinden. Denken wir uns also eine virtuelle Aenderung, die darin besteht, dass eine unendlich kleine Menge Energie von einem Resonator mit der Schwingungszahl ν zu einem anderen Resonator mit der Schwingungszahl ν_1 übergeht, während sonst alles unverändert bleibt, so muss sein:

$$\delta S_t = \delta S + \delta S_1 = 0,$$

wenn S und S_1 die Entropien der beiden Resonatoren bezeichnen. Dabei ist nach dem Energieprincip:

$$\delta U + \delta U_1 = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert nach (41):

$$-\frac{1}{a\nu}\log\frac{U}{b\nu}\cdot\delta U - \frac{1}{a\nu_1}\log\frac{U_1}{b\nu_1}\cdot\delta U_1 = 0.$$

Folglich nach der zweiten Gleichung:

$$-\frac{1}{a\nu}\log\frac{U}{b\nu} = -\frac{1}{a\nu_1}\log\frac{U_1}{b\nu_1}.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$-\frac{1}{a\nu}\log\frac{U}{b\nu} = \frac{1}{\vartheta}, \tag{50}$$

so folgt aus der letzten Gleichung, da ν_1 ganz beliebig ist, dass der Wert von ϑ im stationären Zustand für sämmtliche im System vorhandene Resonatoren der nämliche sein muss. Da nun durch den Wert von U nach (49) auch der Wert der entsprechenden Energiestrahlung $\mathfrak{K}$ im stationären Zustand gegeben ist, so hängt der stationäre Zustand des ganzen Systemes in allen seinen Teilen nur von einem einzigen Parameter ϑ ab.

Wir wollen nun die Werte aller hier in Betracht kommenden Grössen im stationären Zustand durch diesen Parameter ϑ ausdrücken. Zunächst folgt aus (50) für die Energie eines Resonators mit der Schwingungszahl ν:

$$U = b\nu e^{-\frac{a\nu}{\vartheta}},$$

sodann aus (49) für die Intensität eines monochromatischen geradlinig polarisirten Strahles von der Schwingungszahl ν:

$$\mathfrak{K} = \frac{b\nu^3}{c^2} \cdot e^{-\frac{a\nu}{\vartheta}}, \tag{51}$$

ferner aus (25) für die Intensität der gesammten Energiestrahlung in irgend einer Richtung:

$$K = 2\int_0^\infty \mathfrak{K}\, d\nu = \frac{12\, b\, \vartheta^4}{c^2 a^4} \tag{52}$$

und aus (28) für die räumliche Energiedichte des Feldes:

$$u = \frac{4\pi K}{c} = \frac{48\pi b \vartheta^4}{c^3 a^4}. \tag{53}$$

Diese Energiedichte setzt sich aus den Energiedichten $\mathfrak{u}$ der einzelnen Schwingungszahlen in folgender Weise zusammen:

$$u = \int_0^\infty \mathfrak{u}\, d\nu,$$

$$\mathfrak{u} = \frac{8\pi\mathfrak{K}}{c} = \frac{8\pi b \nu^3}{c^3} e^{-\frac{a\nu}{\vartheta}}.$$

Dagegen ist die Entropie eines Resonators mit der Schwingungszahl ν nach (41) und (50):

$$S = b\left(\frac{\nu}{\vartheta} + \frac{1}{a}\right) e^{-\frac{a\nu}{\vartheta}},$$

die Intensität der Entropiestrahlung von der Schwingungszahl ν nach irgend einer Richtung gemäss (43) und (51):

$$\mathfrak{L} = \frac{b\nu^2}{c^2}\left(\frac{\nu}{\vartheta} + \frac{1}{a}\right)e^{-\frac{a\nu}{\vartheta}},$$

die Intensität der gesammten Entropiestrahlung nach irgend einer Richtung gemäss (44):

$$L = 2\int_0^\infty \mathfrak{L}\,d\nu = \frac{16\,b\,\vartheta^3}{c^2\,a^4},$$

schliesslich die räumliche Dichtigkeit der Entropie des Feldes nach (45):

$$s = \frac{4\pi L}{c} = \frac{64\pi b\,\vartheta^3}{c^3 a^4}, \tag{54}$$

die sich aus den Entropiedichten $\mathfrak{s}$ der einzelnen Schwingungszahlen folgendermaassen zusammensetzt:

$$s = \int_0^\infty \mathfrak{s}\,d\nu,$$

$$\mathfrak{s} = \frac{8\pi\mathfrak{L}}{c} = \frac{8\pi b\nu^2}{c^3}\left(\frac{\nu}{\vartheta} + \frac{1}{a}\right)e^{-\frac{a\nu}{\vartheta}}.$$

Dass bei den hier angegebenen Werten die totale Entropie S_t des Systemes wirklich ihr absolutes Maximum besitzt, kann man leicht aus der Bildung der ersten und zweiten Variation von S_t beweisen.

Dritter Abschnitt.

Thermodynamische Folgerungen.

§ 20. Thermodynamische Entropie der Strahlung.

Sobald man die elektrodynamische Natur der Licht- und Wärmestrahlung anerkennt, gewinnt der im vorigen Abschnitt behandelte stationäre Strahlungszustand eine principielle thermodynamische Bedeutung. Denn nach einem von G. Kirchhoff abgeleiteten und dann namentlich von Hrn. W. Wien[1]) zu wichtigen Schlussfolgerungen benutzten Satze ist die Wärmestrahlung, welche sich in einem rings von gleichmässig tem-

1) W. Wien, Wied. Ann. 52. p. 133. 1894.

perirten Körpern genügender Dicke umschlossenen Vacuum herausbildet, nicht abhängig von der Beschaffenheit der Körper, sondern vollkommen bestimmt durch einen einzigen Parameter: die Temperatur. Die Strahlung ist also die nämliche, wie wenn die umgebenden Körper sich gegen das Vacuum vollkommen „schwarz" verhielten.

Derselbe Satz gilt selbstverständlich auch dann, wenn die Wände des Vacuums absolut spiegeln und wenn die Körper irgendwie im Vacuum eingebettet sind, vorausgesetzt nur, dass aus jedem Spectralbezirk wenigstens an Einer Stelle des Systemes Strahlen in endlichem Betrage emittirt werden. Ist nämlich diese letztere Bedingung nicht erfüllt, so könnte im Vacuum auch ein in gewissem Sinne labiler Strahlungszustand zu Stande kommen, in welchem einzelne Farben ganz fehlen.

Da nun nach dem genannten Satze die Zahl, die Grösse und die Natur der im Vacuum befindlichen emittirenden und absorbirenden Körper für die Beschaffenheit der stationären Strahlung völlig gleichgültig ist, so wird man ohne weiteres zu dem Schlusse gedrängt, *dass auch der in dem vorhergehenden Abschnitt behandelte stationäre Strahlungszustand des Vacuums die Bedingungen der Strahlung des schwarzen Körpers erfüllt, ganz ohne Rücksicht auf die Frage, ob die dort vorausgesetzten elektromagnetischen Resonatoren mit den Centren der Wärmestrahlung in bestimmten wirklichen Körpern eine grössere oder geringere Aehnlichkeit aufweisen.*

Zu demselben Schluss führt eine etwas andere Ueberlegung. Der zweite Hauptsatz der Wärmetheorie verlangt bekanntlich, dass nicht nur der ruhenden, sondern auch der strahlenden Wärme eine bestimmte Entropie zukommt[1]; denn wenn ein Körper Wärme durch Ausstrahlung verliert, so nimmt seine Entropie ab, und es muss nach dem Princip der Vermehrung der Entropie als Compensation anderswo eine Entropiezunahme eintreten, die in dem genannten Fall ihren Sitz nur in der entstandenen Wärmestrahlung haben kann. Wenn nun thermische und elektromagnetische Strahlung identificirt werden, so bleibt nichts übrig, als auch die thermische Strahlungsentropie, die doch durch die Beschaffenheit der Strahlung

1) Vgl. W. Wien, l. c.

selber vollständig bestimmt sein muss, mit der elektromagnetischen vollständig zu identificiren. Indem wir dies thun, gelangen wir wiederum zu der Folgerung, dass der dem absoluten Maximum der Entropie entsprechende stationäre Strahlungszustand zugleich den Gleichgewichtszustand der Wärmestrahlung, also die Strahlung des schwarzen Körpers ergiebt.

Aus der Identificirung der thermodynamischen mit der elektromagnetischen Entropie fliessen nun eine Reihe von Beziehungen zwischen thermischen und elektrischen Grössen, deren wichtigste in den folgenden Paragraphen besprochen werden sollen.

§ 21. Elektromagnetische Definition der Temperatur.

Durch die Entropie eines im thermodynamischen Gleichgewicht befindlichen Systemes ist auch seine Temperatur bestimmt. Denn die absolute Temperatur ist das Verhältnis einer unendlich kleinen, dem System zugeführten Wärmemenge zu der dadurch verursachten Entropieänderung, falls das System während der Zustandsänderung im thermodynamischen Gleichgewicht gehalten wird. Nehmen wir also etwa die Volumeneinheit des von der stationären Strahlung erfüllten Vacuums und halten das Volumen constant und die Strahlung stationär, so ist die Energie des Systemes u, und der Betrag einer dem System zugeführten unendlich kleinen Wärmemenge gleich der Energieänderung, also nach (53):

$$du = \frac{192\,\pi\, b\, \vartheta^3}{c^3\, a^4} \cdot d\vartheta,$$

ferner die dadurch verursachte Aenderung der Entropie s des Systemes nach (54):

$$ds = \frac{192\,\pi\, b\, \vartheta^2}{c^3\, a^4} \cdot d\vartheta,$$

also die absolute Temperatur gleich dem Verhältnis:

$$du : ds = \vartheta.$$

Die absolute Temperatur des im stationären Strahlungszustand befindlichen Vacuums ist also nichts anderes als der im § 19 eingeführte rein elektromagnetisch definirte Parameter ϑ, von

welchem alle Eigenschaften dieses Zustandes in der dort schon berechneten Weise abhängen. Daher ist nach (51) die reciproke Temperatur eines geradlinig polarisirten monochromatischen Strahles von der Schwingungszahl ν und der Intensität $\mathfrak{K}$:

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{1}{a\,\nu} \log \frac{b\,\nu^3}{c^2\,\mathfrak{K}}.$$

Wenn die Bedingungen des stationären Zustandes nicht erfüllt sind, sondern wenn beliebige Strahlungsvorgänge im Vacuum stattfinden, so kann man nicht mehr von der Temperatur eines bestimmten Ortes, ja nicht einmal mehr von der Temperatur der Strahlung in einer bestimmten Richtung reden, sondern man muss jedem einzelnen geradlinig polarisirten monochromatischen Strahl eine besondere Temperatur zuschreiben, welche durch seine Intensität und durch seine Schwingungszahl nach der letzten Gleichung bestimmt ist.[1]) Diese seine Temperatur behält der Strahl beim Fortschreiten zugleich mit seiner Intensität unverändert bei, auch wenn er z. B. durch einen Brennpunkt hindurchgeht, solange, bis er geteilt oder absorbirt wird.

Andererseits besitzt jeder Resonator eine ganz bestimmte, durch (50) gegebene Temperatur. Der stationäre Strahlungszustand kann dann auch dadurch charakterisirt werden, dass alle Resonatoren und alle monochromatischen Strahlen des Systemes die nämliche Temperatur besitzen.

§ 22. Abhängigkeit der Gesammtstrahlung von der Temperatur.

Die Gesammtintensität der Energiestrahlung nach irgend einer Richtung ist gegeben durch den Ausdruck von K in (52), welcher, insofern er der vierten Potenz der Temperatur proportional ist, das bekannte Stefan-Boltzmann'sche Gesetz ausspricht, dessen Gültigkeit auf thermodynamischem Wege von Hrn. L. Boltzmann[2]) begründet wurde und neuerdings durch

1) Die Notwendigkeit einer derartigen Erweiterung des Temperaturbegriffes ist wohl zuerst von Hrn. E. Wiedemann betont worden. Wied. Ann. **34**. p. 448. 1888; vgl. auch W. Wien, l. c. p. 132.

2) L. Boltzmann, Wied. Ann. **22**. p. 291. 1884.

die Untersuchungen der Herren O. Lummer und E. Pringsheim[1]), wenigstens innerhalb des Temperaturintervalls von $\vartheta = 290^0$ bis $\vartheta = 1560^0$, eine merkliche experimentelle Bestätigung erhalten hat.

§ 23. Verteilung der Energie im Normalspectrum.

Das Gesetz, nach welchem sich bei der stationären Strahlung die Gesamtstrahlungsintensität K auf die Strahlungsintensitäten $\mathfrak{K}$ der einzelnen Schwingungszahlen verteilt, ist gegeben durch die Gleichung (51). Da dieses Gesetz gewöhnlich nicht auf Schwingungszahlen ν, sondern auf Wellenlängen λ bezogen wird, so wollen wir auch hier die bezügliche Umformung vornehmen, indem wir mit $E_\lambda\, d\lambda$ die gesamte (unpolarisirte) zwischen den Wellenlängen λ und $\lambda + d\lambda$ gelegene Strahlung in irgend einer Richtung bezeichnen. Dann ist nach (25):

$$K = 2\int\limits_0^\infty \mathfrak{K}\, d\nu = \int\limits_0^\infty E_\lambda\, d\lambda .$$

Folglich, wenn man im ersten Integral statt ν

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

als Integrationsvariable einführt, da:

$$d\nu = -\frac{c\, d\lambda}{\lambda^2},$$

$$\int\limits_0^\infty E_\lambda\, d\lambda = 2\, c \int\limits_0^\infty \frac{\mathfrak{K}}{\lambda^2}\, d\lambda,$$

und daraus folgt:

$$E_\lambda = \frac{2\, c\, \mathfrak{K}}{\lambda^2},$$

oder nach (51), mit Einführung von λ statt ν:

$$E_\lambda = \frac{2\, c^2\, b}{\lambda^5} \cdot e^{-\frac{a\, c}{\lambda\, \vartheta}} . \tag{55}$$

Dies ist genau das von Hrn. W. Wien[2]) aufgestellte Energieverteilungsgesetz, dessen wenigstens angenäherte Gültigkeit gerade in neuerer Zeit durch die fortgesetzten Untersuchungen

1) O. Lummer u. E. Pringsheim, Wied. Ann. **63**. p. 395. 1897.
2) W. Wien, Wied. Ann. 58. p. 662. 1896.

der Herren F. Paschen[1]), F. Paschen und H. Wanner[2]), O. Lummer und E. Pringsheim[3]) dargethan worden ist.

Hr. Wien hat sein Gesetz auf Grund gewisser Voraussetzungen über die Zahl der in der Volumeneinheit befindlichen Strahlungscentren und über die Geschwindigkeit ihrer Bewegung abgeleitet; in der hier entwickelten Theorie spielen diese Grössen keine Rolle, sondern das Gesetz erscheint als eine notwendige Folge der im § 17 aufgestellten Definition der elektromagnetischen Entropie der Strahlung; die Frage nach der Notwendigkeit des Gesetzes fällt also zusammen mit der Frage nach der Notwendigkeit jener Definition. Ich habe mich wiederholt bemüht, den Ausdruck (41) für die elektromagnetische Entropie eines Resonators, durch welchen dann auch der Ausdruck (43) für die Entropie der Strahlung bedingt ist, so abzuändern bez. zu verallgemeinern, dass er immer noch allen theoretisch wohlbegründeten elektromagnetischen und thermodynamischen Gesetzen Genüge leistet, aber es ist mir dies nicht gelungen. So z. B. könnte man die Entropie eines Resonators statt durch (41) allgemeiner folgendermaassen definiren:

$$S = -\frac{U}{f(\nu)} \cdot \log \frac{U}{\varphi(\nu)},$$

wobei $f(\nu)$ und $\varphi(\nu)$ unbestimmte positive Functionen der Schwingungszahl ν sind. Dann würde zwar bei den im § 18 untersuchten elektromagnetischen Vorgängen das Princip der Vermehrung der Entropie erfüllt, aber man erhielte dann statt (50) als reciproke Temperatur des Resonators den Ausdruck:

$$\frac{1}{\vartheta} = -\frac{1}{f(\nu)} \cdot \log \frac{e\,U}{\varphi(\nu)},$$

also:

$$U = \frac{\varphi(\nu)}{e} \cdot e^{-\frac{f(\nu)}{\vartheta}}$$

und als Energieverteilungsgesetz aus (49) statt (51):

---

1) F. Paschen, Wied. Ann. **60**. p. 662. 1897; Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 405, p. 893. 1899.

2) F. Paschen u. H. Wanner, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 5. 1899.

3) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. **1**. p. 23, p. 215. 1899. Vgl. ferner H. Beckmann, Inaug.-Diss., Tübingen 1898 und H. Rubens, Wied. Ann. **69**. p. 582. 1899. In den drei letztgenannten Arbeiten werden Abweichungen vom Wien'schen Gesetz gefunden. (Anm. bei d. Corr.)

$$\mathfrak{K} = \frac{\nu^2 \varphi(\nu)}{c^2 e} \cdot e^{-\frac{f(\nu)}{\vartheta}}. \tag{56}$$

Dies ist nun gerade diejenige Form des Energievertheilungsgesetzes, zu welcher Hr. Wien auf Grund der oben erwähnten Voraussetzungen gelangte und von welcher er nachgewiesen hat, dass sie auf Grund zuverlässig begründeter Schlussfolgerungen zu der speciellen von ihm angegebenen Form führt.

Versucht man dagegen irgend eine von (56) abweichende Form des Energieverteilungsgesetzes zu Grunde zu legen und berechnet daraus rückwärts den Ausdruck der Entropie, so trifft man immer auf Widersprüche mit dem im § 18 bewiesenen Satze der Vermehrung der Entropie.

Ich glaube hieraus schliessen zu müssen, dass die im § 17 gegebene Definition der Strahlungsentropie und damit auch das Wien'sche Energievertheilungsgesetz eine notwendige Folge der Anwendung des Principes der Vermehrung der Entropie auf die elektromagnetische Strahlungstheorie ist und dass daher die Grenzen der Gültigkeit dieses Gesetzes, falls solche überhaupt existiren, mit denen des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie zusammenfallen. Natürlich gewinnt eben dadurch die weitere experimentelle Prüfung dieses Gesetzes ein um so grösseres principielles Interesse.

§ 24. Strahlung in einem beliebigen Medium.

Wenn die Resonatoren nicht im Vacuum, sondern in einem beliebigen diathermanen Medium eingebettet sind, so erleiden die oben abgeleiteten Formeln dadurch eine Abänderung, dass statt der Lichtgeschwindigkeit c im Vacuum die im Dielektricum c' auftritt. Demgemäss beträgt in einem solchen Medium die Gesamtstrahlungsintensität eines schwarzen Körpers von der Temperatur ϑ normal zu seiner Oberfläche nach (52):

$$K' = \frac{12\, b\, \vartheta^4}{c'^2 a^4}$$

oder:

$$K : K' = \frac{1}{c^2} : \frac{1}{c'^2}.$$

D. h. die Strahlungsintensitäten des schwarzen Körpers in zwei verschiedenen diathermanen Medien bei der nämlichen Temperatur verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der Lichtgeschwindigkeiten, — der bekannte, zuerst von G. Kirchhoff, später von R. Clausius bewiesene Satz.

Hierbei mag noch auf den bekannten Umstand hingewiesen werden, dass ein Körper, der im Vacuum schwarz erscheint, diese Eigenschaft notwendig verliert, wenn er in ein Medium mit einer von c verschiedenen Lichtgeschwindigkeit gebracht wird. Ob also ein Körper schwarz ist oder nicht, hängt nicht allein von seiner eigenen Beschaffenheit ab, sondern auch von der des angrenzenden Mediums. Aus diesem Grunde dürfte es für die Klarheit der Ausdrucksweise in manchen Fällen förderlich sein, in erster Linie nicht von schwarzen „Körpern“, sondern von schwarzen „Oberflächen“ zu sprechen: das sind solche Oberflächen, an denen keine Reflexion stattfindet. Das Kriterium eines schwarzen „Körpers“ ist verwickelter: es gehört dazu notwendig erstens eine schwarze Oberfläche, zweitens aber auch für jede Strahlenart eine gewisse Dicke des Körpers, deren Mindestbetrag durch das Absorptionsvermögen der Substanz für diese Strahlenart bestimmt wird. Durch die Trennung dieser beiden für den Begriff des schwarzen Körpers wesentlichen, voneinander aber ganz unabhängigen Bedingungen wird die Verschiedenheit der physikalischen Vorgänge an der Grenze und derer im Innern schärfer zum Ausdruck gebracht. Denn auch bei den stark absorbirenden und emittirenden Substanzen ist kaum eine andere Auffassung möglich, als dass ihre Strahlung nach aussen nicht von ihrer Oberfläche, sondern aus ihrem Innern stammt, und dass die Oberfläche lediglich die Bedeutung hat, die von innen kommenden Strahlen theils durch Reflexion in das Innere zurückzuwerfen, theils durch Refraction nach aussen austreten zu lassen.[1])

---

1) Diese Auffassung findet sich näher ausgeführt bei folgenden Autoren: E. Lommel, Wied. Ann. **10.** p. 449. 1880; E. Lecher, Wied. Ann. **17.** p. 477. 1882; P. H. Dojes, Verhandelingen der Kon. Akad. van Wetensch. Amsterdam, 1. Sectie 3. Nr. 4. 1896 (Wied. Beibl. **20.** p. 125. 1896); Smoluchowski de Smolan, Journ. de Phys. (3) **5.** p. 488. 1896; W. von Uljanin, Wied. Ann. **62.** p. 528. 1897; F. Kurlbaum, Wied. Ann. **67.** p. 846. 1899.

§ 25. Zahlenwerte.

Die Werte der universellen Constanten a und b lassen sich mit Hülfe der vorliegenden Messungen mit ziemlicher Annäherung berechnen.

Hr. F. Kurlbaum[1]) hat gefunden, dass, wenn man mit S_t die gesamte Energie bezeichnet, die von 1 qcm eines auf t^0 C. befindlichen schwarzen Körpers in 1 Sec. in die Luft gestrahlt wird:

$$S_{100} - S_0 = 0{,}01763 \text{ g-Cal.}$$

Andererseits beträgt nach (52) die gesamte von der Flächeneinheit eines schwarzen Körpers in der Zeiteinheit nach allen Richtungen des Halbraumes ausgestrahlte Energie:

$$\int K \cos \vartheta \, d\Omega = K \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = \pi K = \frac{12 \pi b \vartheta^4}{c^2 a^4}.$$

Folglich, wenn das mechanische Wärmeäquivalent zu $419 \cdot 10^5$ angenommen wird, im absoluten C.G.S.-Maasse:

$$\frac{12 \pi b (373^4 - 273^4)}{c^2 a^4} = 0{,}01763 . 419 . 10^5$$

oder, da $c = 3 . 10^{10}$:

$$\frac{b}{a^4} = 1{,}278 . 10^{15}. \tag{57}$$

Ferner ist von Hrn. F. Paschen[2]) als Mittel aus seinen besten Beobachtungen der Wert der Constanten im Exponenten der Wien'schen Formel (55) zu 14455 [$\mu \times$ Celsiusgrad] angegeben worden. Dies ergiebt, bezogen auf Centimeter:

$$a c = 1{,}4455$$

oder:

$$a = 0{,}4818 . 10^{-10} [\text{sec} \times \text{Celsiusgrad}]$$

und daraus nach (57):

$$b = 6{,}885 . 10^{-27} [\text{erg} \times \text{sec}].$$

§ 26. Natürliche Maasseinheiten.

Alle bisher in Gebrauch genommenen physikalischen Maasssysteme, auch das sogenannte absolute C.G.S.-System, verdanken

1) F. Kurlbaum, Wied. Ann. **65.** p. 754. 1898.

2) F. Paschen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 419. 1899.

ihren Ursprung insofern dem Zusammentreffen zufälliger Umstände, als die Wahl der jedem System zu Grunde liegenden Einheiten nicht nach allgemeinen, notwendig für alle Orte und Zeiten bedeutungsvollen Gesichtspunkten, sondern wesentlich mit Rücksicht auf die speciellen Bedürfnisse unserer irdischen Cultur getroffen ist. So sind die Einheiten der Länge und der Zeit aus den gegenwärtigen Dimensionen und der gegenwärtigen Bewegung unseres Planeten hergeleitet worden, ferner die Einheit der Masse und der Temperatur aus der Dichte und den Fundamentalpunkten des Wassers, als derjenigen Flüssigkeit, die an der Erdoberfläche die wichtigste Rolle spielt, genommen bei einem Druck, der der mittleren Beschaffenheit der uns umgebenden Atmosphäre entspricht. An dieser Willkür würde principiell auch nichts Wesentliches geändert werden, wenn etwa zur Längeneinheit die unveränderliche Wellenlänge des Na-Lichtes genommen würde. Denn die Auswahl gerade des Na unter den vielen chemischen Elementen könnte wiederum nur etwa durch sein häufiges Vorkommen auf der Erde oder etwa durch seine für unser Auge glänzende Doppellinie, die keineswegs einzig in ihrer Art dasteht, gerechtfertigt werden. Es wäre daher sehr wohl denkbar, dass zu einer anderen Zeit, unter veränderten äusseren Bedingungen, jedes der bisher in Gebrauch genommenen Maasssysteme seine ursprüngliche natürliche Bedeutung theilweise oder gänzlich verlieren würde.

Dem gegenüber dürfte es nicht ohne Interesse sein zu bemerken, dass mit Zuhülfenahme der beiden in dem Ausdruck (41) der Strahlungsentropie auftretenden Constanten a und b die Möglichkeit gegeben ist, Einheiten für Länge, Masse, Zeit und Temperatur aufzustellen, welche, unabhängig von speciellen Körpern oder Substanzen, ihre Bedeutung für alle Zeiten und für alle, auch ausserirdische und aussermenschliche Culturen notwendig behalten und welche daher als „natürliche Maasseinheiten" bezeichnet werden können.

Die Mittel zur Festsetzung der vier Einheiten für Länge, Masse, Zeit und Temperatur werden gegeben durch die beiden erwähnten Constanten a und b, ferner durch die Grösse der Lichtfortpflanzungsgeschwindigkeit c im Vacuum und durch die der Gravitationsconstante f. Bezogen auf Centimeter,

Gramm, Secunde und Celsiusgrad sind die Zahlenwerte dieser vier Constanten die folgenden:

$$a = 0{,}4818 . 10^{-10} [\text{sec} \times \text{Celsiusgrad}],$$

$$b = 6{,}885 . 10^{-27} \left[\frac{\text{cm}^2 \text{g}}{\text{sec}}\right],$$

$$c = 3{,}00 . 10^{10} \left[\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right],$$

$$f = 6{,}685 . 10^{-8} \left[\frac{\text{cm}^3}{\text{g sec}^2}\right]. \; ^{1)}$$

Wählt man nun die „natürlichen Einheiten" so, dass in dem neuen Maasssystem jede der vorstehenden vier Constanten den Wert 1 annimmt, so erhält man als Einheit der Länge die Grösse:

$$\sqrt{\frac{b f}{c^3}} = 4{,}13 . 10^{-33} \text{ cm},$$

als Einheit der Masse:

$$\sqrt{\frac{b c}{f}} = 5{,}56 . 10^{-5} \text{ g},$$

als Einheit der Zeit:

$$\sqrt{\frac{b f}{c^5}} = 1{,}38 . 10^{-43} \text{ sec},$$

als Einheit der Temperatur:

$$a \sqrt{\frac{c^5}{b f}} = 3{,}50 . 10^{32} {}^\circ \text{ C}.$$

Diese Grössen behalten ihre natürliche Bedeutung solange bei, als die Gesetze der Gravitation, der Lichtfortpflanzung im Vacuum und die beiden Hauptsätze der Wärmetheorie in Gültigkeit bleiben, sie müssen also, von den verschiedensten Intelligenzen nach den verschiedensten Methoden gemessen, sich immer wieder als die nämlichen ergeben.

---

1) F. Richarz u. O. Krigar-Menzel, Anhang zu den Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin **107**. p. 110. 1898; im Auszug: Wied. Ann. **66**. p. 190. 1898.

(Eingegangen 7. November 1899.)

5. *Ueber den Einfluss der Temperatur auf die elektrische Leitungsfähigkeit schwacher Amalgame und die Löslichkeit von Metallen in Quecksilber; von Absalon Larsen.*

Die Leitungsfähigkeit der Amalgame ist mehrfach untersucht worden. Matthiessen und Vogt[1]) beschränken sich auf die Untersuchung schwacher Amalgame bei ca. 13°. C. L. Weber[2]) beginnt mit den von Matthiessen und Vogt beobachteten Unregelmässigkeiten starker Amalgame und untersucht namentlich das Verhalten verschiedener Zinnamalgame bei Erwärmung und Abkühlung, schliesst aber seine Arbeit mit der Untersuchung schwacher Amalgame bei Temperaturen von ca. 15—40°, da im Verhalten starker Amalgame bei niedrigen Temperaturen keine Gesetzmässigkeit zu finden war. Battelli[3]) hat eine grosse Arbeit, sowohl über flüssige als feste Amalgame durchgeführt und zwar für die ersteren immer bei solchen Temperaturen, bei denen die Amalgame homogen waren.

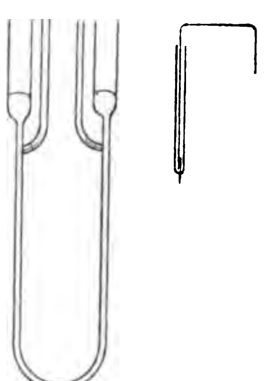
Die bisherigen Bestimmungen lassen aber nicht die Frage nach den Veränderungen der Temperaturcoefficienten mit der Concentration beantworten. Die Temperaturcoefficienten C. L. Weber's zeigen durchaus keine Gesetzmässigkeit, die Battelli's nur eine teilweise. Endlich fehlen bisher genaue Angaben über die Grenze der vollkommenen Homogenität der Amalgame und den Einfluss der Temperatur auf dieselbe.

Bei meinen Versuchen waren die Amalgame in drei Röhren von der Form (Fig. 1) enthalten. Höhe der Röhren ca. 30 cm, Durchmesser bez. 0,5 cm und 2 cm. Neben der Röhre ist die Form der Elektroden dargestellt.

Der Widerstand des zwischen den beiden in Fig. 1 ersichtlichen eingeschmolzenen Platinspitzen gelegenen Teiles des Amalgams wurde mit dem Widerstande eines ähnlichen

1) Matthiessen u. Vogt, Pogg. Ann. 116. p. 369. 1862.
2) C. L. Weber, Wied. Ann. 23. p. 447. 1884.
3) A. Battelli, Memorie dei Lincei (4) 4. p. 206. 1887.

in einer vierten Röhre enthaltenen Quecksilberfadens verglichen. Die Röhren standen in einem gemeinsamen Glycerinbade. Ein mechanisch getriebener Rührer, elektrische Heizung und Wasserkühlung dienten dazu, die Temperatur zu erhöhen, herabzusetzen oder beliebig lange constant zu halten. Die Messmethode war die von G. Kirchhoff angegebene zur Vergleichung ungleicher Widerstände mittels des Differentialgalvanometers. Die Amalgame der Metalle Pb, Zn und Cd wurden auf elektrolytischem Wege in den Röhren selbst gebildet. Nach Ausscheidung einer gewissen Menge Metall, wurden die Lösungen (20 Proc. Bleinitrat, 20 Proc. Zinksulfat, 20 Proc. Cadmiumsulfat) fortgespült und durch reines Wasser ersetzt. Auch das reine Quecksilber stand unter Wasser. Die Verhältnisse der Widerstandscapacitäten der Röhren wurden dadurch nicht geändert. Die Amalgame der Metalle Sn und Bi wurden durch Hinzufügen bekannter Mengen eines starken Amalgams zum Quecksilber oder zum schon vorhandenen Amalgam gebildet. Dieselben standen ebenfalls unter Wasser.


Fig. 1.

Nach einer Widerstandsmessung wurde die Concentration gesteigert, der Widerstand wieder gemessen etc. Bei mehreren Concentrationen wurden Widerstandsmessungen bei mehreren Temperaturen sowohl nach Erwärmung, als nach Abkühlung unternommen. In dieser Weise wurde fortgefahren, bis eine geringere Zunahme der Leitungsfähigkeit, als erwartet, die Teilung des Amalgams in einen festen und einen flüssigen Teil vermuten liess. Dann wurde die Temperatur erhöht, bis das Amalgam nach Hin- und Herbewegung in der Röhre wieder vollkommen flüssig war. Die gemessene Leitungsfähigkeit erreichte dann immer wieder einen der Concentration entsprechenden Wert. Nach Bestimmung des Temperaturcoefficienten über diese Temperatur wurde das Amalgam langsam abgekühlt. Bei verschiedenen Temperaturen wurde die Temperatur 1 bis 2 Tage auf 0,1° genau constant gehalten. War die Temperatur unter die Grenze der Löslichkeit gesunken, so zeigte sich beim

Constanthalten der Temperatur zunächst eine schnelle, dann eine langsame Abnahme der Leitungsfähigkeit des im engeren Teile der Röhre enthaltenen Amalgams. Gleichzeitig schied sich ein fester Teil des Amalgams aus, welcher wegen seiner geringeren Dichte sich auf der Oberfläche sammelte. Nach einer gewissen Zeit blieb die Leitungsfähigkeit constant. Aus derselben liess sich die Concentration des im engeren Teile der Röhre enthaltenen Amalgams berechnen.

In den folgenden Tabellen bedeutet p Gewichtstheile Metall in 1000 Gewichtsteile Quecksilber, t die Temperatur und L_t die Leitungsfähigkeit des Amalgams bei der Temperatur t, bezogen auf Quecksilber von derselben Temperatur. L_t wird im Folgenden kurz die relative Leitungsfähigkeit genannt. Die Zahlen der einzelnen Columnen sind in derselben Reihenfolge aufgeschrieben, in welcher die Bestimmungen gemacht worden sind. Die zwischen Klammern gestellten Zahlen beziehen sich auf heterogene Amalgame. Die cursiv gedruckten Zahlen beziehen sich auf die in der oben beschriebenen Weise erhaltenen, bei der betreffenden Temperatur gesättigten Amalgame.

Tabelle I.

Bleiamalgame.

p	t	L_t	$p = 6,95$		$p = 13,73$		$p = 17,29$		$p =$	
			t	L_t	t	L_t	t	L_t	t	L_t
0,302	17,0°	1,0020	16,8°	1,0405	16,0°	1,0724	—	—	28,2°	1,0897
0,601	18,0	1,0041	44,0	1,0412	46,5	1,0740	—	—	38,8	1,0903
1,214	16,1	1,0079	62,6	1,0417	64,0	1,0753	—	—	45,6	1,0912
1,821	16,6	1,0117	80,0	1,0424	80,0	1,0763	—	—	55,1	1,0918
2,700	16,8	1,0171	47,9	1,0414	68,1	1,0755	34,8°	1,0883	47,3	1,0913
3,593	16,9	1,0222	16,8	1,0405	62,2	1,0750	43,1	1,0890	37,2	1,0904
5,229	16,7	1,0312	—	—	46,2	1,0741	51,0	1,0896	26,0	1,0897
6,946	17,7	1,0406	—	—	16,7	1,0725	60,4	1,0903	—	—
8,707	17,0	1,0496	—	—	—	—	73,4	1,0914	*24,0*	*1,0860*
10,197	17,1	1,0568	—	—	—	—	83,2	1,0924	*23,3*	*1,0849*
11,96	15,9	1,0648	—	—	—	—	26,0	1,0876	*21,8*	*1,0830*
13,73	16,2	1,0724	—	—	—	—	—	—	*20,8*	*1,0818*
15,53	16,7	(1,0766)	—	—	—	—	—	—	*20,3*	*1,0810*
17,29	16,7	(1,0773)	—	—	—	—	—	—	*17,5*	*1,0778*

Tabelle II.

Zinkamalgame.

p	t	L_t	p	t	L_t	p	t	L_t
0,095	17,0°	1,0022	4,340	16,0°	1,0669	12,42	20,0°	1,1817
0,190	18,0	1,0039	4,904	16,7	1,0747	13,58	19,9	1,1965
0,384	16,1	1,0069	5,466	16,5	1,0830	14,50	20,0	1,2085
0,575	16,6	1,0102	6,072	16,8	1,0919	15,62	19,6	1,2227
0,853	16,8	1,0148	6,294	16,9	1,0952	16,32	19,7	1,2319
1,137	16,9	1,0192	7,177	17,0	1,1079	17,32	19,7	1,2436
1,653	16,7	1,0274	7,611	20,1	1,1146	17,97	19,6	1,2524
2,195	17,7	1,0348	8,219	21,3	1,1232	18,80	19,4	1,2615
2,752	17,1	1,0443	9,346	20,1	1,1391	19,16	19,4	1,2685
3,228	17,1	1,0504	10,48	20,2	1,1551	20,49	19,4	(1,2785)
3,780	15,9	1,0584	11,59	20,1	1,1705	21,07	19,6	(1,2818)

Tabelle III.

Zinkamalgame.

p = 2,195		p = 4,340		p = 7,177		p = 14,50		p = 16,78		p =	
t	L_t	t	L_t	t	L_t	t	L_t	t	L_t	t	L_t
16,8°	1,0350	16,0°	1,0669	17,0°	1,1079	19,5°	1,2084	21,6°	1,2373	29,0°	1,2967
44,0	1,0356	46,8	1,0676	23,1	1,1082	24,6	1,2086	40,9	1,2396	38,8	1,2977
62,2	1,0364	64,4	1,0682	35,4	1,1084	32,0	1,2094	54,3	1,2408	45,5	1,2988
80,4	1,0363	79,0	1,0680	43,1	1,1087	43,0	1,2102	65,1	1,2416	55,1	1,2995
47,1	1,0353	60,2	1,0674	51,1	1,1089	51,1	1,2108	72,8	1,2428	47,4	1,2980
16,8	1,0345	57,5	1,0673	60,1	1,1091	39,5	1,2098	80,4	1,2439	37,3	1,2968
—	—	51,7	1,0671	73,5	1,1092	25,5	1,2083	66,8	1,2422	26,0	1,2950
—	—	16,7	1,0661	82,1	1,1084	—	—	31,3	1,2380	*23,3*	*1,2943*
—	—	—	—	33,6	1,1066	—	—	24,2	1,2375	*21,8*	*1,2906*
—	—	—	—	26,1	1,1063	—	—	—	—	*20,8*	*1,2847*
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*20,2*	*1,2815*
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	*17,5*	*1,2670*

Tabelle IV.

Cadmiumamalgame.

p	t	L_t	p	t	L_t	p	t	L_t
0,163	17,0°	1,0016	10,38	16,8°	1,0783	30,81	19,6°	1,2158
0,325	18,0	1,0030	10,75	16,9	1,0811	32,24	19,4	1,2251
0,656	16,1	1,0054	12,27	17,0	1,0919	33,19	19,4	1,2310
0,984	16,6	1,0078	13,11	20,1	1,0975	35,12	19,4	1,2435
1,459	16,8	1,0115	14,15	21,3	1,1048	37,03	19,7	1,2569
1,944	16,9	1,0153	16,08	21,3	1,1185	39,08	19,8	1,2690
2,825	16,7	1,0222	18,01	20,2	1,1316	42,05	19,8	1,2865
3,752	17,7	1,0292	19,92	20,1	1,1450	45,05	19,4	1,3047
4,704	17,0	1,0367	21,34	20,0	1,1546	48,03	19,3	1,3220
5,509	17,1	1,0429	23,22	19,9	1,1671	51,01	19,6	(1,3395)
6,461	15,9	1,0496	24,89	19,4	1,1785	51,01	19,6	(1,3422)
7,419	16,0	1,0568	26,80	19,6	1,1898	52,48	19,3	(1,3570)
8,383	16,7	1,0638	28,00	19,7	1,1976	—	—	—
9,342	16,5	1,0709	29,67	19,7	1,2086	—	—	—

Tabelle V.

Cadmiumamalgame.

$p = 3,75$		$p = 7,42$		$p = 12,27$		$p = 52,48$	
t	L_t	t	L_t	t	L_t	t	L_t
16,8°	1,0292	16,0°	1,0568	17,1°	1,0918	28,2°	1,3491
44,0	1,0297	46,8	1,0575	23,3	1,0920	39,0	1,3509
62,4	1,0299	64,1	1,0579	35,4	1,0924	45,7	1,3516
80,4	1,0301	79,3	1,0583	43,0	1,0926	55,3	1,3533
47,4	1,0298	68,4	1,0580	51,1	1,0929	49,5	1,3523
16,8	1,0294	61,7	1,0579	60,2	1,0931	37,3	1,3507
—	—	51,0	1,0576	73,3	1,0937	26,0	1,3491
—	—	16,7	1,0567	82,9	1,0941	—	—
—	—	—	—	18,2	1,0917	—	—

Tabelle VI.

Zinnamalgame.

p	t	L_t	$p = 2{,}118$		$p = 4{,}59$		$p = 7{,}07$		$p = 7{,}93$	
			t	L_t	t	L_t	t	L_t	t	L_t
0,542	20,0°	1,0073	20,8°	1,0274	21,5°	1,0556	31,1°	1,0822	40,6°	1,0919
1,121	20,3	1,0148	30,6	1,0279	41,1	1,0565	43,1	1,0832	74,4	1,0954
2,118	20,8	1,0274	51,0	1,0287	61,0	1,0579	63,0	1,0849	40,1	1,0921
3,54	21,5	1,0438	64,9	1,0292	82,0	1,0591	49,7	1,0838	28,9	1,0912
4,59	21,5	1,0556	48,1	1,0286	58,1	1,0577	29,0	1,0822	*24,9*	*1,0871*
5,36	21,2	1,0641	29,8	1,0278	23,0	1,0557	—	—	*22,3*	*1,0826*
6,17	21,2	1,0725	21,5	1,0275	21,3	1,0555	—	—	*20,8*	*1,0802*
7,07	31,1	1,0822	—	—	—	—	—	—	*17,2*	*1,0732*
7,93	40,6	1,0919	—	—	—	—	—	—	—	—

Tabelle VII.

Wismutamalgame.

p	t	L_t	p	t	L_t	p	t	L_t
0,612	20,0°	1,0024	7,55	24,2°	1,0233	15,60	40,6°	1,0416
1,508	20,0	1,0061	9,49	25,4	1,0283	17,17	41,3	1,0438
2,766	20,0	1,0103	10,82	25,0	1,0314	19,22	54,5	1,0481
4,483	26,0	1,0155	12,40	24,7	1,0344	25,60	54,5	1,0569
6,114	25,0	1,0199	14,13	41,9	1,0386	30,65	61,7	1,0621

Tabelle VIII.

Wismutamalgame.

$p = 2{,}766$		$p = 7{,}55$		$p = 14{,}13$		$p = 17{,}17$		$p = 19{,}22$		$p = 30{,}65$	
t	L_t	t	L_t	t	L_t	t	L_t	t	L_t	t	L_t
20,0°	1,0103	24,2°	1,0233	41,9°	1,0386	41,3°	1,0438	54,5°	1,0481	61,7°	1,0621
30,9	1,0104	47,0	1,0243	68,0	1,0403	52,4	1,0445	75,0	1,0500	80,0	1,0650
43,1	1,0109	76,0	1,0256	75,0	1,0407	63,0	1,0453	40,6	1,0472	59,7	1,0627
62,9	1,0114	44,0	1,0243	58,0	1,0396	55,0	1,0447	35,8	1,0468	50,7	1,0618
29,1	1,0105	28,0	1,0236	29,8	1,0378	—	—	*29,0*	*1,0424*	*40,0*	*1,0550*
—	—	—	—	—	—	$p = 25{,}60$		*24,9*	*1,0379*	—	—
—	—	—	—	—	—	54,5°	1,0569	*22,3*	*1,0348*	—	—
—	—	—	—	—	—	79,6	1,0598	*20,8*	*1,0334*	—	—
—	—	—	—	—	—	66,1	1,0581	*17,2*	*1,0300*	—	—

Zur Discussion der Resultate, die für alle Amalgame fast dieselbe bleiben muss, sind beispielsweise alle Beobachtungen über Bleiamalgame in Figg. 2—6 graphisch dargestellt. Fig. 2 stellt die Abhängigkeit der relativen Leitungsfähigkeit bei 20° von der Concentration dar. Die unter der Curve belegenen Punkte entsprechen den in Tab. I zwischen Klammern gestellten Zahlen. Figg. 3—5 und der obere Teil der Fig. 6

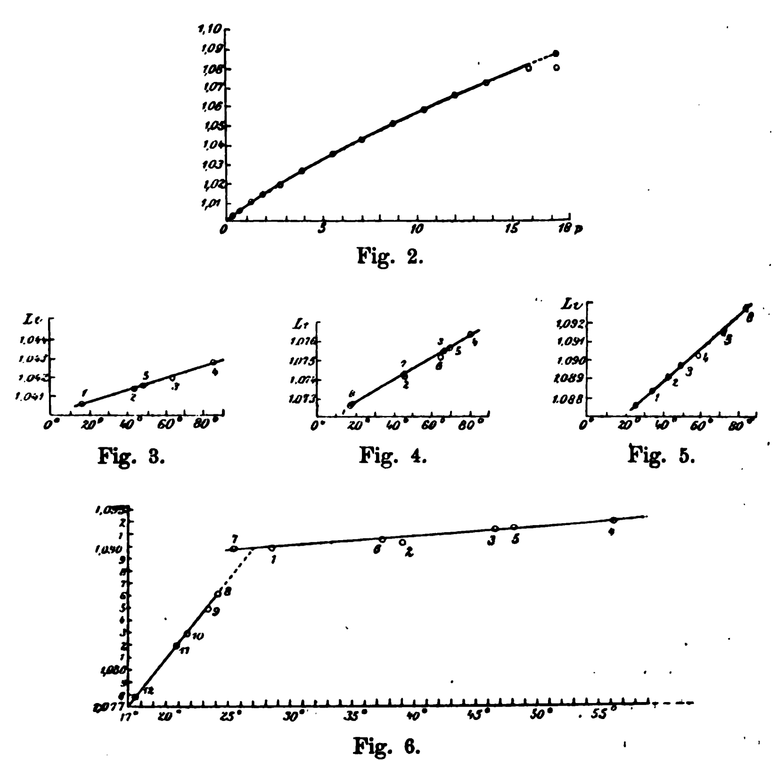


Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

stellen die Abhängigkeit der relativen Leitungsfähigkeit vier verschiedener vollkommen flüssiger Amalgame von der Temperatur dar. Die Nummern der Beobachtungen sind den Punkten beigefügt. Die Punkte 8—12 der Fig. 6 entsprechen den in Tab. I cursiv gedruckten Zahlen.

Fig. 2. bringt nichts Neues ausser der durch die Lage der zwei letzten Beobachtungen in augenfälliger Weise hervortretenden Ueberschreitung der Löslichkeitsgrenze. Figg. 3—5

zeigen, dass die relative Leitungsfähigkeit mit der Temperatur proportional zunimmt, und dass diese Zunahme mit der Concentration wächst. Dies lässt sich in einfacher Weise ausdrücken. Wird $L_t = 1 + \delta_t$ gesetzt, so kann innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler für alle untersuchten flüssigen Bleiamalgame

$$\delta_t = \delta_{20}(1 + \alpha[t - 20]) \tag{1}$$

gesetzt werden.

In Bezug auf die Löslichkeit zeigen die Punkte 8—12, Fig. 6, dass die relative Leitungsfähigkeit (und infolge dessen auch die Concentration) der bei den verschiedenen Temperaturen gesättigten Amalgame annähernd mit der Temperatur proportional zunimmt. Bedeutet $p_t^{\max}$ die Concentration des bei t^0 gesättigten Amalgams, so kann annähernd für Bleiamalgame zwischen 17—24°

$$p_t^{\max} = p_{20}^{\max}(1 + \beta[t - 20]) \tag{2}$$

gesetzt werden.

In Bezug auf die übrigen Amalgame sei bemerkt, dass die relative Leitungsfähigkeit der Zinkamalgame scheinbar nach Erwärmung und Abkühlung geringer ist als vorher. Dies rührt davon her, dass durch Erwärmung in der dünnen Wasserschicht zwischen dem Amalgam und den Röhrenwänden Luftbläschen entwickelt wurden, die den Widerstand in der Röhre erhöhten. Dieser Umstand macht die Bestimmung des Coefficienten α der Zinkamalgame ein wenig unsicher. Für Cadmiumamalgame ist die Bestimmung der Abhängigkeit der Löslichkeit von der Temperatur nicht gelungen. Der ausgeschiedene feste Teil des Amalgams klümperte sich im engen Röhrenteile zusammen. Für Wismutamalgame nimmt die Löslichkeit bei höheren Temperaturen ein wenig schneller mit der Temperatur zu als bei niedrigen. Unter Berücksichtigung der für Zinkamalgame erwähnten Fehlerquelle und mit dem für Cadmiumamalgame und Wismutamalgame gemachten Vorbehalt gelten aber die Formeln (1) und (2) auch auf die relative Leitungsfähigkeit bez. Löslichkeit der übrigen untersuchten Amalgame. In der folgenden Tabelle sind die aus den Versuchen berechneten Zahlenwerte der in die Formeln eingehenden Coefficienten zusammengestellt.

	α	p_{20}^{max}	β
Bleiamalgame	0,0008	15,8	0,017
Zinkamalgame	0,0004	20,34	0,021
Cadmiumamalgame	0,0004	ca. 50	gross
Zinnamalgame	0,0010	6,78	0,025
Wismutamalgame	0,0020	11,87	ca. 0,058

Zwischen den Grössen α und den der Fig. 2 entsprechenden, nicht gezeichneten Curven scheint folgender Zusammenhang zu bestehen. Wenn α gross ist, dann ist die erwähnte Curve stärker gekrümmt, als wenn α klein ist. Dies deutet darauf hin, dass das in flüssigen schwachen Amalgamen enthaltene Metall dissociirt ist, und dass der Dissociationsgrad sowohl mit abnehmender Concentration als mit wachsender Temperatur zunimmt.

Kopenhagen, Physikal. Laborat. d. Polytechn. Schule, 9. October 1899.

(Eingegangen 12. October 1899.)

6. *Ueber den stationären Temperaturzustand eines elektrisch geheizten Leiters*[1]; *von Friedrich Kohlrausch.*

Die Frage, welche Temperatur in einem durch einen elektrischen Strom geheizten Leiter entsteht, verdient von der theoretischen wie von der technischen Seite Interesse und zwar ein um so grösseres, je mehr allgemein gültige Beziehungen dabei auftreten. Solche sind aber von vornherein zu erwarten, da die Heiztemperaturen, wie man sofort sieht, von dem elektrischen und dem Wärmeleitvermögen abhängen und da man seit G. Wiedemann und Franz weiss, dass beide Leitvermögen im Zusammenhange stehen.

Man wird die zuerst zu stellenden Fragen auf den genau definirbaren und praktisch, wenn auch nicht vollständig, aber angenähert erreichbaren, adiabatischen Zustand beziehen, bei dem keine Wärme unnötig durch Aussenleitung verloren geht. Ginge überhaupt keine Wärme verloren, so würde stets eine beliebig hohe Heiztemperatur dadurch zu erzielen sein, dass man den Strom beliebig lange wirken lässt. Eine Grenze würde nur dadurch gesetzt werden, dass etwa in hoher Temperatur kein elektrisches Leitvermögen mehr bestände, was aber, soviel wir wissen, nicht der Fall ist. Denn wenn der Leiter auch mit wachsender Temperatur an Leitvermögen abnimmt, so geht dieses doch erfahrungsmässig nicht auf Null herunter, solange der Leiter fest oder flüssig bleibt. Auch wenn schliesslich eine Vergasung nicht zu vermeiden wäre, so träte in hoher Temperatur das alsdann entstehende Leitvermögen des Gases ein. Man könnte also Stromwärme von beliebig hoher Temperatur erzeugen.

So liegen die Verhältnisse aber in Wirklichkeit nicht; denn da jeder elektrische Leiter, soweit es bekannt ist, auch für die Wärme ein beträchtliches Leitvermögen besitzt, so

1) Der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften im Auszuge vorgelegt am 27. Juli 1899.

muss durch die Zuführungsstellen des elektrischen Stromes Wärme abfliessen, es muss auch aus dem Innern des Leiters Wärme nachfliessen und dadurch wird der erreichbaren Temperatur eine Grenze gesetzt.

Der adiabatische Fall, auf den wir uns beschränken, ist dadurch gegeben, dass nur dieser unvermeidliche Wärmeabfluss durch die Elektroden stattfindet. Die Isothermen und Isopotentialflächen stehen dann, von den Elektroden selbst abgesehen, auf der Begrenzungsfläche des Leiters überall senkrecht.

Die Differentialgleichungen lassen sich bekanntlich leicht für den allgemeinsten Fall aufstellen und die Grenzbedingungen dadurch vervollständigen, dass man die Temperatur, sowie den Stromeintritt oder das Potential für alle Teile der Elektroden definirt. Dieser allgemeine Fall wird aber schwerlich integrirt werden können, wie man wenigstens darnach vermuten kann, dass eine grosse Zahl verwickelter Zustände möglich ist, von denen man sich durch die blosse Anschauung oder geometrische Ueberlegungen schwer ein Bild verschaffen kann. Häufig versagen ja in solchem Falle die Mittel zur Integration einer Differentialgleichung.

Hingegen zeigt sich, dass einer vollständigen Behandlung der wichtigste Fall fähig ist, nämlich der Fall mit den speciellen Grenzbedingungen, die man als die übersichtlichsten und auch theoretisch wie praktisch interessantesten bezeichnen darf, bei denen einfach auf jeder Elektrode eine constante Temperatur und ein constantes Potential herrscht. Das Integral drückt dann einen durch seine Einfachheit ausgezeichneten Zusammenhang zwischen der Temperatur und dem Potential jedes Punktes aus, in welchem nur noch die beiden Leitvermögen vorkommen. Die geometrischen Verhältnisse sind dagegen ohne Einfluss.

Auf die wichtige Rolle, welche die in der Natur vorhandenen Beziehungen der beiden Leitvermögen zu einander spielen, und auf das oben genannte Gesetz habe ich schon vor langer Zeit in einem Aufsatze[1] „Ueber Thermoelektricität, Wärme- und Elektricitätsleitung“ hingewiesen und das Gesetz durch ein Zahlenbeispiel belegt. Ich sagte nämlich, dass in

1) F. K., Gött. Nachr. 1874, 7. Febr.; Pogg. Ann. 156. p. 601. 1875.

dem beschriebenen Falle „nicht nur die erreichbare Maximaltemperatur, sondern die ganze stationäre Temperaturverteilung bloss durch die elektromotorische Kraft zwischen den Elektroden, aber nicht von der Natur oder der Gestalt des Leiters beeinflusst erscheint"; ferner, dass „für eine schwache Glühhitze von 600° die elektromotorische Kraft von etwa $^1/_5$ Daniell notwendig ist". Der Teil der ersten Behauptung, welcher sagt, dass auch die Natur des Leiters ohne Einfluss bleibe, beruhte auf der Annahme, welche man damals allgemein über den Zusammenhang zwischen Wärmeleitvermögen (λ) und Elektricitätsleitvermögen ($\varkappa$) machte, dass sie nach der Wiedemann-Franz'schen Annahme einander proportional seien. Nach den jetzigen Kenntnissen kann man die Worte „der Natur" in obigem Satze nicht allgemein gelten lassen.

In seiner unbeschränkten Fassung wird der Satz aber voraussichtlich für ein Ideal des reinen Metalles bestehen bleiben, und da dies zugleich der Leiter ist, welcher die höchst mögliche elektrische Heiztemperatur giebt, so behält der Satz einen principiell bedeutsamen Charakter, indem er eine durch die Natur gegebene Beziehung zwischen Temperatur und elektrischer Spannung darstellt.

Die damals in Aussicht gestellte weitere Ausführung des Gegenstandes ist unterblieben, weil mir bekannt wurde, dass L. Lorenz in dem Aufsatze „Bestimmung der Wärmegrade in absolutem Maasse" kurz zuvor verwandte Betrachtungen angestellt hatte.[1]) Die allgemeine Proportionalität der beiden Leitvermögen wurde dabei aber in Abrede gestellt. Auch schloss Lorenz aus den damals vorliegenden Messungen, dass das Verhältnis sich mit der Temperatur ändere; er stellte die Ansicht auf, dass $\lambda/\varkappa$ der absoluten Temperatur proportional sei und entwickelte die für diese Annahme geltenden Beziehungen zwischen Heiztemperatur und elektrischer Spannung. In einem späteren Aufsatze, welcher Lorenz' werthvolle Bestimmungen des Wärmeleitvermögens enthält, glaubt er die behauptete Form der Abhängigkeit von der Temperatur allgemein zu beweisen.[2])

---

1) L. Lorenz, Pogg. Ann. 147. p. 429. 1872.

2) L. Lorenz, Wied. Ann. 13. p. 422 u. 582. 1881.

Seitdem sind in den modernen, für elektrische Widerstände benutzten Legirungen Körper bekannt geworden, deren Leitvermögen $\lambda/\varkappa$ fast doppelt so gross ist als der kleinste bei reinen Metallen vorkommende Wert.[1] Die Grösse der Abhängigkeit von der Temperatur schwankt sogar zwischen dem einfachen und dreifachen Wert.

Man muss die Betrachtungen also auf einer allgemeineren Grundlage aufbauen.

Ich wurde in der letzten Zeit auf den Gegenstand wieder hingewiesen durch das Bedürfnis, eine zuverlässige und hinreichend einfache Messmethode für das Wärmeleitvermögen von Metallen zu erhalten. Dass zu diesem Zwecke die einfachen Beziehungen zwischen Potential und stationärer Temperatur im elektrisch geheizten Körper vorteilhaft zu verwenden sind, liess sich voraussehen und diese Verwendung hatte schon damals in meiner Absicht gelegen. Sie scheiterte indessen daran, dass die zur Ausführung notwendigen, sehr ausgiebigen und constanten Stromquellen damals nicht existirten. Gegenwärtig ist diese Schwierigkeit gehoben und die Methode ist von den Herren Jaeger und Diesselhorst mit gutem Erfolge ausgebildet worden (l. c.).

Wenn nun auch hierzu die Betrachtung eines einfacheren Falles genügt haben würde, so scheint mir die allgemeine Entwickelung der umfassenden, von der körperlichen Gestalt nicht beeinflussten Beziehungen zwischen Temperatur und Spannung doch auch eine hinreichende Bedeutung zu besitzen.

Der Zusammenhang zwischen Temperatur, elektrischem und Wärmeleitvermögen gewinnt ein erhöhtes Interesse durch die Thermoelektricität. Schon in dem eingangs genannten Aufsatze, der besonders eine auf Leitungsverhältnisse gegründete Theorie der Thermoelektricität bezweckte, hatte ich z. B. auf die auffällige Thatsache hingewiesen, dass die „thermoelektrisch wirksamsten Körper durchweg schlechte Leiter sind“. Ferner war gesagt worden, dass nach der Mitführungstheorie ein Wärmestrom elektrische Arbeit leistet, und dass die Wärmeleitung, die sonst in der mechanischen Wärmetheorie

---

1) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, Sitzungsber. der k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1. p. 726. 1899.

als unwesentlich behandelt wird, bei dem elektrischen Strome einen wesentlichen Einfluss auszuüben scheint.

In einem interessanten Aufsatze hat in jüngster Zeit Hr. Liebenow[1]) für die von mir entwickelten Vorstellungen der gegenseitigen Mitführung von Elektricität und Wärme und die Arbeitsleistung des Wärmestromes den Process eines umkehrbaren Kreisvorganges construirt und daraus eine Theorie der Thermoelektricität entwickelt, die sich auf die beiden Leitvermögen gründet. (Hr. Liebenow vergisst dabei zu erwähnen, dass die von ihm adoptirten Vorstellungen über das Wesen der thermoelektrischen Vorgänge vollständig in meinem Aufsatze enthalten sind.)

Seine Theorie mag nicht einwandsfrei sein[2]), ich hatte seiner Zeit sogar ein Bedenken dagegen ausgesprochen, auf die Wärmeleitung den zweiten Hauptsatz anzuwenden, dessen Beweis ja damit zusammenhängt, dass man Wärmeleitung ausschliesst. Aber die Thatsache, dass die Resultate der Liebenow'schen Theorie die erfahrungsmässigen Grössen der Thermoelektricität in zahlreichen Fällen der Grössenordnung nach wiedergeben, verdient unstreitig eine grosse Beachtung.

1. Differentialgleichung für den stationären Temperaturzustand in einem durch einen constanten elektrischen Strom geheizten Leiter.

Im Punkte von den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bestehe das elektrische Potential v und die Temperatur u. Das elektrische Leitvermögen heisse $\varkappa$, das Wärmeleitvermögen λ, beide in einem zusammenhängenden Maasssystem, z. B. nach [C.G.S.]-Einheiten gemessen.[3])

$\varkappa$ und λ sind im allgemeinen Functionen der Temperatur und können, wenn der Körper nicht homogen ist, auch von den Raumcoordinaten abhängen.

1) C. Liebenow, Wied. Ann. 68. p. 316. 1899.

2) Hr. Voigt begründet im eben erscheinenden Heft (Wied. Ann. 69. p. 706) solche Einwände. (Anmerkung bei der Correctur.)

3) Sind die Leitvermögen in gebräuchlicher Weise auf das Centimeter, die Wassercalorie und das Ohm bezogen, so ist das so gemessene λ mit 419.10^5 zu multipliciren, $\varkappa$ durch 10^9 zu dividiren, wenn die Potentiale in C.G.S.-Einheiten ausgedrückt werden. Sollen sie in Volt ausgedrückt werden, so bleibt $\varkappa$ ungeändert und λ wird mit 4,19 multiplicirt. Vgl. p. 150.

Als Differentialgleichung des stationären Zustandes gilt dann bekanntlich

$$(1)\quad 0 = \varkappa\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{\partial\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z}$$

Denn mit $dx\,dy\,dz$ multiplicirt, stellt das erste Glied die im Raumelement in der Zeiteinheit erzeugte Stromwärme vor, der zweite Teil die demselben durch Leitung zugeführte Wärme.

Hierzu tritt noch die aus der Stetigkeit des elektrischen Zustandes für das Potential sich ergebende Bedingung. Für die elektrischen Stromcomponenten i_x, i_y, i_z besteht die Forderung $0 = (\partial i_x/\partial x) + (\partial i_y/\partial y) + (\partial i_z/\partial z)$. Da nun $-i_x = \varkappa(\partial v/\partial x)$, also $-(\partial i_x/\partial x) = \varkappa(\partial^2 v/\partial x^2) + (\partial\varkappa/\partial x)\times(\partial v/\partial x)$ und ebenso für y und z, so unterliegt v der Bedingung

$$(2)\quad 0 = \varkappa\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial\varkappa}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\varkappa}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial\varkappa}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}.$$

$\varkappa$ und λ können, wie gesagt, wenn der Körper nicht homogen ist, auch von den Raumcoordinaten abhängen. Diesen Fall hereinzuziehen hat aber bei festen Leitern kaum einen Zweck, denn Inhomogenität wird hier fast immer mit Unstetigkeit verbunden sein, also aus der Differentialgleichung ohnehin heraustreten.

Wir setzen also zunächst den Fall, dass der zu betrachtende Raum nur von *einem* Leiter erfüllt ist, wo dann $\varkappa$ und λ nur von der Temperatur abhängen. Die Temperaturcoefficienten der beiden Leitvermögen

$$(3)\quad \frac{d\varkappa}{du} = \varkappa' \quad\text{und}\quad \frac{d\lambda}{du} = \lambda'$$

sind dann auch nur Functionen der Temperatur und es wird $(\partial\varkappa/\partial x) = \varkappa'(\partial u/\partial x)$ etc. Berücksichtigt man dies in der Gleichung (2), so wird diese jetzt

$$(2\text{a})\quad 0 = \varkappa\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \varkappa'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

Durch Gleichung (1) und (2a) wird unter Hinzunahme der Grenzbedingungen die Aufgabe für einen homogenen Leiter bestimmt.

In dieser allgemeinen Form das Problem weiter zu behandeln, wird schwierig sein.

2. Aufstellung eines Falles mit speciellen Grenzbedingungen.

Es lässt sich aber zeigen, dass unter die Differentialgleichungen (1) und (2a) Zustände fallen, bei denen die Isopotentialen zugleich Isothermen sind, wo also die Temperatur als blosse Function des Potentiales auftritt. Um dies nachzuweisen und zu untersuchen, wie weit diese Specialfälle reichen, setzen wir in der Differentialgleichung (1) und der zugehörigen Gleichung (2a) probeweise u als blosse Function von v an, d. h. wir setzen:

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d u}{d v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \text{und}\quad & \\ &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 u}{d v^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{d u}{d v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}\right.$$

und ebenso für die übrigen Coordinaten. Hierdurch nimmt Gleichung (2a) die Form an:

$$(5)\quad 0 = \varkappa\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) + \varkappa'\frac{d u}{d v}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right].$$

Unter Benutzung von (4) wird ferner

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$
$$= \left[\lambda\frac{d^2 u}{d v^2} + \lambda'\left(\frac{d u}{d v}\right)^2\right]\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \lambda\frac{d u}{d v}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Die Summe der drei Ausdrücke wird hiernach, unter gleichzeitiger Benutzung von (5),

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ &\quad = \lambda\left[\frac{d^2 u}{d v^2} + \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\varkappa'}{\varkappa}\right)\left(\frac{d u}{d v}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]. \end{aligned}\right.$$

Setzt man dies in die Differentialgleichung (1), so bekommt diese den gemeinsamen Factor

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2,$$

den wir fortlassen, da sein Nullwerden ja nur bedeuten würde, dass überhaupt kein Strom vorhanden wäre. Wenn dann noch durch λ dividirt wird, so entsteht die Gleichung

$$(7)\qquad 0 = \frac{\varkappa}{\lambda} + \frac{d^2 u}{d v^2} + \left(\frac{\lambda'}{\lambda} - \frac{\varkappa'}{\varkappa}\right)\left(\frac{d u}{d v}\right)^2.$$

Die Coordinaten, welche sich in den gemeinsamen Factor zusammengedrängt hatten, kommen explicit nicht mehr vor; unsere Annahme eines Zustandes, in dem die Isopotentialen zugleich Isothermen sind, d. h. u nur von v abhängig auftritt, erscheint also als ein Fall, der mit der Differentialgleichung verträglich ist.

Es leuchtet aber zugleich ein, dass die Grenzbedingungen, mit denen der Fall verträglich ist, specielle Formen annehmen müssen. Findet der Stromeintritt und Stromaustritt an Elektroden statt, die je ein constantes Potential haben, so muss natürlich auch in diesen Flächen je eine constante Temperatur [1]) herrschen.

Dies ist gerade der im Eingange genannte Fall, der für theoretische Erwägungen und praktische Anwendungen am geeignetsten ist.

Bisher wurde Folgendes bewiesen. Es sei ein Leiter mit Elektroden, die sich je auf constantem Potential und constanter Temperatur befinden, zu dem stationären (höchst möglichen) Temperaturzustande gelangt, bei welchem aus jedem Körperelemente durch Leitung ebenso viele Wärme abfliesst, wie in ihm durch den Strom erzeugt wird. Dann genügt den Gesetzen der Leitung und Wärmeentwickelung die Gleichung (7).

Es ist dagegen nicht bewiesen worden, dass diese Gleichung die allgemeinste Lösung des Falles enthält, dass sie den *einzigen* möglichen Zustand darstellt. Dieser Beweis würde z. B. in dem Nachweise bestehen, dass die allgemeine Differentialgleichung (1) mit (2a) verbunden eine eindeutige Lösung hat. Es würde auch genügen, dies für den besonderen Fall des constanten Zustandes auf jeder Elektrode zu beweisen. Man wird es aber schon aus physikalischen Gesichtspunkten für ausgeschlossen halten, dass denselben Bedingungen, welche durch die definirten Zustände über die ganze Oberfläche des Leiters und seine gegebenen Eigenschaften durch den ganzen inneren Raum vollständig bestimmt sind, verschiedene stationäre Zustände im Innern entsprechen könnten.

1) Wenn die Stromdichte auf einer Elektrode nicht constant ist, so muss man, um die constante Temperatur und Spannung zu erzielen, auch die Zuleitung, ausser wenn sie widerstandsfrei ist, gewissen Bedingungen unterwerfen, was aber hier unerörtert bleiben kann.

Sobald man dies zugiebt, hat man die gestellte Aufgabe durch Gleichung (7) als vollständig gelöst anzusehen.

3. Die Heiztemperatur hängt nur von $\lambda/\varkappa$ ab.

Daraus, dass in Gleichung (7) die Eigenschaften des leitenden Raumes ausser in dem Glied $\varkappa/\lambda$ nur noch als $(\lambda'/\lambda) - (\varkappa'/\varkappa)$ vorkommen, und dass der letztere Ausdruck gleich

$$\frac{\varkappa}{\lambda}\frac{d}{du}\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)$$

ist, folgt, dass der Temperaturzustand *nicht von $\varkappa$ und λ einzeln abhängt, sondern nur von dem Verhältnis dieser beiden Leitvermögen.*

Heizt man also durch dieselbe angelegte elektrische Spannung eines oder das andere Metall von beliebig guter oder schlechter Leitung, aber von der Eigenschaft, dasselbe *Verhältnis* der beiden Leitvermögen zu zeigen, so herrschen nach Erreichung des stationären Zustandes dieselben Temperaturen.

Die meisten reinen Metalle bilden eine Gruppe, deren Leitverhältnis $\varkappa/\lambda$ einen nahe gleichen, auch von der Temperatur ungefähr in derselben Weise beeinflussten Wert aufweist; und zwar scheint dieser Wert der grösste existirende zu sein. Dann wäre auch die ihm zukommende Heiztemperatur die obere Grenze des Erreichbaren. Es gilt demnach der sehr beachtenswerthe Satz, dass die höchste erreichbare Heiztemperatur nicht nur von geometrischen Verhältnissen unabhängig ist, sondern auch in einer grossen Gruppe von Leitern, die eben den höchsten Wert liefern, von deren individueller Beschaffenheit nicht beeinflusst wird.

Es scheint, dass in der Natur des Vorganges eine Ursache dafür liegt, dass einer bestimmten elektrischen Spannung eine bestimmte Maximaltemperatur zugehört.[1])

---

1) Es liegen, worauf Hr. Arons mündlich aufmerksam machte, in den ohne äusserlich angelegte Spannung durch *Induction* erregten Strömen auch Fälle vor, wo das Wärmeleitvermögen keine Rolle zu spielen braucht. In solchen Fällen, z. B. bei der directen Umsetzung von mechanischer Arbeit in Wärme durch den sogenannten Foucault'schen Versuch, kann theoretisch die Stromwärme bei beliebig hoher Temperatur entstehen. (Anmerkung bei der Correctur.)

Bei der wirklichen Ausführung von Versuchen über elektrische Heizung wird freilich, insofern die vollkommene Wärmeisolation der übrigen Oberflächenteile nicht erreichbar ist, der bessere Leiter cet. par. zu höherer Temperatur steigen, weil in ihm mehr elektrische Arbeit in Wärme umgesetzt wird, insofern also der Verlust, welcher aus der Unvollkommenheit des adiabatischen Zustandes entsteht, relativ zur Wärmeerzeugung kleiner ist.

4. Linearer Zustand.

Abermals einen speciellen Fall des Falles von § 2 bildet der lineare Zustand eines elektrisch gleichförmig durchströmten *Cylinders*, dessen Endflächen auf constanter Temperatur erhalten werden.

Dass für seinen Temperaturzustand die Differentialgleichung (7) gilt, lässt sich leicht auch direct beweisen. Denn für den Cylinder erscheint ohne weiteres v sowie u nur von x abhängig, also ist u als blosse Function von v zu behandeln. Man darf also den p. 138 verfolgten Weg unter Beschränkung auf die x-Coordinate einschlagen, der dann zu Gleichung (7) führt, welche hier ohne weiteres als die allgemeinste Lösung erscheint.

5. Das Integral der Differentialgleichung.

Die Integration der Differentialgleichung (7) verdanke ich der Freundlichkeit des Hrn. Fuchs, der durch Umkehrung der Differentiation das Integral fand

$$\int \frac{\lambda}{\varkappa} d u = -\tfrac{1}{2} v^2 + A v + A', \tag{8}$$

wo A und A' Integrationsconstanten bezeichnen.

Nachdem das Integral gefunden ist, kann man seine Richtigkeit leicht durch Rückwärtsbehandlung nachweisen. Denn aus (8) folgt

$$\frac{d u}{d v} = \frac{\varkappa}{\lambda}(A - v)$$

und

$$\frac{d^2 u}{d v^2} = -\frac{\varkappa}{\lambda} + (A - v)\frac{\lambda \varkappa' - \varkappa \lambda'}{\lambda^2}\frac{d u}{d v}$$

$$= -\frac{\varkappa}{\lambda} + (A - v)^2 \frac{\varkappa^2}{\lambda^2}\left(\frac{\varkappa'}{\varkappa} - \frac{\lambda'}{\lambda}\right).$$

Diese Ausdrücke, in Gleichung (7) eingesetzt, machen die rechte Seite zu Null, sodass die Gleichung identisch erfüllt ist.

Die Constantenbestimmung ergiebt die Beziehung, welche zwischen drei zusammengehörigen Paaren von Temperaturen und Potentialen $u_1 v_1$, $u_2 v_2$ und $u_3 v_3$ besteht, z. B. in folgender Form:

$$(9)\qquad v_1 \int_{u_2}^{u_3} \frac{\lambda}{\varkappa}\, du + v_2 \int_{u_3}^{u_1} \frac{\lambda}{\varkappa}\, du + v_3 \int_{u_1}^{u_2} \frac{\lambda}{\varkappa}\, du = \tfrac{1}{2}(v_1 - v_2)(v_2 - v_3)(v_3 - v_1).$$

Nennt man den arithmetischen Mittelwert, den $\lambda/\varkappa$ zwischen den Temperaturen u_1 und u_2 hat, $[\lambda/\varkappa]_{1,2}$, d. h.

$$\left[\frac{\lambda}{\varkappa}\right]_{1,2} = \frac{1}{u_2 - u_1} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\lambda}{\varkappa}\, du$$

und entsprechend bei den anderen Integralen, so kann man hierfür schreiben:

$$(9\text{a})\qquad v_1 (u_3 - u_2) \left[\frac{\lambda}{\varkappa}\right]_{2,3} + v_2 (u_1 - u_3) \left[\frac{\lambda}{\varkappa}\right]_{1,3} + v_3 (u_2 - u_1) \left[\frac{\lambda}{\varkappa}\right]_{1,2} = \tfrac{1}{2}(v_1 - v_2)(v_2 - v_3)(v_3 - v_1).$$

Im Falle, dass $\lambda/\varkappa$ constant ist, kommt

$$(10)\qquad \frac{\lambda}{\varkappa} u = -\tfrac{1}{2} v^2 + A v + A'$$

und für drei Paare von Werten

$$(10\text{a})\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\varkappa}[v_1 (u_3 - u_2) + v_2 (u_1 - u_3) + v_3 (u_2 - u_1)] = \tfrac{1}{2}(v_1 - v_2)(v_2 - v_3)(v_3 - v_1), \\ \text{oder auch} \\ \dfrac{\lambda}{\varkappa}[u_1 (v_2 - v_3) + u_2 (v_3 - v_1) + u_3 (v_1 - v_2)] = \tfrac{1}{2}(v_1 - v_2)(v_2 - v_3)(v_3 - v_1). \end{cases}$$

Trägt man v auf einer horizontalen Abscisse, u auf einer verticalen Ordinate auf, so bedeutet die Gleichung (10) eine Parabel, deren Scheitel oben liegt.

6. Temperaturvertheilung zwischen Elektroden von gegebener Temperatur und Spannung.[1])

Der Fall ist in den obigen Gleichungen enthalten, denn man kann etwa u_1 und v_1, u_2 und v_2 als die Zustände der Elektroden auffassen, u_3 und v_3 für einen beliebigen Punkt zwischen ihnen annehmen.

Die entstehende *Maximaltemperatur* u_m kann z. B. in folgender, die beiden Elektrodenzustände symmetrisch enthaltender Form dargestellt werden, wenn $E = v_1 - v_2$ die elektromotorische Kraft zwischen den Elektroden bedeutet,

$$(11) \quad (u_m - u_1)\left[\frac{\lambda}{\varkappa}\right]_{1,m} + (u_m - u_2)\left[\frac{\lambda}{\varkappa}\right]_{2,m} = \tfrac{1}{4}E^2 + \frac{(u_1 - u_2)^2}{E^2}\left[\frac{\lambda}{\varkappa}\right]^2_{1,2}.$$

Wenn $\lambda/\varkappa$ constant angenommen wird, so entsteht hieraus

$$(11\text{a}) \quad u_m - \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{1}{8}\frac{\varkappa}{\lambda}E^2 + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\varkappa}\frac{(u_1 - u_2)^2}{E^2}.$$

Dieses Maximum liegt bei einem Potentiale, welches gegen das mittlere Potential $\frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ nach der Seite der wärmeren Elektrode verschoben ist um den positiven Wert von

$$(12) \quad \frac{1}{v_1 - v_2}\int_{u_1}^{u_2} \frac{\lambda}{\varkappa}\,du \quad \text{oder} \quad \frac{u_2 - u_1}{v_1 - v_2}\left[\frac{\lambda}{\varkappa}\right]_{1,2}.$$

Ist $\lambda/\varkappa$ constant, so fällt die steile Klammer und der Index fort.

---

1) Wenn die Anlegung der Spannung an den Leiter mittels Leiter aus anderen Stoffen geschieht, so tritt an den Elektroden Peltier'sche Wärme in Gestalt von Erwärmung oder Abkühlung auf, womit zugleich eine dem eigentlichen Strome entgegenwirkende elektromotorische Kraft verbunden ist; auch diese Zustände werden stationär. Die dadurch eintretenden Modificationen in die Betrachtung aufzunehmen, wird erleichtert dadurch, dass der Ausgleich von Wärme und Elektricität nach denselben Gesetzen geschieht. Sind die beiden Elektroden auf verschiedener Temperatur, so kommen auch direct noch elektromotorische Kräfte herein. Wir sehen von allem diesem ab, schliessen die Peltierwärme in die Elektrodentemperatur ein und messen die Potentiale an den *Innenseiten* der Elektroden.

Im Innern des Leiters können ferner die nach W. Thomson benannten, von Temperaturgefällen herrührenden Spannungs- und Stromwärmeerscheinungen auftreten, welche die Zustände verschieben müssen. Hr. Voigt beabsichtigt, wie er mir freundlichst mittheilt, eine Veröffentlichung, die diesen Vorgang in die Theorie aufnimmt.

Für den einfachsten und wohl wichtigsten Fall, nämlich wenn *beide Elektroden dieselbe Temperatur* u_0 haben, gestaltet sich die ganze Temperaturverteilung sehr einfach. Die Elektrodenpotentiale seien v_1 und v_2, u und v bedeuten den Zustand eines Punktes im Innern.

Dann ergiebt sich aus Gleichung (9) (vgl. auch § 7) das Resultat

$$\int_{u_0}^{u} \frac{\lambda}{\varkappa}\, du = \tfrac{1}{2}(v_1 - v)(v - v_2), \tag{13}$$

oder auch, wenn der Mittelwert von $\lambda/\varkappa$ zwischen u_0 und u durch $[\lambda/\varkappa]$ bezeichnet wird

$$u - u_0 = \tfrac{1}{2}\frac{(v_1 - v)(v - v_2)}{[\lambda/\varkappa]}\,. \tag{13a}$$ [1]

Wenn $\lambda/\varkappa$ constant ist, braucht man nur die steile Klammer wegzudenken. Dann stellt die Gleichung eine nach unten offene Parabel vor, deren Scheitel symmetrisch liegt; d. h. die höchste Temperatur gilt für das mittlere Potential $\tfrac{1}{2}(v_1 + v_2)$.

Wenn $\lambda/\varkappa$ sich mit wachsendem u ändert, so ändert sich von den Enden ab allmählich auch die Form der Curve. Wächst $\lambda/\varkappa$ mit der Temperatur, was bei Metallen wohl stets der Fall ist, so wird der Scheitelpunkt heruntergedrückt und umgekehrt.

Symmetrisch aber bleibt die Curve stets; dass das Maximum von u unter allen Umständen mit dem Orte des mittleren Potentiales zusammenfällt, sieht man sofort aus Gleichung (13), deren Differentiation ergiebt

$$\frac{\lambda}{\varkappa}\frac{du}{dv} = -v + \tfrac{1}{2}(v_1 + v_2)\,.$$

Im Maximalpunkte $du/dv = 0$ ist also stets $v = \tfrac{1}{2}(v_1 + v_2)$.

1) Man kann sich die weitere Aufgabe stellen, auch die geometrische Verteilung des Potentiales selbst zu bestimmen, wodurch zugleich die *geometrische* Verteilung der Temperatur gegeben wäre. In einem geheizten homogenen Cylinder z. B. werden die Isopotentialen wegen des Einflusses der Temperatur auf das elektrische Leitvermögen einen ungleichen Abstand erhalten. Zur Lösung der Aufgabe muss das Gesetz des Temperatureinflusses auf $\varkappa$ bekannt sein. Wir gehen auf diese Aufgabe nicht ein. Jedenfalls werden die Isopotentialen um die Maximaltemperatur symmetrisch verteilt sein, weil dies für die Temperatur selbst der Fall ist.

Die *maximale* Temperaturerhöhung beträgt, wenn $[\lambda/\varkappa]$ das mittlere Leitverhältnis zwischen u_0 und u_{max} bedeutet,

$$(14) \qquad u_{max} - u_0 = \frac{1}{8} \frac{(v_1 - v_2)^2}{[\lambda/\varkappa]} \, .$$

Hierfür kann man selbstverständlich auch schreiben, wenn W den Gesamtwiderstand zwischen den Elektroden, und J die Stromstärke vorstellt:

$$u_{max} - u_0 = \frac{1}{8} \frac{J^2 W^2}{[\lambda/\varkappa]} \, .$$

Nicht überflüssig ist vielleicht noch die Bemerkung, dass auch der Fall, wo die Stromzuleitung durch *mehr als zwei Elektroden* geschieht, unter die vorigen Sätze untergeordnet ist, sobald die positiven und die negativen Elektroden je ausser der gleichen Spannung auch eine gleiche Temperatur besitzen.

7. Die Bestimmung von Wärmeleitvermögen mittels elektrischer Heizung.

Es besteht zweifellos immer noch das Bedürfnis nach einer exacten, einfachen Messmethode für Wärmeleitvermögen, besonders von Metallen. Die im vorigen enthaltene Beziehung zwischen Temperatur und Potential liefert ein solches Mittel, welches von den Haupthindernissen oder Umständlichkeiten anderer Methoden frei ist. Denn es brauchen keine Oberflächentemperaturen bekannt zu sein, was während des Eintritts von Wärme oder des Austritts in ein Calorimeter schwierig ist, es sind keine specifischen Wärmen zu bestimmen, die Messung bedarf nur kleiner Temperaturdifferenzen, wodurch erstens das Leitvermögen in erwünschter Weise von vornherein für eine genügend definirte Temperatur gilt und zweitens der Vorteil entsteht, dass die Unsicherheiten fortfallen, welche die äussere Wärmeleitung bei erheblichen Temperaturunterschieden mit sich bringt. Zeitbestimmungen kommen nicht vor; die Dimensionen der zu untersuchenden Körper bleiben in handlichen Grenzen. Die Rechnung ist einfach.

Das Wärmeleitvermögen wird auf die elektrische Leitfähigkeit, eine genau und einfach in absolutem Maasse zu bestimmende Grösse zurückgeführt; die Kenntnis des Zusammenhanges beider Grössen hat endlich an sich das grösste Interesse.

Dass man die Methode nicht schon früher vorgeschlagen hat, kann sogar verwunderlich erscheinen, denn die Beziehung zwischen Temperatur und Spannung in einem cylindrischen Stabe übersieht man ja sehr leicht. Herwig hat sich einmal theoretisch mit einer Methode beschäftigt, bei der gleichzeitig Erwärmungen von aussen und durch einen elektrischen Strom vorgenommen werden[1]), und zwar von dem Gesichtspunkte aus, die Methode auf Quecksilber anzuwenden. In seinen Versuchen lässt er dann aber den elektrischen Strom fort, vielleicht in der Erwägung, dass bei seiner Anordnung gerade für Quecksilber in der That Schwierigkeiten daraus erwachsen würden.

Die Ausführung unseres Verfahrens besteht nun in folgendem. Man leitet durch einen Stab einen constanten elektrischen Strom. Auf die Gestalt des Stabes kommt nach dem früheren nichts an, man wird aber, schon um dann auch das elektrische Leitvermögen bequem mitbestimmen zu können, Cylindergestalt wählen. Die Enden des Stabes werden durch Bäder auf constanter Temperatur erhalten; die Seitenflächen werden gegen Wärmeabgabe so gut wie möglich geschützt. Eine Vorfrage für das Verfahren betrifft das Maass, bis zu welchem dies möglich ist; ein vollkommener Schutz existirt ja nicht und eine Rücksichtnahme der Messungen auf äussere Leitung ist deswegen unvermeidlich. Letztere muss hinreichend klein gemacht werden können, dass sie durch geeignete Anordnung des Versuches, sowie nach der Ermittelung des äusseren Wärmeleitvermögens durch Rechnung ausreichend sicher eliminirt werden kann. Je grösser der Querschnitt und je grösser das zu bestimmende Wärmeleitvermögen ist, desto leichter wird dies zu erreichen sein.

Es wird nun bis zum Eintreten einer stationären Temperaturverteilung elektrisch geheizt, d. h. bis zu der Temperatur, bei welcher eben so viele Wärme durch die Endflächen abfliesst, wie durch den Strom im Innern erzeugt wird. Hierzu wird im allgemeinen eine nicht unbeträchtliche Zeit hindurch geheizt werden müssen. Die zweite Vorfrage ist, ob so lange ein constanter Zustand der Endflächen und eine constante Stärke des notwendigen elektrischen Stromes erhalten werden

---

1) H. Herwig, Pogg. Ann. 151. p. 177. 1874.

kann, der in beträchtlicher Stärke anzuwenden ist. Es lässt sich überschlagen, dass für ein gutleitendes Material Stromstärken bis zu 400 Amp. wünschenswert sind, wobei freilich die Erleichterung besteht, dass je besser die Leitung, desto rascher die stationäre Temperaturverteilung eintritt.

Weitere experimentelle Anforderungen stellt die Ermittelung der Temperaturen und Potentiale und zwar nach zwei Richtungen. Einesteils werden an die Bestimmung der zu messenden Grösse an sich erhebliche Forderungen der Genauigkeit gestellt, zweitens muss der Ort, an welchem sie bestimmt werden, hinreichend genau für beide Grössen derselbe sein. Selbstverständlich lässt letzteres sich nur durch die Anwendung thermoelektrischer Messungsmittel erreichen.

Seit dem Plane zu den Messungen, der nach den ersten Vorstudien dem Kuratorium der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt vorgelegt wurde[1]), haben die Herren Jaeger und Diesselhorst die Ausführung der Messungen in die Hand genommen und es ist ihnen durch die umsichtige Anordnung derselben mit den starken Strommitteln der Reichsanstalt gelungen, Verhältnisse herzustellen, welche den genannten Anforderungen genügen.[2]) Die Stäbe hatten 1 bis 2 cm Durchmesser; sie waren durch die Werkstätte der Reichsanstalt im Abstande von je 90 mm mit Löchern von etwa $\frac{1}{2}$ mm Durchmesser versehen worden, von denen die Temperaturen und Potentiale abgenommen wurden. Obwohl grundsätzlich, wenn nur die beiden Abnahmen am gleichen Punkte geschehen, die Lochweite gleichgültig ist, wird man sie aus mehreren leicht ersichtlichen Gründen doch thunlichst einschränken.

1. Wenn $\lambda/\varkappa$ innerhalb der angewandten Temperaturen als constant anzusehen ist, so folgt aus Gleichung (8):

$$\frac{\lambda}{\varkappa}u = -\tfrac{1}{2}v^2 + Av + A'.$$

Werden an drei Punkten die zusammengehörenden Temperaturen und Potentiale $u_1 v_1$, $u_2 v_2$ und $u_3 v_3$ gemessen und

1) Zeitschr. f. Instrumentenk. 18. p. 140. 1898.

2) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1899. p. 719.

A und A' aus den drei Gleichungen eliminirt, so ergiebt sich aus Gleichung (10):

$$(15) \qquad \frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{1}{2} \frac{(v_1 - v_2)(v_2 - v_3)(v_3 - v_1)}{u_1 (v_2 - v_3) + u_2 (v_3 - v_1) + u_3 (v_1 - v_2)} .$$

Die Ausführung des Versuches wird man so einrichten, dass die drei Punkte gleichen Abstand haben, und dass die beiden äusseren Temperaturen gleich sind. Dann ist das Potential v_2 das Mittel aus v_1 und v_3, und zwar wegen der Symmetrie der Temperaturverteilung auch dann, wenn das elektrische Leitvermögen von der Temperatur abhängig ist. Nennt man V den Potentialabfall zwischen den äusseren Punkten und U die Temperaturdifferenz der äusseren gegen den mittleren Punkt, so wird

$$(15\text{a}) \qquad \frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{1}{8} \frac{V^2}{U} .$$

2. $\lambda/\varkappa$ sei, wie in Wirklichkeit wohl immer, mit der Temperatur veränderlich. Unter diesen Umständen wird durch die Methode ein Mittelwert von einfachster Bedeutung erhalten.

Wir beschränken uns auf den eben beschriebenen Fall, wo die Temperaturen u_1, u_2 der äusseren Punkte gleich, $= u_0$ sind. Diese Temperatur werde als untere Integrationsgrenze gewählt. Die Potentiale daselbst gleich v_1 und v_2 gesetzt, hat man zur Constantenbestimmung in dem Integral Gleichung (8), weil jetzt sowohl $\int\limits_{u_0}^{u_1}$ wie $\int\limits_{u_0}^{u_2}$ gleich Null wird,

$$0 = -\tfrac{1}{2} v_1^2 + A v_1 + A' = -\tfrac{1}{2} v_2^2 + A v_2 + A',$$

woraus

$$A = \tfrac{1}{2}(v_1 + v_2) \quad \text{und} \quad A' = -\tfrac{1}{2} v_1 v_2 .$$

Indem diese Werte in

$$\int\limits_{u_0}^{u} \frac{\lambda}{\varkappa} du = -\tfrac{1}{2} v^2 + A v + A'$$

eingesetzt werden, kommt

$$\int\limits_{u_0}^{u} \frac{\lambda}{\varkappa} du = \tfrac{1}{2}(v_1 - v)(v - v_2).$$

Um das Integral weiter zu behandeln, müsste die Abhängigkeit von $\lambda/\varkappa$ von der Temperatur schon bekannt sein. Nennen wir aber, wie auf p. 142, $[\lambda/\varkappa]_{u_0, u}$, den arithmetischen Mittelwert $\lambda/\varkappa$ zwischen u_0 und u, d. h.

$$\left[\frac{\lambda}{\varkappa}\right]_{u_0, u} = \frac{1}{u - u_0}\int_{u_0}^{u} \frac{\lambda}{\varkappa}\, du,$$

so hat man

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{\lambda}{\varkappa}\right]_{u_0, u} \cdot (u - u_0) = \tfrac{1}{2}(v_1 - v)(v - v_2), \\ \text{oder}\quad & \\ &\left[\frac{\lambda}{\varkappa}\right]_{u_0, u} = \tfrac{1}{2}\frac{(v_1 - v)(v - v_2)}{u - u_0}. \end{aligned}\right.$$

Ist u als Maximaltemperatur mitten zwischen v_1 und v_2 gemessen, d. h. $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$, so erhält man

$$(16\text{a})\qquad \left[\frac{\lambda}{\varkappa}\right]_{u_0, u} = \tfrac{1}{8}\frac{(v_1 - v_2)^2}{u - u_0} = \tfrac{1}{8}\frac{V^2}{U},$$

wenn V die elektrische Spannung zwischen den äusseren Punkten und U die maximale Temperaturerhöhung zwischen ihnen ist. Kurz, *die Methode liefert genau den Mittelwert von $\lambda/\varkappa$ zwischen den beiden Temperaturen*, in demselben Sinne, wie etwa bei calorimetrischen oder Ausdehnungsmessungen der Mittelwert einer specifischen Wärme oder eines Ausdehnungscoefficienten entsteht. Zieht man ferner in Erwägung, dass die beiden Temperaturen für eine ausreichend genaue Messung nur um wenige Grade auseinanderzuliegen brauchen, so ist also auch dieses Ergebnis der Methode sehr günstig.

Auf Einzelheiten, Correctionen wegen des Einflusses der Umgebungstemperatur oder wenn u_1 nicht genau gleich u_2 ist, oder auf die instrumentellen Hülfsmittel einzugehen, ist hier nicht der Ort. Nur möge erwähnt werden, dass bei einer Spannungsmessung zwischen Punkten verschiedener Temperatur auf die thermoelektrische Spannung zwischen dem Stabe und den das Potential abnehmenden Drähten Rücksicht zu nehmen ist, was durch Stromwenden geschehen kann. Wenn nur die Spannung zwischen dem äusseren Punktepaar gemessen wird, so kommt dabei nur ihr etwaiger kleiner Temperaturunterschied in Frage.

Die Messungen der Herren Jaeger und Diesselhorst zeigen, dass die Verhältnisse sich nicht nur bei Zimmertemperatur, sondern auch bei 100° in befriedigender Weise gestalten lassen, und zwar genügen Temperaturdifferenzen von wenigen Graden. Man darf erwarten, dass auch die Ausdehnung der Versuche auf höhere und niedrigere Temperaturen keinen unüberwindlichen Schwierigkeiten begegnen wird.

8. Einheiten.

Die Einheit, in welcher $\lambda = \frac{1}{8} \varkappa \, . \, V^2 / U$ gewonnen wird, ist, wenn Potential und elektrisches Leitvermögen in [C.G.S.]-Einheiten gemessen sind, das Leitvermögen eines Raumes, in welchem zwischen zwei parallelen, 1 cm voneinander entfernten Querschnitten von je 1 cm² bei 1° Temperaturdifferenz in 1 sec die [C.G.S.]-Wärmeeinheit fliesst.

War V in Volt gemessen, also V^2 in 10^{16}mal kleinerer Zahl eingesetzt und $\varkappa$ in Ohm^{-1} cm^{-1}, also 10^9mal grösser eingesetzt, so ist das hiermit berechnete Resultat (welches das Wärmeleitvermögen in Watt/[cm × Grad] ausdrückt) mit 10^7 zu multipliciren, um auf die obige „[C.G.S.]-Einheit" des Wärmeleitvermögens bezogen zu sein. Soll das Leitvermögen endlich auf die Wassercalorie bezogen sein, so tritt nun der Divisor 419.10^5 herein, sodass im Ganzen der Factor gleich $10^7 : 419.10^5 = 0,2387$ wird. Den Factor $\frac{1}{8}$ mit hereingenommen, wird also zu rechnen sein:

$$\lambda_1 = \varkappa_1 \, . \, 0,02983 \frac{V_1^2}{U}, \tag{17}$$

wo $\varkappa_1$ in Ohm^{-1} cm^{-1}, V_1 in Volt und λ_1 in g-Cal./cm sec Grad gilt.

9. Elektrische Heizung eines zusammengesetzten Leiters.

Bisher wurde gezeigt (§§ 3 und 5), dass die in einem beliebigen Punkte eines Leiters durch elektrische Heizung entstehende stationäre (höchste) Temperatur, von geometrischen Verhältnissen unabhängig, nur als Function der an demselben Punkte herrschenden elektrischen Spannung auftritt.

Wenn der Heizraum aus mehreren Leitern zusammengesetzt ist, so wird es im allgemeinen schwierig, die Ver-

teilung der Heiztemperatur zu berechnen. Man sieht aus einfachen Beispielen, dass Isothermen und Isopotentialen im allgemeinen nicht zusammenfallen. Es sei z. B. ein Stab schräg aus zwei Körpern zusammengestossen, welche die Elektricität gleich gut leiten, während I die Wärme besser leitet als II. Dann bilden die Isopotentialen parallele Ebenen, die Isothermen aber sind im allgemeinen in der Schnittfläche geknickte Flächen von solcher nach zwei Seiten offener Krümmung und solcher Lage, dass die hohen Temperaturen nach II hin verschoben sind, und haben nur an dem Umfange des Stabes dieselbe Richtung wie die Isopotentialen.

Es giebt aber zwei Gruppen von besonderen Fällen, die sich mit zusammenfallenden Isothermen und Isopotentialen der Gleichung (8) unterordnen.

Die eine, ohne weiteres einleuchtende Gruppe umfasst den Fall, dass die Berührungsflächen zugleich Isopotentialflächen sind, also wenn z. B. ein Cylinder aus mehreren senkrecht zusammengestossenen Teilen besteht. Ueber solche Fälle ist es überflüssig, etwas zu sagen.

Von Interesse ist dagegen der andere Fall, wenn nämlich ein Körper in *beliebiger Weise* aus mehreren Leitern zusammengesetzt ist, die ungleiche Leitvermögen haben, deren *Verhältnis* $\varkappa / \lambda$ *aber gleich gross ist. Alsdann gilt der früher abgeleitete Satz ohne Einschränkung.* Da die, für die elektrische Heizung die höchstmögliche Temperatur gebenden reinen Metalle der obigen Anforderung nahe kommen, so hat diese Erweiterung des Satzes eine umfassende principielle Bedeutung.

Um diesen Satz abzuleiten, müssen die Zustände erstens im Innern jedes Leiters und zweitens an der Berührungsfläche untersucht werden. Im Innern eines Leiters muss der elektrische Strom sich so ausbilden, dass an jedem Punkte der Berührungsfläche Isopotentialen von gleichem Werte zusammentreffen.[1]) Dann wird ein möglicher, d. h. mit der Differentialgleichung (1) übereinstimmender Zustand der Temperaturvertheilung durch das besondere Integral Gleichung (8)

---

1) Gewöhnliche Contactpotentiale, die sich in jedem Leiter über die Strompotentiale als constante Beträge superponiren, sollen hierbei nicht mitgerechnet werden. Ausserdem freilich können Thermokräfte und Peltier-Wärmen in Frage kommen, von denen aber hier abgesehen wird.

gegeben, welches die Isothermen mit den Isopotentialen zusammenfallen lässt, und welches natürlich, wie dort, die Forderung einschliesst, dass auch an den Eintrittsstellen des Heizstromes in das System dieses Zusammenfallen besteht.

Es fragt sich aber noch, ob dieser Zustand mit der für die Berührungsfläche zu erfüllenden Bedingung verträglich ist, dass die Summe der Wärmemengen, die einem Element derselben von beiden Seiten zugeleitet werden, gleich Null ist. Um dies zu untersuchen, dient die folgende Betrachtung.

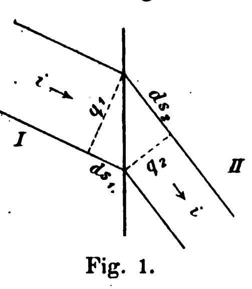


Fig. 1.

Bei dem Durchtritt durch eine Berührungsfläche verschiedener Leiter werden die elektrischen Stromlinien oder die Isopotentialflächen gebrochen und zwar so (vgl. die Fig. 1, welche mit der Annahme, dass der Leiter II das grössere elektrische Leitvermögen besitzt, einen zur Berührungsfläche senkrecht gelegten, mit den Stromlinien parallelen Schnitt vorstellt), dass die Stromstärken in zwei zusammengehörigen Stromfäden gleich gross sind, also:

$$\frac{\varkappa_1 q_1}{d s_1} = \frac{\varkappa_2 q_2}{d s_2}. \tag{18}$$

Nach der in dem Integrale Gleichung (8) liegenden Voraussetzung fallen nun die Stromlinien für die Wärme auf jeder Seite mit den elektrischen Stromlinien zusammen. In der Berührungsfläche müssen ferner von beiden Seiten gleiche Temperaturen und gleiche Potentiale zusammentreffen. Deswegen müssen die Temperatur- und Wärmegefälle auf beiden Seiten einander proportional sein. Dem Elemente der Berührungsfläche (Fig. 1) werden also durch Leitung Wärmemengen auf der einen Seite zugeführt, auf der anderen entzogen, die sich zu einander verhalten wie

$$\frac{\lambda_1 q_1}{d s_1} : \frac{\lambda_2 q_2}{d s_2}, \tag{19}$$

wo q_1/ds_1 und q_2/ds_2 dieselben Werte haben, wie in Gleichung (18).

Dieses Verhältnis muss, wenn der Zustand möglich sein

soll, gleich eins sein. Mit der Gleichung (18) ist diese Forderung offenbar nur dann verträglich, wenn die Proportion besteht:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2} \quad \text{oder} \quad \frac{\lambda_1}{\varkappa_1} = \frac{\lambda_2}{\varkappa_2}.$$

Ist die Proportion erfüllt, so besteht auch an der Grenzfläche kein Widerspruch gegen den Zustand.

Nehmen wir nun endlich, wie auf p. 139, an, dass auch der jetzige Fall eine eindeutige Lösung hat, so kommt der Satz von p. 151 heraus.

Die Fig. 2 soll z. B. einen Stab vorstellen, der aus zwei Leitern schräg zusammengesetzt ist, von denen der linke sowohl die Elektricität wie die Wärme etwa doppelt so gut

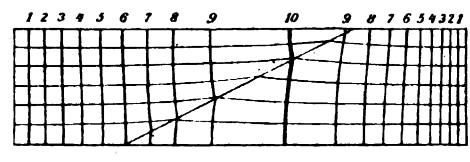


Fig. 2.

leitet, als der rechte. Die horizontale Schaar von Curven bezeichnet die Stromlinien (in denen überall auch die Wärme abfliesst), die verticale stellt die auf den vorigen senkrechten Isothermen von gleicher Temperaturdifferenz vor, die Maximalisotherme stärker ausgezogen. (Diese Curven sind natürlich auch Isopotentialen, aber von ungleicher Differenz.)

Aus der obigen Bemerkung folgt noch, dass, wenn $\lambda_1/\varkappa_1$ und $\lambda_2/\varkappa_2$ ungleich sind, ein Zusammenfallen der Isothermen mit den Isopotentialen in der Nachbarschaft der Grenzfläche nicht möglich ist. Ausgenommen kann nur ein Fall sein, wo $d s_1$ bez. $d s_2$ in den beiden Ausdrücken (18) und (19) nicht dieselben Grössen vorzustellen brauchen. Dieser Fall besteht, wenn die Stromlinien die Fläche *senkrecht durchsetzen*, denn der Zwang der Gleichheit kommt ja nur davon her, dass die zu den Stromlinien gezogenen Senkrechten die Grenzfläche schneiden. Sind sie den Grenzflächen parallel, so können sie, ohne einen geometrischen Widerspruch, einen beliebigen Abstand von ihr haben. Dieser Fall ist also lediglich der schon auf p. 151 erwähnte.

10. Die zahlenmässigen Heizgrenzen.

Solange die Temperaturerhöhung klein bleibt, kann man $\lambda/\varkappa$ als Constante behandeln. Die maximale Temperaturerhöhung U durch die elektromotorische Kraft E beträgt also nach Gleichung (14), p. 145:

$$U = \frac{1}{8}\frac{E^2}{\lambda/\varkappa}.$$

Um den günstigsten Zustand zu berechnen, nimmt man das kleinste bekannte $\lambda/\varkappa$, welches nach Jaeger und Diesselhorst[1]) bei Zimmertemperatur (an Aluminium) gleich $6{,}4 \cdot 10^{-6}$ Watt × Ohm × Grad^{-1} gefunden wurde. Die Einsetzung giebt also, E in Volt gemessen,

$$U = \frac{10^6}{8 \cdot 6{,}4} E^2 = 20000\, E^2.$$

Man würde also für 0,01 Volt + 2,0°, für 0,022 Volt + 10°, für 0,1 Volt + 200° erzielen, wobei aber die letztere Zahl zu hoch berechnet ist, weil das Anwachsen von $\lambda/\varkappa$ bis zu solchen Temperaturen schon beträchtlich ist. Die meisten anderen reinen Metalle geben etwas kleinere Zahlen von derselben Ordnung.

11. Die Lorenz'sche Gleichung.

L. Lorenz hat, wie eingangs erwähnt, in seinem Aufsatze: „Ueber die Bestimmung des Wärmegrades in absolutem Maasse"[2]) einen Theil der hier mitgetheilten Betrachtungen angestellt, unter der speciellen, von Lorenz aus theoretischen Erwägungen vermuteten Annahme, dass das Verhältnis $\lambda/\varkappa$ der absoluten Temperatur T proportional sei,

$$\frac{\lambda}{\varkappa} = a \cdot T. \tag{20}$$

In diesem Falle erhält man aus Gleichung (13)

$$\int_{T_0}^{T} a\, T\, d\, T = \tfrac{1}{2}(v_1 - v)(v - v_2)$$

oder

$$T^2 - T_0^2 = \frac{1}{a}(v_1 - v)(v - v_2) \tag{20a}$$

und

$$T_{\max}^2 - T_0^2 = \frac{1}{4a} E^2. \tag{21}$$

---

1) W. Jaeger u. H. Diesselhorst, l. c. p. 726.

2) L. Lorenz, Pogg. Ann. 147. p. 449. 1872.

Man darf jetzt bestimmt sagen, dass diese Grundlage nicht aufrecht zu erhalten ist, denn das Verhältnis $(\lambda/\varkappa)_{100^0}/(\lambda/\varkappa)_{18^0}$, welches nach der Lorenz'schen Annahme = 1,29 sein müsste, schwankt nach der von Jaeger und Diesselhorst mitgeteilten Tabelle zwischen 1,12 und 1,35. Bei Kupfer, Silber, Gold, Nickel, Zink, Cadmium, Blei, Zinn liegt aber in der That das Verhältnis zwischen 1,27 und 1,31, also dem nach Lorenz berechneten sehr nahe. Das ist immerhin eine beträchtliche Anzahl von Leitern, welche der Lorenz'schen Annahme zwischen 18 und 100° nahezu folgen.

Macht man die Annahme, dass dies auch in weiteren Temperaturgrenzen der Fall ist, so lässt sich nun die Constante a einführen und folgendermaassen bestimmen. Wir wollen als günstiges Beispiel den kleinsten Wert aus der genannten Gruppe wählen, nämlich für 18° (oder $T = 291°$) $\lambda/\varkappa = 6,7 . 10^{-6}$ setzen. Dann findet sich

$$a = \frac{6,7 . 10^{-6}}{291} = 0,023 . 10^{-6},$$

also $1/(4a) = 10900000$.

Hieraus lässt dann, wenn als Elektrodentemperatur 0° (oder $T_0 = 273$) gesetzt wird, die Gleichung (21) berechnen:

für die elektromotorische Kraft E =	0,01	0,1	1	2	3 Volt
die Temperaturerhöhung	+ 1,92	155	3040	6330	9630°

Für 1 Daniell oder 1,1 Volt berechnet sich + 3370°. Lorenz' Rechnung in seiner zweiten Abhandlung[1]) stimmt fast genau hiermit überein (in der früheren [l. c.] war + 2600° berechnet). Für $^1/_5$ Daniell oder 0,22 Volt kommt + 603°, womit meine alte (l. c., vgl. p. 134) Schätzung (600°) zufällig genau stimmt.

Wählt man als Elektrodentemperatur die Siedetemperatur — 183° der flüssigen Luft, so werden die Zahlen, besonders für die kleinen Spannungen, grösser, nämlich:

für die elektromotorische Kraft E =	0,01	0,1	1 Volt
die Temperaturerhöhung =	+ 5,9	252	3210°

Würde man vom absoluten Nullpunkt ausgehen können, so käme:

+ 33	330	3300°

1) L. Lorenz, Wied. Ann. **13**. p. 604. 1881.

In den Zahlen spricht sich aus, was aber schon aus Vorlesungsversuchen gefolgert werden kann, bei denen man ja einen Platindraht mit einem Daniellelement leicht zum Schmelzen bringt, dass mässige elektromotorische Kräfte Temperaturen geben, welche die durch das Schmelzen des Leiters für das Gesetz gesteckte Grenze überschreiten. Das Quantitative betreffend wollen wir freilich nicht übersehen, dass die Rechnung bis jetzt lediglich eine Extrapolation von Beobachtungen innerhalb eines Intervalles auf ein sehr viel grösseres Aussengebiet ist.

Was im flüssigen Zustande geschieht, kann man noch weniger sicher voraussagen, weil hier keine genügende Erfahrung über den Einfluss der Temperatur auf das Wärmeleitvermögen vorliegt. Merkwürdig ist, dass der für Quecksilber aus den bisherigen Bestimmungen des Wärmeleitvermögens (von Ångström, H. F. Weber, Berget) sich ergebende Wert von $\lambda/\varkappa$ ungefähr derselbe ist, wie für die genannte Gruppe fester reiner Metalle bei derselben Temperatur.

Hiernach muss man für möglich halten, dass flüssige Metalle sich den reinen festen Metallen anschliessen oder in diesem Falle wahrscheinlich den idealen Zustand für die Beziehungen zwischen den beiden Leitvermögen vertreten. Wenn man derartiges vermutet, so hat man dem Leitvermögen des Quecksilbers, besonders auch seiner Abhängigkeit von der Temperatur die grösste Aufmerksamkeit zu schenken. Auf eine elektrische Heizmethode wird auch hier das Augenmerk zu richten sein; den stationären Zustand zu erzielen, hat aber bedeutend grössere Schwierigkeiten, weil zu der notwendigen Einschliessung in Wände und zur Beweglichkeit des Leiters sein geringes Wärmeleitvermögen hinzukommt. Deswegen wird meines Erachtens hier eine Methode mit Zeitbeobachtung, für welche die übrigen Verhältnisse nicht ungünstig liegen, eine grössere Aussicht auf Erfolg bieten.

12. Die Temperatur der entwickelten Wärmemengen.

Am elektrisch geheizten Leiter sind ausser der Temperatur die in ihm entwickelten Wärmemengen von Interesse. Man sieht sofort, dass für diese die Unabhängigkeit von individuellen Verhältnissen in demselben Umfange besteht, wie für die Tem-

peraturen selbst. Je nach der Lage des Leiterteiles, in dem die Entwickelung stattfindet, entsteht die Stromwärme in verschiedener Temperatur. Die Verteilung der Wärmemengen auf die verschiedenen Temperaturen wird aber von geometrischen Verhältnissen nicht beeinflusst.

Um das zu sehen, denke man sich den Leiter durch eine Schaar Isopotentialflächen constanter Spannungsdifferenz in Elementarschalen zerlegt. Durch jede Schale fliesst derselbe Gesamtstrom, also wird, wegen des angenommenen, für alle Schalen gleichen Spannungsabfalles, in jeder dieselbe Wärmemenge entwickelt. In jeder Schale herrscht eine constante, nach Gleichung (8), p. 141, zu bestimmende Temperatur, die nur von dem daselbst bestehenden Potentiale abhängt.

Führt man diese Zerlegung in verschieden gestalteten Leitern aus, an deren beliebig gestaltete Elektroden eine gleiche Spannung angelegt ist, so erhält man in allen dieselbe Verteilung der Temperaturen und Wärmemengen.

Schluss.

In übersichtlicher Form kann man das Wesentlichste dieser Entwickelungen folgendermaassen ausdrücken. Zur Verfügung stehe eine elektromotorische Kraft, die an Elektroden eines Leiters angelegt werde, von denen sich die positive und die negative je constant auf gegebener Temperatur befinde. Die übrige Oberfläche des Leiters ist gegen Wärmedurchgang geschützt und die Heizung sei bis zum stationären Zustande fortgesetzt.

Man denke sich nun in dem Raume ein System von Isopotentialen gezeichnet. Dann sind hierdurch und durch das Verhältnis $\lambda/\varkappa$ des Wärmeleitvermögens zum elektrischen Leitvermögen die Temperaturen und die bei jeder Temperatur entwickelten Wärmemengen vollkommen bestimmt. Der Zustand ist stets derselbe, der Leiter und seine Elektroden mögen gross oder klein und gestaltet sein, wie man wolle, auch wenn mehr als zwei Elektroden angelegt werden, sobald nur derselbe Widerstand zwischen den positiven und negativen Elektroden besteht, also dieselbe elektrische Energie verbraucht wird. Der Temperaturzustand ist auch von dem Gesamtwiderstande (also von der Stromstärke) unabhängig, er wird nur durch die

angelegte elektromotorische Kraft, die Elektrodentemperaturen und das Leitverhältnis $\lambda/\varkappa$ bestimmt. In Punkten gleicher elektrischer Spannung besteht dieselbe Temperatur.

Es ist dabei gleichgültig, ob der Leiter aus einem Materiale besteht oder aus mehreren zusammengesetzt ist, die ungleich gut leiten dürfen, sobald nur das Leitverhältnis $\lambda/\varkappa$ bei derselben Temperatur denselben Wert hat.[1])

Die höchsten Heiztemperaturen giebt eine umfangreiche Gruppe reiner Metalle, welche das kleinste Leitverhältnis $\lambda/\varkappa$ besitzen. Insofern dieses Verhältnis für alle ungefähr gleich gross und auch von der Temperatur ungefähr gleich stark abhängig ist, gilt für beliebig aus solchen Metallen zusammengesetzte Leiter also ungefähr derselbe Zustand.

Hat die angelegte elektromotorische Kraft an beiden Elektroden dieselbe Temperatur, so richtet sich die Temperaturerhöhung U an einem Punkte, der gegen die beiden Elektroden die Spannungen V_1 und V_2 hat (wo also $V_1 + V_2 = E$ die gesammte elektromotorische Kraft darstellt), nach dem Gesetze

$$U = \frac{1}{2}\frac{V_1 V_2}{[\lambda/\varkappa]}.$$

$[\lambda/\varkappa]$ bedeutet den Mittelwert des Leitverhältnisses in dem Temperaturintervall U.

Die Maximaltemperatur liegt bei der mittleren Spannung ($V_1 = V_2 = \frac{1}{2}E$) und beträgt, wenn E, λ und $\varkappa$ in einem einheitlichen Maasse ausgedrückt werden,

$$U_{\max} = \frac{1}{8}\frac{E^2}{[\lambda/\varkappa]}.$$

Charlottenburg, 29. October 1899.

[1]) Von Contactpotentialen, sowie von thermoelektrischen Potentialen und Wärmeentwickelungen wird hier abgesehen.

(Eingegangen 31. October 1899.)

Zur Kenntnis des Funkenpotentiales in Gasen;
von Adolf Orgler.

§ 1. *Einleitung.* Ueber das Funkenpotential in Gasen gen bereits viele Untersuchungen vor, unter denen die von ιille[1]), Liebig[2]), Paschen[3]), Wolf[4]), Heydweiller[5]) geführt werden mögen. Gleichwohl ist hier noch nicht das ·eicht, was als das Endziel der experimentellen Erforschung ιes Phänomens betrachtet werden muss: nämlich die vollιndige Charakterisirung einer Substanz in Bezug auf das ιänomen durch eine oder mehrere Constanten, welche nur n der Substanz abhängig sind. Die von Paschen und olf sogenannte elektrische Festigkeit erfüllt diese Forderung :ht, da sie von der Schlagweite und vom Druck des Gases hängt. Die Aufsuchung einer für das betreffende Gas wirkh charakteristischen Constanten war das Ziel dieser Unterchung, welches auch wohl erreicht ist.

Bei der Durchsicht des vorliegenden Beobachtungsmateriales igte sich teilweise gute Uebereinstimmung der verschiedenen ›obachter untereinander, teilweise aber, besonders in Kohlenure, ergaben sich sehr erhebliche Abweichungen, für welche ıe Erklärung gesucht werden musste.

§ 2. *Versuchsanordnung.* Zu den Versuchen benutzte ich n gewöhnliches Funkenmikrometer. Die Elektroden waren rei Messingkugeln von 1,25 cm Radius.

Zur Feststellung des Kugelabstandes wurde häufig das elmholtz'sche Ophthalmometer, meist aber folgende einchere Methode angewandt. Von verschieden starken, mög:hst calibrischen Messingdrähten wurden die Durchmesser rgfältig bestimmt. Von den Drahtsorten, deren Durchmesser

1) J. B. Baille, Ann. de phys. et chim. (5) **29.** p. 181. 1883.
2) G. A. Liebig, Phil. Mag. (5) **24.** p. 106. 1887.
3) F. Paschen, Wied. Ann. **37.** p. 69. 1889.
4) M. Wolf, Wied. Ann. **37.** p, 306. 1889.
5) A. Heydweiller, Wied. Ann. **48.** p. 213. 1893.

den gewünschten Funkenstrecken am nächsten kamen, wurde je ein fehlerfreies, etwa 1 cm langes Stück mit beiden Enden an einem Faden befestigt. Nun wurde mit Hülfe der Mikrometerschraube der Abstand der Kugeln so lange verändert, bis das an dem Faden horizontal gehaltene Stück zwanglos hindurchglitt. Die so erhaltene Entfernung wurde dem Durchmesser des benutzten Drahtes gleichgesetzt.

Bei den Messungen stand das Funkenmikrometer unter einer Glasglocke von 21 cm Höhe und 19,5 cm inneren Durchmesser auf einem mit Stanniol belegten Luftpumpenteller. Die Funkenstrecke befand sich stets möglichst in der Mitte der Glocke. Durch den Teller war ein Zuleitungsdraht, vermittelst Glasröhren und Chattertoncompound[1]) von der Stanniolbelegung isolirt, luftdicht eingeführt. Er verband den einen Pol der Elektrisirmaschine mit der zu ladenden Kugelelektrode. Das Innere der Glasglocke war mit einem dichten Drahtnetz bekleidet, das ebenso wie die Stanniolbelegung des Tellers und der abzuleitende Pol des Funkenmikrometers mit der Wasserleitung verbunden war. Um die Intensität der Funken zu verringern, war in die Erdleitung des Funkenmikrometers ein Widerstand, bestehend aus einer schwachen Salzlösung, eingeschaltet.

Zur Evacuirung diente eine Wasserluftpumpe. Ein offenes Quecksilbermanometer gab unter Berücksichtigung des Barometerstandes den vorhandenen Gasdruck an. Durch einen Messinghahn konnte der Recipient luftdicht geschlossen werden. Als Elektricitätsquelle diente eine Wimshurstmaschine. Der eine Pol stand mit der inneren Belegung einer Batterie von drei grossen Leydener Flaschen (Höhe der Belegung gleich 35 cm, Durchmesser der Flasche gleich 20 cm) in Verbindung. Von dort führten 3 mm dicke Leitungsdrähte zu den Messapparaten und zum Funkenmikrometer. Der andere Pol der Wimshurstmaschine, sowie die äussere Belegung der Batterie waren mit der Erde (Wasserleitung) verbunden.

Ueber die Darstellung der Gase und die Füllung der Apparate, die im wesentlichen die übliche ist, vgl. die Dissertation.

---

1) Eine Art Asphaltkitt.

Die Behandlung der Elektroden und die Beobachtungsweise war dieselbe wie die von Paschen.

Die durchschnittliche Temperatur im Recipienten betrug 18° C.

§ 3. *Die Messung der Potentialdifferenz* erfolgte durch ein Righi'sches Reflexionselektrometer, wie es Quincke[1]) beschrieben hat.

Zu seiner Aichung benutzte ich für Potentiale bis zu 15 elektrostatischen Einheiten einen Hochspannungsaccumulator von 2400 Zellen. Grössere Spannungswerte wurden mit einer eigens für diese Arbeit construirten Potentialwaage ermittelt, deren Constante ich mit Hülfe einer bekannten Accumulatorenspannung bestimmte. Das Instrument und sein Gebrauch ist in meiner Dissertation ausführlich beschrieben.

Zu Controlbestimmungen diente ein Braun'sches Elektrometer, welches in einer von Hrn. Warburg etwas modificirten Form von Albrecht in Tübingen gebaut ist. Es ist etwas grösser, der Zuleitungsdraht ist sorgfältiger vom Gehäuse isolirt, die hintere durchsichtige Glasscheibe ist durch einen Spiegel ersetzt, die Scala in Doppelgrade geteilt. Es wurde mit Hülfe der Potentialwaage und des Righi'schen Elektrometers von mir geaicht. Es dient zur Messung von Spannungen bis ca. 10 000 Volt.[2])

§ 4. *Beseitigung des Einflusses der Verzögerung.* Zuerst wurden in freier Zimmerluft Messungen vorgenommen, deren Resultate mit denen von Paschen und Heydweiller sehr gut übereinstimmten.

Bei den Versuchen in Kohlensäure ergaben sich grosse Abweichungen bei direct aufeinander folgenden Messungen. Ja, man konnte innerhalb ziemlich weiter Grenzen bei einer beliebigen Spannung die Entladung herbeiführen. Wenn man nämlich das Potential vorsichtig bis zu einem etwa passenden Werte steigerte und dann constant hielt, so erfolgte nach längerer oder kürzerer Zeit Funkenentladung.

1) G. Quincke, Wied. Ann. 19. p. 564. 1883.

2) Hr. Albrecht ist im Besitz eines zweiten derartigen von mir geaichten Elektrometers, dessen Angaben für die künftigen Instrumente dieser Art maassgebend sein sollen. Die Angaben der früheren waren stets mit einem Correctionsfactor (etwa 1,2) zu multipliciren.

Dieses Verhalten erklärt die grossen Abweichungen bei den früheren Beobachtern. Als seine Ursache ergab sich die Verzögerung bei der Funkenentladung. Als ich nämlich die Versuche in Kohlensäure wiederholte, indem ich die Verzögerung durch passende Belichtung der Funkenstrecke nach Warburg[1]) aufhob, erhielt ich constante Werte. Es wurde daher als Funkenpotential diejenige Spannung genommen, welche die Funkenentladung hervorrief, wenn die Verzögerung durch Belichtung der Kathode vernichtet war.

§ 5. Einige *Beobachtungen über die Verzögerung und über die Wirkung des Lichtes* mögen hier Platz finden.

Die Erscheinung zeigte sich in allen von mir untersuchten Gasen, in Kohlensäure weitaus am stärksten, in Stickstoff, Sauerstoff und Luft ungefähr gleichmässig, schwächer, aber doch bemerkbar in Wasserstoff. Lässt man sie bestehen, so erhält man grössere und weniger gut übereinstimmende Werte des Funkenpotentials. Die höchsten Spannungen wurden alsdann bei recht gleichmässiger, nicht zu langsamer Ladung erzielt.

Was die Wirkung des Lichtes betrifft, so fanden sich die Angaben von Warburg durchaus bestätigt. Das Licht vermindert die Verzögerung, und zwar sind die ultravioletten Strahlen die wesentlich wirksamen.

Als verschiedene Beleuchtungsintensitäten untersucht werden sollten, benutzte ich einen Recipienten, der an der Seite ein luftdicht schliessendes Quarzfenster besass. Die Lichtquelle wurde stets so gestellt, dass ihre Strahlen die ganze Funkenstrecke direct trafen. Als Lichtquelle benutzte ich eine Bogenlampe, den zwischen zwei Aluminiumstäben überspringenden Funken eines durch eine Leydener Flasche verstärkten Ruhmkorffapparates, einen Wachsstock und einen Spiritusbrenner.

In Wasserstoff ist die Verzögerung nur schwach und wird nach meinen Beobachtungen durch jede Beleuchtung mit ultravioletten Strahlen in gleicher Weise vernichtet. In Luft hingegen und noch deutlicher in Kohlensäure machte sich ein Einfluss der Lichtintensität auf die Grösse der Verzögerung bemerkbar. Das Potential wurde stets sehr langsam gesteigert. Es wurden aber bei der Beleuchtung mit Wachsstock oder

---

1) E. Warburg, Wied. Ann. **62.** p. 85. 1897.

Spiritusbrenner oft beträchtlich höhere, nie geringere Werte erzielt als bei der Anwendung der Bogenlampe oder des Ruhmkorfffunkens.

Auch bei Abblendung von schätzungsweise 75 Proc. des Bogenlichtes durch einen Schirm von 6 fach gefaltetem Drahtgeflecht konnte das Funkenpotential oft ziemlich erheblich überschritten werden, ehe Entladung erfolgte.

Nach Paschen fielen die Werte für das Funkenpotential in freier Zimmerluft unter sonst gleichen Versuchsbedingungen im Sommer um etwa 4 Proc. kleiner aus als im Winter. Es kann dies vielleicht aus einer Verminderung der Verzögerung erklärt werden, welche durch die grössere Lichtintensität des Sommers, sowie seine höhere Luftfeuchtigkeit[1]) herbeigeführt wurde.

Es ist noch der Einfluss der Natur des Gases, in welchem der beleuchtende Funke erzeugt wird, untersucht worden. Ich fand, dass die Verzögerung in Luft, Kohlensäure, Wasserstoff und Leuchtgas vernichtet wurde, wenn ein genügend starker Funke in Luft, Kohlensäure oder Wasserstoff übersprang. Dagegen war ein in Leuchtgas erzeugter Funke auf die Verzögerung in Luft und Kohlensäure wirkungslos. Nähere Angaben hierüber finden sich in der Dissertation.

§ 6. Bei *den definitiven Messungen* wurde die Verzögerung stets aufgehoben. Die Messungen erfolgten in der Weise, dass bei Annäherung an das mutmaassliche Funkenpotential die Funkenstrecke dauernd belichtet und die Spannung vorsichtig gesteigert wurde, bis Entladung eintrat. Einen so deutlichen Unterschied zwischen dem Potential des ersten überspringenden Funkens und dem aller übrigen, wie ihn Paschen angiebt, habe ich nicht bemerkt.

Nachstehende Tabellen geben für Luft, Kohlensäure, Wasserstoff, Stickstoff und Sauerstoff die Werte des Funkenpotentiales V in seiner Abhängigkeit von der Schlagweite δ (in cm) und vom Gasdruck P (in cm Hg von 0°).

Die Spannung V ist in C.G.S.-Einheiten angegeben, wobei 1 C.G.S.-Einheit = 300 Volt gesetzt wurde.

1) Vgl. E. Warburg, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 129. 1897.

Luft.

P cm	$\delta=0{,}04$	0,06	0,08	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50 cm
75	7,51	10,12	12,69	15,22	27,34	38,58	48,82	58,18
65	6,80	9,08	11,32	13,54	24,15	34,04	43,16	51,56
55	6,06	8,08	10,08	12,04	21,25	29,82	37,64	44,85
45	5,46	7,20	8,86	10,40	18,25	25,50	32,06	38,08
35	4,58	6,06	7,40	8,72	15,02	20,91	26,24	31,13
25	3,70	4,74	5,75	6,80	11,65	16,00	20,00	23,72
15	—	3,54	4,27	4,97	8,20	11,00	13,59	16,16
10	—	2,57	3,11	3,64	6,13	8,16	10,05	11,93
6	—	1,94	2,30	2,65	4,31	5,80	7,13	8,35
4	—	1,61	1,89	2,16	3,39	4,50	5,48	6,38
2	—	—	—	—	2,48	3,13	3,70	4,22

Kohlensäure.

P cm	$\delta=0{,}04$	0,06	0,08	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60 cm
75	8,01	10,22	12,40	14,54	24,84	34,70	43,88	52,44	60,50
65	7,33	9,40	11,38	13,34	22,61	31,13	39,02	46,65	54,26
55	6,66	8,45	10,19	11,91	20,05	27,55	34,50	41,10	47,40
45	6,01	7,54	9,00	10,40	17,24	23,64	29,44	34,96	40,50
35	5,18	6,46	7,68	8,89	14,38	19,60	24,32	28,80	33,10
25	4,45	5,40	6,33	7,23	11,57	15,50	19,14	22,54	25,90
15	—	4,13	4,79	5,42	8,29	10,80	13,18	15,52	17,85
10	—	3,28	3,77	4,25	6,50	8,35	10,09	11,79	13,40
6	—	—	3,0	3,34	4,78	6,11	7,29	8,40	9,54
4	—	—	—	2,90	3,99	4,99	5,88	6,70	7,45
2	—	—	—	—	—	3,52	—	—	5,0

Wasserstoff.

P cm	$\delta=0{,}05$	0,08	0,10	0,20	0,30	0,50	0,60 cm
75	5,50	7,77	9,22	15,90	21,95	32,86	37,49
65	5,08	7,01	8,27	14,19	19,73	29,35	33,45
55	4,64	6,34	7,43	12,58	17,40	25,74	29,32
45	4,08	5,48	6,39	10,86	15,04	22,17	25,08
35	3,48	4,62	5,38	8,98	12,37	18,23	20,72
25	2,88	3,76	4,33	7,00	9,55	14,04	16,08
15	2,27	2,91	3,31	5,11	6,60	9,57	11,01
10	1,78	2,25	2,54	3,86	4,99	7,16	8,28
6	—	—	2,01	2,90	3,73	5,18	5,9
4	—	—	—	—	2,8	3,8	—

cm	Stickstoff. $\delta = 0,06$	0,10	0,20	0,30	0,50	Sauerstoff. 0,06	0,10	0,20	0,30	0,50 cm
75	10,88	16,30	28,70	39,97	60,42	9,16	13,60	24,10	34,32	52,34
65	9,88	14,66	25,82	35,88	54,00	8,27	12,33	21,68	30,73	46,72
55	8,76	13,06	22,95	31,60	47,25	7,38	10,97	19,02	26,67	40,47
45	7,78	11,22	19,58	27,00	40,25	6,52	9,48	16,25	22,62	34,16
35	6,57	9,47	16,13	22,25	33,18	5,54	7,95	13,42	18,62	27,75
25	5,27	7,45	12,59	17,10	25,39	4,39	6,20	10,45	14,25	21,24
5	3,85	5,35	8,70	11,71	17,25	3,3	4,53	7,40	9,81	14,40
0	—	4,06	6,62	8,82	12,80	—	3,42	5,58	7,32	10,57
6	—	—	4,79	6,32	8,97	—	—	3,95	5,25	7,48
	—	—	—	4,8	6,7	—	—	—	—	5,7

Nach diesen Tabellen kann man für jedes Gas zwei Arten von Curvenscharen construiren. Die einen geben das Funkenpotential in seiner Abhängigkeit vom Druck P bei gleichbleibender Schlagweite δ, die anderen in seiner Abhängigkeit von δ bei constantem P.

Von letzteren findet man einige in Fig. 1 gezeichnet. Der allgemeine Charakter beider Arten von Curven ist für alle

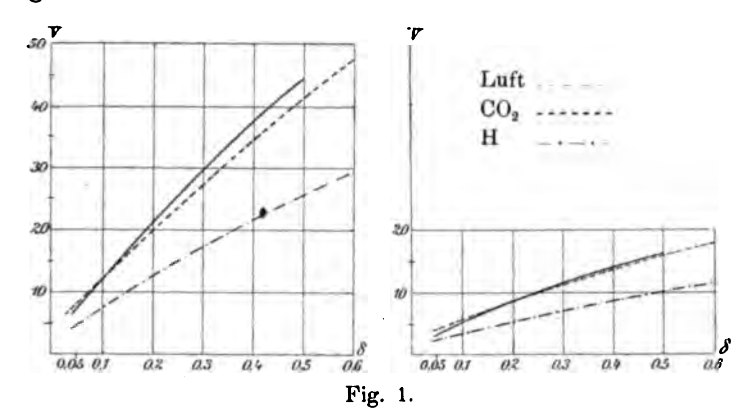


Fig. 1.

Gase der gleiche. Es sind, wie auch bei **Paschen**, von oben gesehen convexe Curven von schwacher, besonders im Anfang gut ausgeprägter Krümmung.

§ 7. *Vergleichung mit älteren Beobachtern.* Die Versuche von **Baille** und **Liebig** erstrecken sich auf verschiedene Gase bei Atmosphärendruck. Nur für Luft hat **Baille** auch den

Einfluss des Druckes auf das Funkenpotential gemessen. Paschen's Arbeit behandelt das Funkenpotential in Luft, Kohlensäure und Wasserstoff in seiner Abhängigkeit von der Schlagweite und vom Gasdruck für Drucke bis zu 1 Atm.

Nachstehende Tabelle giebt für Luft, CO_2 und H die Resultate der genannten Beobachter, bezogen jedesmal auf meine den gleichen Bedingungen entsprechenden Werte als Einheit.

	Funkenpotential in		
	Luft	CO_2	H
Orgler	1	1	1
Baille	1,29	1,70	1,11
Liebig	1,00	1,14	1,27
Paschen	1,01	1,08	1,02

Meine Resultate stimmen am besten mit denen von Paschen überein. Die Werte der früheren Beobachter sind fast sämmtlich grösser als die meinigen, was sich aus dem Einfluss der Verzögerung erklärt. Die wenigen Ausnahmen sind vielleicht auf die Verschiedenheit des Krümmungshalbmessers der benutzten Elektroden zurückzuführen.

In CO_2 und besonders bei kleinen Schlagweiten sind die Abweichungen ungemein gross. Doch litten die Untersuchungen der früheren Beobachter gerade bei diesen Versuchsbedingungen unter sehr grossen Schwankungen des Funkenpotentiales.

Bei grösseren Funkenstrecken wird die Uebereinstimmung in allen drei Gasen besser. Für Luft und für Wasserstoff wird sie zwischen Paschen und mir sogar recht befriedigend.

Zwischen dem Potential V, dem Druck P und der Schlagweite δ besteht nach Paschen folgende Beziehung: Bildet man das Product aus Druck P und Schlagweite δ, so entsprechen bei jedem Gase gleichen Werten dieses Productes $P\delta$ gleiche Werte des Funkenpotentiales V, sodass beispielsweise in Wasserstoff für

$$P\delta = 20, \qquad V = 19{,}45,$$

ob nun $\quad P = 40, \qquad \delta = 0{,}5,$

oder $\quad P = 50, \qquad \delta = 0{,}4.$

Diese Beziehung fand ich nur annähernd bestätigt. Mit ganz geringen Ausnahmen entspricht dem kleineren Wert des Factors P das höhere V.

Nachstehende Tabelle lässt dies deutlich hervortreten. In der ersten Columne finden wir die Producte $P\delta$, in der zweiten und dritten die Werte der einzelnen Factoren P und δ, die ferneren Columnen geben uns die entsprechenden Funkenpotentiale in den einzelnen Gasen.

$P\delta$	P	δ	Funkenpotentiale in				
			Luft	Kohlensäure	Wasserstoff	Stickstoff	Sauerstoff
0,6	2	0,3	3,13	3,52	—	—	—
	3	0,2	2,94	—	—	—	—
	6	0,1	2,65	3,34	—	—	—
	7,5	0,08	2,60	3,3	—	—	—
	10	0,06	2,57	3,28	—	—	—
1,5	2,5	0,6	—	5,6	—	—	—
	3	0,5	5,30	—	—	—	—
	3,75	0,4	5,26	—	—	—	—
	5	0,3	5,15	5,55	3,26	5,6	—
	7,5	0,2	4,99	5,42	3,26	5,48	4,56
	15	0,1	4,97	5,42	3,21	5,35	4,53
	18,75	0,08	4,83	5,37	3,26	5,27	4,39
	25	0,06	4,74	5,40	—	—	—
	30	0,05	—	—	3,18	—	—
	37,5	0,04	4,69	5,39	—	—	—
10	17,7	0,6	—	19,19	11,85	—	—
	20	0,5	19,93	19,03	11,85	21,32	17,82
	25	0,4	20,00	19,14	—	—	—
	33,3	0,3	20,09	18,92	11,90	21,39	17,89
	50	0,2	19,75	18,65	11,72	21,27	17,63
30	50	0,6	—	43,95	27,20	—	—
	60	0,5	48,21	43,88	27,54	50,62	43,60
	75	0,4	48,82	43,88	27,40	50,22	42,33

Die erwähnte Abweichung fällt bei höheren Spannungen weniger ins Gewicht. Bei kleineren Funkenpotentialen aber ist sie so beträchtlich, dass für diese die Paschen'sche Beziehung nicht aufrecht erhalten werden kann.

§ 8. *Die specifische elektrische Festigkeit eines Gases bezüglich der Luft.* Im § 51 des ersten Buches über Elektricität und Magnetismus definirt Maxwell die elektrische Festigkeit (electric strength) eines Gases als den Maximalbetrag der elektromotorischen Kraft, welche in ihm wirken kann, ohne dass Entladung erfolgt.

Die Einführung dieses Begriffes hat aber, wie J. J. Thomson in § 46 seinen Recent Researches in Electricity and Magnetism bemerkt, nur Wert, wenn die elektrische Festigkeit eine ganz bestimmte charakteristische Eigenschaft eines Gases ist. Dies schien bisher nicht der Fall zu sein.

Maxwell nimmt als Maass für die elektrische Festigkeit eines Gases von gegebenem Druck die Grösse der elektrischen Kraft, welche im Augenblick der Entladung im Felde herrscht, er setzt sie also proportional dem Quotienten V/δ aus Funkenpotential V und Schlagweite δ. Doch ist dieser Quotient für die einzelnen Gase keine charakteristische Grösse. Er nimmt bei allen Gasen mit abnehmender Funkenstrecke erst langsam, dann sehr schnell zu und erreicht für sehr kleine Funkenstrecken ausserordentlich grosse Werte. Baille und Paschen gehen anders vor. Sie nehmen das Funkenpotential selbst als Maass für die elektrische Festigkeit der durchschlagenen Gasschicht und nennen das Verhältnis dieser Spannung zu derjenigen, welche unter übrigens gleichen Bedingungen den Funken in Luft erzeugt, die specifische elektrische Festigkeit. Die so definirte specifische elektrische Festigkeit ist für die einzelnen Gase ebenfalls nicht charakteristisch. Es zeigt sich, dass sie mit abnehmender Funkenstrecke für Wasserstoff wie für Kohlensäure wächst. Für letzteres Gas ist sie bei grösseren Funkenstrecken kleiner als 1, bei kleineren Funkenstrecken wird sie grösser als 1. Man ersieht dies auch aus meinen Tabellen für die Funkenpotentiale in § 15, sowie aus den Curven in Fig. 1, welche das Funkenpotential V bei constantem Druck P als Funktion der Schlagweite δ geben. Es schneiden sich dort die Curven, die das Potential in Luft bez. Kohlensäure darstellen.

Vom Druck ist diese sogenannte specifische elektrische Festigkeit ebenfalls abhängig. Sie nimmt für Kohlensäure, Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff mit wachsendem Druck ab.

Eine für die verschiedenen Gase wirklich charakteristische Grösse erhält man folgenderweise. Betrachtet man die Curven, welche die Abhängigkeit des Potentiales V von der Funkenstrecke δ bei constantem Druck P darstellen (Fig. 1) so sieht man, dass dieselben nicht auf den Nullpunkt hinzielen. Das bedeutet: Macht man die Gasschicht zwischen den Elektroden unendlich dünn ($\delta = 0$), wodurch ihr Widerstand gegen die Entladung verschwindend klein wird, so ist noch eine endliche Spannung zum Funkenübergang erforderlich. Es muss also beim Uebergang der Elektricität von der Elektrode ins Gas oder vom Gas in die Elektrode ein unendlicher Widerstand zu überwinden sein.

Hiermit steht in Einklang, was J. J. Thomson[1]) über Versuche von Peace berichtet. Peace fand nämlich, dass er in Luft keinen Funken hervorrufen konnte, so nahe er die Elektroden bringen mochte, oder wie er den Druck auch änderte, wenn die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden kleiner als etwa 300 Volt war.

Es sei um A die Potentialdifferenz, welche in einem beliebigen Gase G von bestimmtem Zustand einen Funken von angegebener Länge hervorbringt. Alsdann kann man sich das gesamte Funkenpotential A aus zwei Theilen bestehend denken, sodass

$$A = a + \alpha. \tag{1}$$

Ein Teil der Spannung, α, dient zur Ueberwindung des Uebergangswiderstandes zwischen Metall und Gas. Der Rest, a, wird zur Durchbrechung der Gasschicht aufgewandt, und dieser allein kann ein Maass für die elektrische Festigkeit der Gasschicht liefern.

Die Potentialdifferenz, welche unter übrigens gleichen Verhältnissen den Funken in Luft erzeugt, nennen wir B. Dann können wir setzen:

$$B = b + \beta. \tag{2}$$

Hier ist b ein Maass für die Festigkeit der durchbrochenen Luftschicht. Der Quotient

$$\frac{a}{b} = k \tag{3}$$

1) J. J. Thomson, Rec. Res. in Electr. and Magn. § 65.

giebt also die specifische elektrische Festigkeit der Gasschicht G in Bezug auf Luft und kann auf folgende Weise aus den Beobachtungen ermittelt werden.

Aus (1), (2) und (3) folgt

$$k = \frac{a}{b} = \frac{A - \alpha}{B - \beta}$$

oder

$$k(B - \beta) = A - \alpha.$$

Der Uebergangswiderstand zwischen Metall und Gas und somit α und β müssen von der Schlagweite δ unabhängig sein. Nehmen wir nun an, dass die specifische elektrische Festigkeit k ebenfalls von δ unabhängig ist, so ergiebt die letzte Gleichung nach δ differentiirt:

$$k \frac{dB}{d\delta} = \frac{dA}{d\delta}, \quad k = \frac{dA}{d\delta} : \frac{dB}{d\delta}.$$

Bei der schwachen Krümmung der Curven, welche das Funkenpotential als Function der Schlagweite darstellen, können die Differentiale durch die Differenzen benachbarter Werte ersetzt werden, sodass endlich

$$k = \frac{\frac{A_2 - A_1}{\delta_2 - \delta_1}}{\frac{B_2 - B_1}{\delta_2 - \delta_1}} = \frac{A_2 - A_1}{B_2 - B_1}.$$

§ 9. *Werte der specifischen elektrischen Festigkeit.* Nachstehend ist diese Rechnung für Kohlensäure durchgeführt. Die beiden ersten Tabellen geben für die verschiedenen Schlagweiten δ und Gasdrucke P die Werte der Differenzenquotienten

$$\frac{B_2 - B_1}{\delta_2 - \delta_1}, \quad \frac{A_2 - A_1}{\delta_2 - \delta_1}.$$

Die Werte der specifischen elektrischen Festigkeiten, welche sich ergaben, enthält die dritte Tabelle.

Luft $\frac{B_2 - B_1}{\delta_2 - \delta_1}$.

P	$\delta = 0,04$	0,06	0,08	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5 cm
75	130,5	128,5	126,5	121,2	112,4	102,4	93,6	
65	114	112	111	106,1	98,9	91,2	84	
55	101	100	98	92,1	85,7	78,2	72,1	
45	87,0	83	82	78,5	72,5	65,6	60,2	
35	70,4	67	66	63	58,9	53,3	48,9	
25	52	50,5	50,2	48,5	43,5	40,0	37,2	
15	—	36,5	35	32,3	28	25,9	25,7	
10	—	27	26,5	24,9	20,3	18,9	18,8	
6	—	18	17,5	16,6	14,9	13,8	12,2	
4	—	14	13,5	12,3	11,1	9,8	9,0	
2	—	—	—	—	6,5	5,7	5,2	

Kohlensäure $\frac{A_2 - A_1}{\delta_2 - \delta_1}$.

P	$\delta = 0,04$	0,06	0,08	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50 cm
75	110,5	109	107	103	98,6	91,8	85,6	
65	103,5	99	98	92,7	85,2	78,9	76,3	
55	89,5	87	86	81,4	75	69,5	66	
45	75,2	73	70	68,4	64	57,8	55,2	
35	64	61	60,5	54,9	52,2	47,2	43,8	
25	47,5	46,5	45	43,4	39,3	36,4	34	
15	—	33	31,5	28,7	25,1	23,8	23,4	
10	—	24,5	24	22,5	18,5	17,4	17	
6	—	—	—	14,4	13,3	11,8	11,1	
4	—	—	—	10,9	10,1	8,9	8,2	

Specifische elektrische Festigkeit k in Kohlensäure.

P	$\delta = 0,04$	0,06	0,08	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50 cm
75	0,846	0,848	0,846	0,850	0,876	0,896	0,914	
65	0,908	0,884	0,883	0,874	0,861	0,865	0,908	
55	0,886	0,870	0,878	0,883	0,875	0,888	0,915	
45	0,865	0,880	0,854	0,871	0,883	0,881	0,917	
35	0,909	0,910	0,910	0,872	0,886	0,886	0,896	
25	0,913	0,920	0,896	0,886	0,908	0,910	0,914	
15	—	0,904	0,900	0,888	0,896	0,920	0,909	
10	—	0,907	0,906	0,902	0,910	0,920	0,903	
6	—	—	—	0,866	0,892	0,886	0,910	
4	—	—	—	0,886	0,901	0,908	0,911	

Die letzte Tabelle zeigt, dass unsere Annahme in Betreff der specifischen elektrischen Festigkeit berechtigt war. k ist keine Function der Schlagweite. Es ergiebt sich aber ausserdem, dass k auch vom Druck des Gases unabhängig ist. Die gleiche Rechnung wurde mit gleichem Erfolg für Wasserstoff, Stickstoff und Sauerstoff durchgeführt. Bei jedem dieser Gase liegen sämtliche für die verschiedenen Versuchsbedingungen (Druck und Schlagweite) berechneten Werte von k in unregelmässiger Abweichung um einen bestimmten Mittelwert gruppirt.

Die Abweichungen sind nicht eben unerheblich. Doch ist zu bedenken, dass nicht die beobachteten Funkenpotentiale selbst (A_1, A_2, B_1, B_2) zur Berechnung von k dienen konnten, sondern dass die Differenzen von möglichst nahe aneinander liegenden Werten ($A_2 - A_1$, $B_2 - B_1$) benutzt wurden. Bei dieser Berechnungsweise werden selbst kleine Fehler in den beobachteten Funkenpotentialen zu erheblichen Schwankungen in den aus ihnen berechneten Werten von k führen.

Die Grösse k ist also von den Versuchsbedingungen (Druck und Schlagweite) unabhängig, nur von der Natur des Gases abhängig und charakterisirt dessen Verhalten gegen die disruptive Entladung.

Wolf fand, dass der Quotient A/B mit wachsendem Druck von 1 Atm. an abnimmt und sich einem constanten Grenzwert nähert (Schlagweite 0,1 cm). Dieser Grenzwert würde unserem k gleich sein, wenn mit wachsendem Drucke die Uebergangswiderstände α und β in Gleichung (4) mehr und mehr gegen die Gaswiderstände a und b zurücktreten.

Die folgende Tabelle enthält die von Wolf gefundenen Grenzwerthe neben meinen in der bezeichneten Weise erhaltenen Werten von k:

Specifische elektrische Festigkeit.

	Orgler	Wolf
Wasserstoff	0,563	0,61
Kohlensäure	0,888	0,96
Sauerstoff	0,888	0,90
Luft	1,000	1,00
Stickstoff	1,050	1,13

Wolf's Werte sind ziemlich viel grösser als die meinigen. Doch lag der Druck bei meinen Versuchen zwischen 4 cm und

1 Atm., bei Wolf zwischen 1 Atm. und 4 bis 9 Atm. und es ist die Frage, ob die elektrische Festigkeit bis zu so hohem Druck von diesem unabhängig ist.

§ 10. *Die specifische elektrische Festigkeit eines Gases, bezogen auf einen Normaldruck.* In derselben Weise kann die specifische elektrische Festigkeit f eines Gases beim Druck p, bezogen auf seine elektrische Festigkeit, bei einem Normaldruck — 75 cm — gefunden werden. Es sei nämlich, wie oben,

$$M = m + \mu, \quad N = n + \nu,$$

wo M das Funkenpotential beim beliebigen Druck p, N das gleicher Schlagweite im gleichen Gase entsprechende Funkenpotential beim Normaldruck 75 cm ist, m und n die Spannungen sind, die zur Ueberwindung der elektrischen Festigkeit der Gasschicht nöthig sind, μ und ν diejenigen, die zur Ueberwindung des Uebergangswiderstandes dienen.

Daraus wie oben

$$f = \frac{dM}{d\delta} : \frac{dN}{d\delta}.$$

Nunmehr lässt sich f für die einzelnen Gase aus den Tabellen für die Differenzenquotienten berechnen. *Daraus, dass die specifische elektrische Festigkeit der Gase vom Druck unabhängig ist, folgt unmittelbar, dass für den gleichen Druck die Grösse f in allen Gasen den gleichen Wert haben muss.* In der That ergab sich aus meinen Rechnungen, dass die gleichen Drucken entsprechenden Werte von f in allen Gasen nahezu um denselben Mittelwert schwanken. Ich führe hier die Mittelwerte der für die verschiedenen Drucke p erhaltenen Werte von f an.

$P =$	75	65	55	45	35	25	15	10	6	4	2
$f =$	1	0,885	0,770	0,651	0,527	0,400	0,271	0,204	0,134	0,102	0,056

Fig. 2 (vgl. p. 174) stellt diese Abhängigkeit graphisch dar.

Wir können aus der Curve direct entnehmen, wie gross die elektrische Festigkeit eines Gases für einen beliebigen Druck ist, bezogen auf die elektrische Festigkeit dieses Gases beim Druck 75 cm als Einheit.

Die Curve verläuft, wie wir sehen, für Drucke über 15 cm ziemlich gradlinig; bei kleineren Drucken krümmt sie sich so, dass sie von oben gesehen convex wird, und zielt auf den Nullpunkt zu.

§ 11. *Der Uebergangswiderstand.* Auf Grund der hier gegebenen experimentellen Daten kann man nicht den Gesamtwiderstand A in den Gaswiderstand a und den Uebergangswiderstand α zerlegen. Doch lassen sich einige Schlüsse bezüglich des letzteren ziehen. So muss in Kohlensäure der Uebergangswiderstand grösser sein als in Luft, da für kleine Schlagweiten und kleine Drucke in dem elektrisch weniger festen Gase Kohlensäure höhere Spannungen zur Entladung erforderlich sind als in Luft.

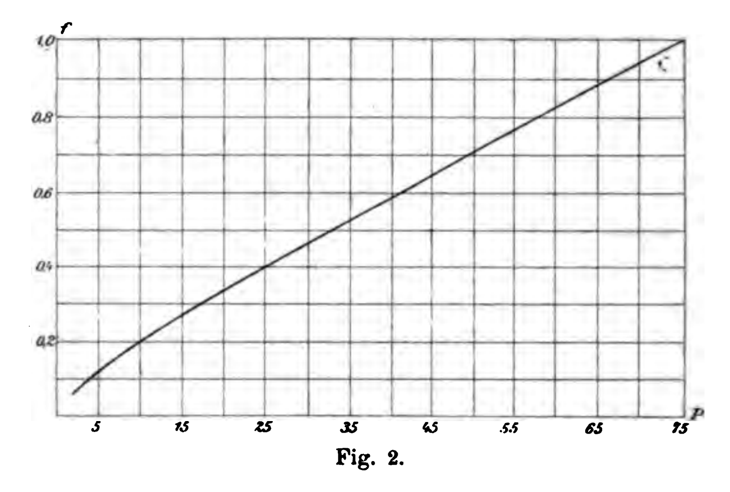


Fig. 2.

In Sauerstoff scheint der Uebergangswiderstand ungefähr dieselben Werte zu besitzen wie in Luft.

Da Elektroden aus Zink und solche aus Eisen in Luft und in Kohlensäure bei allen untersuchten Drucken die gleichen Funkenpotentiale ergaben wie die Messingkugeln, so muss man annehmen, dass das Material der Elektroden auf den Uebergangswiderstand von keinem Einfluss ist.

Zum Schluss sei es mir gestattet, Hrn. Professor Dr. Warburg für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für die überaus liebenswürdige Unterstützung bei Ausführung derselben, ebenso dem Assistenten am hiesigen physikalischen Institut, Hrn. Dr. Kaufmann, meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

(Eingegangen 12. October 1899.)

8. *Ueber neuere Untersuchungen der magnetischen Susceptibilität; von Joh. Koenigsberger.*

Hr. St. Meyer[1]) hat neuerdings zahlreiche sorgfältige Beobachtungen über die magnetische Susceptibilität schwach para- und diamagnetischer Körper veröffentlicht, und hat Folgerungen daraus gezogen, von denen ich diejenigen besprechen möchte, welche mit den von mir[2]) in einer Untersuchung des gleichen Gegenstandes erhaltenen nicht übereinstimmen und von allgemeinerem Interesse sind. In erster Linie ist das wohl die Frage, ob Verbindungen zweier diamagnetischer Elemente paramagnetisch sein können. Hr. St. Meyer hat, wie auch ich, gefunden, dass Kupfersulfat, Kupferchlorid, Kupferbromid etc. paramagnetisch sind. Da er aber für Cu_2S, Cu_2Se, Cu_3P_2 Diamagnetismus beobachtete, so glaubte er, dass das erstere Resultat von Verunreinigungen (durch stark magnetische Substanzen) herrührt. Hierbei ist aber übersehen, dass diese drei Verbindungen Oxydulverbindungen sind; G. Wiedemann[3]) hat in einer eingehenden Untersuchung, wobei die Kupferoxydul- in die Kupferoxydverbindung verwandelt wurde, bewiesen, dass die ersteren diamagnetisch, die letzteren paramagnetisch sind; der Einfluss von Verunreinigungen war auf die Art ausgeschlossen. Auch bei dem von mir benutzten Kupfersulfat und Kupferchlorid können solche[4]) das magnetische Verhalten nicht beeinflusst haben. Demnach ist die Behauptung richtig, dass Verbindungen zweier *diamagnetischer* Elemente *paramagnetisch* sein können.

Von Interesse ist ferner die Frage, ob die Susceptibilität von schwach paramagnetischen eisenfreien Substanzen von der Feldstärke abhängig ist.

1) St. Meyer, Wied. Ann. **67.** p. 707. 1899; **68.** p. 325. 1899; **69.** p. 236. 1899.

2) Joh. Koenigsberger, Wied. Ann. **66.** p. 698. 1898.

3) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **126.** p. 1. 1865; **135.** p. 177. 1868.

4) Joh. Koenigsberger, l. c. p. 717.

Hr. St. Meyer[1]) hat bei einigen Körpern eine solche Abhängigkeit für Feldstärken von 6000—10000 nicht gefunden, ich habe sie für Feldstärken von 1800—2200 beobachten können. Hr. St. Meyer hat indes die wasserfreien Salze, bei denen jenes Verhalten besonders ausgesprochen ist, nicht untersucht. Für andere Substanzen, die nur eine geringe Aenderung zeigen, ist eine Nullmethode, welche eine relative Aenderung von $^1/_{10}$ Proc. *sicher* erkennen lässt, besonders geeignet.

Was die Beobachtungen an den Elementen anbetrifft, so sind natürlich alle auf grösseren Diamagnetismus hinweisenden Werte von Hrn. St. Meyer den von den anderen Beobachtern und mir gefundenen Werten vorzuziehen, so insbesondere für Kohle, Cadmium, Zirkon. Dagegen glaube ich aus demselben Grunde, dass Titandioxyd diamagnetisch ist; dies muss wegen der Frage nach der Eigenfarbe jener Substanz[2]) betont werden. Merkwürdig ist, dass das Zinn übereinstimmend paramagnetisch gefunden wurde, während es nach dem Zusammenhang zwischen Atommagnetismus und Atomvolumen diamagnetisch sein sollte.

Die Frage nach dem absoluten Wert der magnetischen Susceptibilität des Wassers und somit aller anderen Substanzen muss wohl noch als offen betrachtet werden, da die Resultate der einzelnen Beobachter so sehr voneinander abweichen.[3])

Zu den bisher an festen Körpern erhaltenen Werten der Susceptibilität stimmen sehr wenig die von Metalldrähten, wie sie von Hrn. Howard[4]), Hrn. Seckelson[5]) u. a. nach der auf feste Körper angewandten Steighöhenmethode von Hrn. Quincke gefunden wurden.

Darnach wurde eine starke Abhängigkeit von der Feldstärke und ein verschiedenes Verhalten ⊥ und ∥ zu den Kraftlinien beobachtet. Letzteres namentlich weist darauf hin, dass

1) St. Meyer, Wied. Ann. **69**. p. 236. 1899.

2) K. v. Kraatz-Koschlau u. L. Wöhler, Tschermak's miner. Mitth. 1899.

3) J. Du Bois, Wied. Ann. **65**. p. 39. 1898.

4) G. Howard, Tagblatt d. 62. Vers. dt. Naturforscher 1889.

5) E. Seckelson, Wied. Ann. **67**. p. 37. 1899; vgl. auch Litteraturzusammenstellung daselbst.

der Grund möglicherweise in der Art des untersuchten Materiales zu suchen ist. Versuche von Tyndall und Knoblauch[1]) haben gezeigt, dass gespannter Kautschuk, gepresstes Glas, Holz, Elfenbein eine starke Verschiedenheit der Susceptibilität nach verschiedenen Richtungen aufweisen. Da die Drähte zum Teil gezogen, zum Teil einen wahrscheinlich orientirten elektrolytischen Niederschlag[2]) (die Stromlinien verliefen radial zum Draht) trugen, so wäre das abnorme Verhalten und auch die Abhängigkeit von der Feldstärke erklärlich. Jedenfalls dürften die Constanten für solche Materialien andere sein wie für gegossene Platten oder Stäbe.

---

1) O. Knoblauch u. J. Tyndall, Pogg. Ann. **79**. p. 233. 1849. **80**. p. 481. 1850.

2) E. Beetz, Pogg. Ann. **79**. p. 82. 1849.

(Eingegangen 21. November 1899.)

9. *Moleculare Susceptibilität paramagnetischer Salze der Eisengruppe;*
von O. Liebknecht und A. P. Wills.[1])

Gustav Wiedemann hat zuerst grundlegende magnetochemische Untersuchungen über das Verhalten der paramagnetischen Salze der Metalle Chrom, Mangan, Eisen, Cobalt, Nickel und des chemisch freilich verschieden gearteten Kupfers angestellt; er bediente sich dabei einer Torsionsmethode im ungleichförmigen Felde.[2]) Er fand, dass die von ihm als „Molecularmagnetismus" definirte Grösse für ein mit bestimmter Wertigkeit auftretendes Kation bei gegebener Temperatur *nahezu* unabhängig ist vom Lösungsmittel, von der Concentration und insbesondere von der Natur des Anions; immerhin übertreffen die vorhandenen Unterschiede die Versuchsfehler und betragen im allgemeinen 2—3 Proc. Es wurde daher ein Mittelwert gebildet und als „Atommagnetismus" des betreffenden Kations eingeführt; in etwas willkürlicher Weise wurden hierzu meistens das Chlorid, Nitrat und Sulfat bez. Acetat herangezogen. Die „Atommagnetismen" der Mangano-, Ferro-, Cobalto- und Nickelosalze sollten sich nun wie $a + 2b$, $a + {}^3/_2 b$, $a + b$, a verhalten, wobei $b = 1{,}15a$; derjenige der Ferrisalze in angesäuerter wässeriger Lösung übertrifft den für Ferrosalze ermittelten um etwa 15 Proc.

Kürzlich haben die Herren G. Jäger und St. Meyer[3]) ein-

1) Die Hauptergebnisse wurden der Deutsch. Physik. Gesellschaft am 30. Juni 1899 im Auszuge mitgeteilt; die Resultate mehrerer Analysen standen damals noch aus.

2) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **126.** p. 1. 1865; **135.** p. 177. **1868**; Wied. Ann. **5.** p. 45. 1878; P. Plessner, Wied. Ann. **39.** p. 336. **1890**; G. Quincke, Wied. Ann. **24.** p. 392. 1885. Vgl. wegen der weiteren Literatur G. Wiedemann, Lehre von der Elektricität 2. Aufl. **3.** §§ 1266—1291. 1895. Ferner J. Koenigsberger, Wied. Ann. **66.** p. 698. 1898.

3) G. Jäger und St. Meyer, Wien. Ber. (2) **106.** pp. 594. 623. 1897; **107.** p. 5. 1898.

schlägige Messungen mittels einer Modification der Quincke'schen manometrischen Methode veröffentlicht. Sie ziehen den Schluss, dass die „Atommagnetismen" von Mn, Fe, Co, Ni sich wie 6 : 5 : 4 : 2 verhalten; diese Proportion stimmt mit der obigen nur überein, wenn $a = b$ gesetzt wird. Die betreffenden Zahlen sind aus den Chloriden, Sulfaten und Nitraten gewonnen; bei Mn, Co und Ni kann es sich nur um Oxydulsalze mit zweiwertigem Kation handeln; dagegen ist der Wert für Fe als Mittel aus Ferrichlorid, Ferrosulfat und Ferrinitrat berechnet; in ihrer letzten Abhandlung finden die Herren Jäger und Meyer für Ferrochlorid die relative Zahl 3, statt wie oben 5; ferner erhalten sie aus Chromichlorid und Chromisulfat für Cr die Zahl 2,5.

Angesichts dieser Sachlage schienen uns neue Bestimmungen nach einer anderen Methode erwünscht. Wir haben im ganzen 36 Salze jener fünf Metalle der Eisengruppe und des Kupfers quantitativ untersucht. Es wurde grosses Gewicht auf die Beschaffung möglichst reinen Materiales gelegt und alle Salze ausgeschieden, bei denen eine rasche Zersetzung der Lösung zu befürchten war. Im allgemeinen haben wir die genügend löslichen Fluoride, Chloride, Bromide, Jodide, Sulfate und Nitrate bestimmt; aus dem erwähnten Grunde kamen manche Chrom- und Eisenverbindungen leider nicht in Betracht. Die Genauigkeit unserer Endwerte dürfte zwischen 2 und 5 pro mille schwanken, je nach dem befolgten analytischen Verfahren (vgl. p. 185).

Zur Verwendung gelangte die von Hrn. H. du Bois angegebene Nullmethode der unmagnetischen Lösungen[1]), welche eine bequeme Handhabung bei Benutzung nur geringer Substanzmengen gestattet; die Genauigkeit der Abgleichung im magnetischen Felde kann fast beliebig gesteigert werden, sodass die Fehlergrenze ausschliesslich durch die nachherige chemische Analyse der Lösung bestimmt ist. Das Verfahren besteht, kurz gesagt, darin, dass man von einer etwas paramagnetischen Lösung ausgeht und diese solange verdünnt, bis die Magnetisirung des Salzes durch das diamagnetische Lösungsmittel gerade compensirt erscheint. Seine Ausführbar-

1) H. du Bois, Wied. Ann. 35. p. 154. 1888; 65. p. 38. 1898.

keit setzt nur voraus, dass Susceptibilität und Löslichkeit des Salzes genügend hohe Werte aufweisen, um mit dem gewählten Lösungsmittel überhaupt eine paramagnetische Lösung liefern zu können. Zuweilen versagt daher das Verfahren, indem es z. B. nicht gelingt, paramagnetische wässerige Lösungen von Natrium-, geschweige von Kaliumchromat oder Bichromat, sowie von Kalium- oder Calciumpermanganat zu gewinnen. Diese eigentümlich constituirten Salze sind bekanntlich nur schwach paramagnetisch; weit stärker erwies sich das analog constituirte trockene Kaliumferrat (K_2FeO_4); die paramagnetische alkalische Lösung zersetzte sich indessen so rasch, dass wir auf eine quantitative Bestimmung verzichteten.

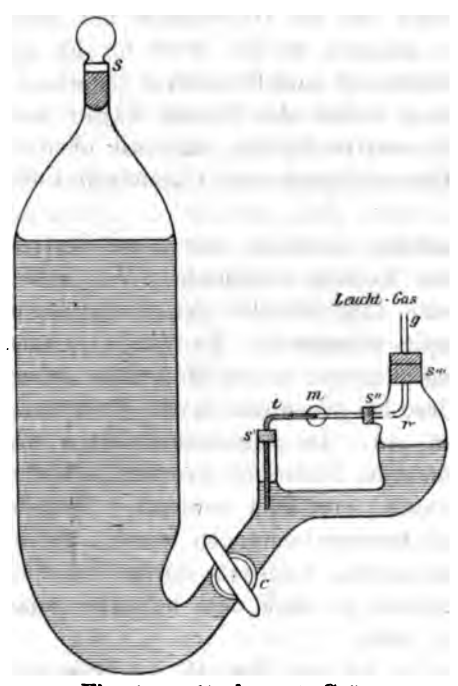


Fig. 1. — $^1/_4$ der nat. Grösse.

Als Kriterium für die Unmagnetisirbarkeit der Lösung diente das Verhalten ihres Meniscus in einem äquatoreal ins Feld hineinragenden Quet'schen[1]) Capillarrohre *t* (Fig. 1). Das grosse Verdünnungsgefäss hatte etwa 600 ccm Inhalt; es war durch einen Glasstopfen *s* verschliessbar und konnte durch einen Glashahn *c* von den übrigen Gefässteilen getrennt werden; letztere waren so geformt, dass frische Capillarrohre jederzeit bequem eingeführt und mittels der Gummistopfen *s'* und *s''* befestigt werden konnten. Der den Meniscus begrenzende Capillarraum, sowie der Raum *r* konnte durch das

1) Quet, Compt. rend. 38. p. 562. 1854; E. Verdet, Oeuvres 1. p. 199.

Glasrohr *g* mit gewaschenem, feuchtem Leuchtgase gefüllt werden.[1])

Dieser Mischapparat war an einem geeigneten Stativ befestigt und um eine zur Bildebene senkrechte Horizontalaxe drehbar. Es konnte dadurch einmal mittels einer Justirschraube die Neigung des Capillarrohres genau regulirt werden; andererseits aber durch heftiges Bewegen des Apparates um seine Axe ein gründliches Schütteln und Mischen der Lösung bewirkt werden. Bei *m* ist die abgestutzte Stirnfläche eines der Kegelpolschuhe des benutzten Ringelektromagnets abgebildet.

Bei einiger Uebung gelingt es in recht kurzer Zeit eine wässerige Lösung bis auf etwa ein Tausendstel unmagnetisch zu machen, derart, dass bei Erregung des Elektromagnets keine merkliche Kuppenverschiebung mehr auftritt. Bei jedesmaligem Verdünnen mit destillirtem Wasser wurde selbstverständlich das ganze Mischgefäss durchgespült und geschüttelt, sodass die Lösung an allen Stellen genau die gleiche Concentration aufwies wie bei der Kuppe. Etwaige locale Concentrationsänderungen infolge magnetischer Einflüsse dürften kaum Zeit zu ihrer Ausbildung gehabt haben; ein solcher Effect ist zwar theoretisch errechnet, aber bisher experimentell nicht sicher nachgewiesen worden.[2]) Falls die Capillare nur um Bruchteile eines Grades gegen die Horizontale geneigt ist, gelingt es in einem Felde von 40000 C.G.S. eine noch vorhandene differentielle Susceptibilität nachzuweisen, welche ein Hunderttausendstel derjenigen des Wassers nicht übertrifft. Wegen der oben erwähnten Fehlergrenze der Analyse wäre indessen das Erstreben einer derartigen Genauigkeit ebenso illusorisch wie zeitraubend,

---

1) Die Susceptibilität des Leuchtgases wurde vernachlässigt; soweit bekannt, beträgt sie bei Atmosphärendruck weniger als ein Tausendstel derjenigen des Wassers; vergl. M. Faraday, Exp. Res. **3.** p. 502. 1855; G. Quincke, Wied. Ann. **34.** p. 445. 1888; A. Toepler u. R. Hennig, Wied. Ann. **34.** p. 796. 1888. — Ein absolut unmagnetisches Gas kann man nach Art der unmagnetischen Lösungen durch Mischen von wenig Sauerstoff mit einem diamagnetischen Gase darstellen; vgl. du Bois, l. c. p. 167; selbstverständlich ist hierbei stillschweigend vorausgesetzt, dass in conventionell üblicher Weise die Permeabilität des Vacuums als Einheit gilt.

2) Vergl. die Literatur bei G. Wiedemann, Elektricität, 2. Aufl. **3.** § 1205. 1895.

sodass in der Regel bei viel geringerer Empfindlichkeit operirt wurde.

Die Beschaffung und Reinigung der Capillaren machte anfangs Schwierigkeiten. Schliesslich wurden möglichst frische, unter Wasser aufbewahrte Capillarröhren aus Thüringer Glas benutzt[1]), bei denen die Benetzung und Beweglichkeit der Flüssigkeitskuppen befriedigend waren. Ein Einfluss der lichten Weite des verwendeten Capillarrohres auf die Concentration der darin abgeglichenen unmagnetischen Lösung war nicht nachweisbar. Es bildet dies, wie leicht zu ersehen, einen indirecten Beweis dafür, dass die Capillaritätsconstanten *unmagnetischer* Lösungen im Felde völlig unverändert bleiben.

Diese Unabhängigkeit der Oberflächenspannung von magnetischen Einflüssen scheint übrigens ganz allgemein stattzufinden. Brunner und Mousson[2]) haben vergeblich nach einer solchen Wirkung gesucht, wobei sie freilich auch den bekannten Quincke'schen Effect der magnetischen Elevation bez. Depression im Felde übersehen zu haben scheinen, den übrigens W. Wertheim[3]) beobachtet haben dürfte. Hr. G. Quincke hat zuerst Tropfversuche mit stark paramagnetischen Mangan- und Eisenlösungen vorgenommen[4]); er fand das Tropfengewicht in einem gleichförmigen Felde durchaus unveränderlich und schliesst daraus auf die Constanz der Oberflächenspannung solcher Lösungen. Hingegen „in einem Felde von veränderlicher magnetischer Kraft zwischen kegelförmigen Magnetpolen wurden die Tropfen bei Manganchlorid, wie bei Ferrichlorid, grösser oder kleiner beim Erregen des Magnetismus, je nachdem sie sich unter oder über der kürzesten Kraftlinie bildeten“.

Behufs näherer Untersuchung dieser Erscheinungen haben wir einen Apparat (Fig. 2) construirt, mittels dessen die Tropfenbildung unter beliebigem Druck und in verschiedenem Tempo an

1) Vgl. P. Volkmann, Wied. Ann. **66.** p. 194. 1898.

2) C. Brunner u. A. Mousson, Pogg. Ann. **79.** p. 141. 1850.

3) W. Wertheim, Compt. rend. **44.** p. 1022. 1857; Pogg. Ann. **102.** p. 595. 1857.

4) G. Quincke, Pogg. Ann. **160.** p. 586. 1877; Wied. Ann. **24.** p. 375. 1885. Vgl. auch Durchflussbeobachtungen bei H. Dufour, Lum. Electr. **23.** p. 337. 1887; sowie G. Jäger u. St. Meyer, Wied. Ann. **67.** p. 711. 1899.

der Rohrmündung *n* von ca. 1 mm lichter Weite stattfinden konnte; und zwar entweder im gleichförmigen Felde von etwa 18000 C.G.S. zwischen Flachpolen, oder im ungleichförmigen Felde von etwa 40000 C.G.S. zwischen Kegelstutzpolen *M* und *M'*; dabei befand sich die Rohrmündung an der Stelle höchster Feldintensität (d. h. der „kürzesten Kraftlinie“). Das Gefäss *A* war mittels des Heberrohrs *s* mit dem Reservoir *B* in Verbindung, dessen Flüssigkeitsniveau regulirbar war. Der Raum *rr* konnte durch den Hahn *c* mit der Pumpe verbunden werden; der in dieser Weise regulirbare Druck wurde am Manometer *m* abgelesen. Mit diesem Apparate wurde eine Anzahl Versuche angestellt, die im Folgenden kurz zusammengestellt sein mögen:

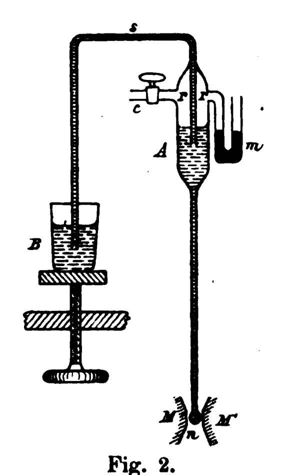


Fig. 2.
$^1/_6$ der nat. Grösse.

Paramagnetische Lösungen zeigen im gleichförmigen Felde ein beschleunigtes Tropftempo, indem die elektromagnetische Zugkraft auf die Flüssigkeitssäule abwärts wirkt; wird durch Druckverringerung das ursprüngliche Tempo angenähert wieder hergestellt [1]), so erleidet das Tropfengewicht keine Aenderung. Hingegen beobachteten wir eine Vergrösserung desselben im ungleichförmigen Felde; es wird dann die Gestalt des Tropfens verändert und es hängt von der besonderen Feldverteilung ab, in welchem Sinne und in welcher Weise das geschieht. Diese Versuche bestätigen demnach die Quincke'schen Ergebnisse und Schlüsse.

Diamagnetisches Wasser zeigt im gleichförmigen Felde ein verzögertes Tropftempo, indem die elektromagnetische Kraft aufwärts gerichtet ist, daher dem hydrostatischen Drucke entgegenwirkt; unter Umständen konnte das Tröpfeln durch Erregung des Feldes ganz zum Stehen gebracht werden. Wurde durch Druckvermehrung das ursprüngliche Tempo wieder her-

---

1) Es musste dies deshalb geschehen, weil ja bekanntlich das Tempo an sich unter gewöhnlichen Umständen schon einen geringen secundären Einfluss auf das Tropfengewicht übt.

beigeführt, so erleidet das Tropfengewicht keine Aenderung. Im ungleichförmigen Felde erschien es dagegen bei der benutzten Anordnung verringert, und zwar um so mehr, je weniger gleichförmig das Feld war.

Unmagnetische Lösungen werden betreffs der Art des Tröpfelns durch Erregung des Feldes überhaupt nicht beeinflusst, wofern die Tropfen in eine Leuchtgasatmosphäre fallen. Gegen Luft verhalten sie sich naturgemäss wie eine schwach diamagnetische Flüssigkeit. Jenes einfache Kriterium kann daher auch bei der Abgleichung unmagnetischer Lösungen Verwendung finden; an Genauigkeit steht dieses Verfahren indessen hinter dem zuerst beschriebenen und von uns in der Regel befolgten zurück.

Die moleculare Susceptibilität i_m des gelösten paramagnetischen Salzes ergiebt sich aus der Gleichung

$$\frac{i_m}{x} = -m\frac{M_w}{M_s},$$

wo m das Moleculargewicht, M_w / M_s das Massenverhältnis von Wasser und Salz in der Lösung, x die specifische Susceptibilität des Wassers bezeichnet (vgl. weiter unten p. 192). Der Gehalt einer unmagnetischen Lösung ist mit der Temperatur veränderlich; wir haben daher sorgfältig eine normale Zimmertemperatur von 18^0 eingehalten.[1]) Die derart abgeglichenen unmagnetischen Lösungen sind dann bei höheren (niederen) Temperaturen etwas diamagnetisch (bez. paramagnetisch); indem der Temperaturcoefficient für das Salz stets grösser ist als derjenige für Wasser. Falls letzterer genau bekannt wäre, könnte ersterer für verschiedene Salze mittels der Methode der unmagnetischen Lösungen leicht bestimmt werden.[2])

Die meisten Salze waren reine Kahlbaum'sche oder Merck'sche Präparate, und wurden vielfach vor ihrer Benutzung noch umkrystallisirt. Die meisten Fluoride, Bromide und Jodide sind hingegen von dem Einen von uns aus den

---

1) In Anlehnung an F. Kohlrausch und L. Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte, Leipzig 1898.

2) Bei derartigen Messungen sollte jedenfalls eine unmagnetische Atmosphäre die Flüssigkeit begrenzen; die stark ausgesprochene Abhängigkeit der Susceptibilität des Sauerstoffs bez. der Luft von der Temperatur würde sonst einen erheblichen Fehler bedingen.

reinen Carbonaten gewonnen worden. Die Nickelsalze waren als „kobaltfrei", die Kobaltverbindungen als „nickelfrei" von Kahlbaum bezogen worden; der Einfluss chemisch unnachweisbarer gegenseitiger Verunreinigung auf die gefundene moleculare Susceptibilität kann bei diesen Metallen nicht mehr als etwa 5 pro mille betragen. Salzlösungen, die besonders zur Hydrolyse neigen — z. B. MnF_2, $MnCl_2$, $FeSO_4$, $FeCl_3$, $FeBr_3$ — wurden in üblicher Weise mit etwas freier Säure versetzt; auf das Resultat war dies ohne merklichen Einfluss, da die Susceptibilität der betreffenden Säuren nur wenig von derjenigen des Wassers abweicht [1]; das Ferrojodid enthielt etwas freies Jod. Wo eine allmähliche Zersetzung zu befürchten war, wurde die Lösung alsbald nach ihrer Abgleichung im magnetischen Felde analysirt; rasch zersetzliche Lösungen wurden überhaupt nicht untersucht, wie bereits anfangs bemerkt; selbstverständlich wurde Fürsorge getroffen, dass keine Verdunstung oder Concentrationsänderung aus anderen Gründen stattfinden konnte.

Die Gewichtsanalyse erfolgte für die Chromsalze, indem sie mit Ammoniak als Hydroxyde gefällt wurden. Die Manganlösungen wurden mit phosphorsäurefreiem Wasserstoffsuperoxyd und Ammoniak als Superoxyd gefällt und als Manganoxydoxydul gewogen. Die Eisensalze wurden teils titrimetrisch mit Kaliumpermanganat bestimmt, teils wurden auch mit Ammoniak die Hydroxyde gefällt. Schliesslich wurden Kobalt, Nickel und Kupfer elektrolytisch niedergeschlagen, die beiden ersteren in neutraler, mit Ammoniumoxalat versetzter Lösung, das Kupfer in schwach salpetersäurehaltiger schwefelsaurer Lösung.

Die Gesamtheit unserer quantitativen Ergebnisse ist in Tab. 1 zusammengestellt. Es bedeutet q die Wertigkeit des Kations in dem betreffenden Salze; a das Atomgewicht; die Metalle sind nach zunehmendem Atomgewicht geordnet; die Reihenfolge von Kobalt und Nickel ist indessen nach reiflicher Prüfung vertauscht worden. Denn nach dem gesamten

---

1) J. Koenigsberger, l. c. p. 713; das dort erwähnte diamagnetische Verhalten wässeriger Lösungen von Wasserstoffsuperoxyd fanden wir auch bei möglichst angereicherter Lösung bestätigt, sodass der paramagnetische Sauerstoff sich auch in dieser Verbindung nicht als solcher zu bethätigen scheint.

Tabelle 1.

Temperatur: 18°. $x = -0{,}75 \cdot 10^{-6}$.

	Name des Salzes in wässeriger Lösung	q	Formel	O = 16,00		$\frac{M_w}{M_s}$	[illegible]
				a	m		
1	Chromisulfat	3	$Cr_2(SO_4)_3$	52,1	392,38	40,73	2.7
2	Chromkaliumalaun	3	$CrK(SO_4)_2$	52,1	283,37	29,63	8
3	Chromammoniumalaun	3	$CrNH_4(SO_4)_2$	52,1	262,30	30,77	8
4	Chrominitrat	3	$Cr(NO_3)_3$	52,1	238,22	35,28	8
5	Manganofluorid	2	MnF_2	55,0	93,00	215,71	20
6	Manganochlorid	2	$MnCl_2$	55,0	125,90	163,10	20
7	Manganobromid	2	$MnBr_2$	55,0	214,92	94,63	20
8	Manganojodid	2	MnJ_2	55,0	308,70	65,49	20
9	Manganosulfat	2	$MnSO_4$	55,0	151,06	133,65	20
10	Manganoammoniumsulfat	2	$Mn(NH_4)_2(SO_4)_2$	55,0	283,28	71,04	20
11	Manganonitrat	2	$Mn(NO_3)_2$	55,0	179,08	114,37	20
12	Ferrojodid	2	FeJ_2	56,0	309,70	55,18	17
13	Ferrosulfat	2	$FeSO_4$	56,0	152,06	111,72	16
14	Ferroammoniumsulfat	2	$Fe(NH_4)_2(SO_4)_2$	56,0	284,28	59,42	16
15	Ferrichlorid	3	$FeCl_3$	56,0	162,35	111,14	18
16	Ferribromid	3	$FeBr_3$	56,0	295,88	66,77	19
17	Ferrisulfat	3	$Fe_2(SO_4)_3$	56,0	400,18	101,06	2.20
18	Ferriammoniumalaun	3	$Fe(NH_4)(SO_4)_2$	56,0	266,20	75,64	20
19	Ferriammoniumoxalat	3	$Fe(NH_4)(C_2O_4)_2$	56,0	250,08	81,75	20
20	Ferrinitrat	3	$Fe(NO_3)_3$	56,0	242,12	74,48	18
21	Cobaltofluorid	2	CoF_2	59,0	97,00	142,60	1[illegible]
22	Cobaltochlorid	2	$CoCl_2$	59,0	129,90	108,21	14
23	Cobaltobromid	2	$CoBr_2$	59,0	218,92	63,13	1[illegible]
24	Cobaltojodid	2	CoJ_2	59,0	312,70	44,08	13
25	Cobaltosulfat	2	$CoSO_4$	59,0	155,06	87,65	1[illegible]
26	Cobaltonitrat	2	$Co(NO_3)_2$	59,0	183,08	76,62	14
27	Nickelofluorid	2	NiF_2	58,7	96,70	61,50	[illegible]
28	Nickelochlorid	2	$NiCl_2$	58,7	129,60	46,02	[illegible]
29	Nickelobromid	2	$NiBr_2$	58,7	218,62	27,00	[illegible]
30	Nickelojodid	2	NiJ_2	58,7	312,40	18,62	[illegible]
31	Nickelosulfat	2	$NiSO_4$	58,7	154,76	37,39	[illegible]
32	Nickelonitrat	2	$Ni(NO_3)_2$	58,7	182,78	32,31	[illegible]
33	Cuprichlorid	2	$CuCl_2$	63,6	134,50	16,33	[illegible]
34	Cupribromid	2	$CuBr_2$	63,6	223,52	9,40	[illegible]
35	Cuprisulfat	2	$CuSO_4$	63,6	159,66	13,72	[illegible]
36	Cuprinitat	2	$Cu(NO_3)_2$	63,6	187,68	11,54	[illegible]

magnetischen Verhalten im metallischen oder amalgamirten, und im gebundenen paramagnetischen Zustande, sowie allen chemischen Eigenschaften nach, steht das Kobalt dem Eisen zweifellos näher als das Nickel.[1]) In der vorletzten Columne ist die nach obiger Gleichung berechnete relative moleculare Susceptibilität i_m/x eingetragen; in der letzten Columne findet sich ihr absoluter Wert, unter der provisorischen Annahme $x = -0{,}75 . 10^{-6}$, welche Zahl indessen um mehrere Procente falsch sein kann (vgl. weiter unten p. 194).

Aus den Zahlenreihen der vorstehenden Tabelle lassen sich folgende Schlüsse ziehen. Die moleculare Susceptibilität zeigt den bekannten Anstieg von Chrom zu Mangan und Eisen und dann einen allmählichen Abfall bis Kupfer. Sämmtliche vier Halogensalze konnten nur beim zweiwertigen Mangan, Kobalt und Nickel in einwandsfreier Weise untersucht werden; es ergiebt sich hier wieder eine regelmässige Zunahme von Fluorid zum Chlorid mit nachfolgender Abnahme bis zum Jodid. Einfache additive oder vielmehr subtractive Beziehungen liegen dabei offenbar nicht vor. Auffallend ist durchweg die nahe Uebereinstimmung der Chloride und Nitrate, auch bei den Ferriverbindungen, wo das Bromid, Sulfat und Oxalat bis zu 12 Proc. höhere Werte ergeben; die Ferrosalze zeigen bedeutend geringere Werte, in Uebereinstimmung mit den G. Wiedemann'schen Resultaten. Sonst betragen die Unterschiede einzelner Salze bis zu 5 Proc., sodass die Einführung einer bestimmten „Atomsusceptibilität" des Kations uns ohne erhebliche Willkür nicht durchführbar erscheint; dass diese Grösse bei weitem den Haupteinfluss auf den Wert der molecularen Susceptibilität übt, ist freilich niemals bezweifelt worden. Wir haben die Sulfate sämtlicher 6 Metalle untersucht; diese eignen sich daher zu einem Vergleiche mit früher beobachteten

---

1) Die Atomgewichte sind der Zusammenstellung der Deutsch. Chem. Gesellsch. (Chem. Ber. **31.** p. 2761. 1898; Wied. Beibl. **23.** pp. 69 und 315. 1899), entnommen, wobei O = 16,00. — Die Frage nach den Atomgewichten von Kobalt und Nickel bildet übrigens noch den Gegenstand chemischer Discussion; vgl. Cl. Winkler, Zeitsch. anorg. Chem. **17.** p. 236. 1898; Th. W. Richards u. G. P. Baxter, l. c. **21.** 251 und **22.** p. 221. 1899; St. Meyer, Wied. Ann. **69.** p. 263, 1899, weist auch bereits auf die Möglichkeit der umgekehrten Reihenfolge hin.

Werten und mit den vorgeschlagenen algebraischen Beziehungen, der in Tab. 2 übersichtlich zusammengestellt ist.

Tabelle 2.

Beobachter:	Cr‴	Mn″	Fe″	Fe‴	Co″	Ni″	Cu″
Liebknecht-Wills exp.	7990	20190	16990	20200	13590	5790	2190
Desgl.: Ni″ = *a* gesetzt	1,38 *a*	3,49 *a*	2,93 *a*	3,49 *a*	2,35 *a*	*a*	0,38 *a*
Desgl.: *b* = 1,25 *a* „	—	3,50 *a*	2,88 *a*	—	2,25 *a*	*a*	—
G. Wiedemann exp. Ni″ = *a*[1])	1,34 *a*	3,29 *a*	2,74 *a*	3,26 *a*	2,26 *a*	*a*	—
Jäger-Meyer: Ni″ = *a* = *b*	—	3 *a*	2,5 *a*	—	2 *a*	*a*	—

Unsere Werte für die Sulfate von Mn″, Fe″, Co″ und Ni″ lassen sich *näherungsweise* durch die Wiedemann'sche Proportion darstellen, wofern $b = 1{,}25\,a$; indessen sind offenbar nur zwei der letzteren Zahlen unabhängig, da Mn″ und Ni″ zur Bestimmung der Parameter a und b dienten; das Gleichstellen von a und b ergiebt keine Uebereinstimmung mit unseren Ergebnissen. Uebrigens sind diese, auf Nickel bezogen, überall *grösser* als die Wiedemann'schen, und namentlich als die Jäger-Meyer'schen Werte; die Abweichung würde erklärbar sein, falls die von diesen Beobachtern untersuchten Nickelverbindungen etwas Kobalt enthalten hätten, was sich unserer Beurteilung entzieht.

Hrn. W. Meyerhoffer sind wir für die freundliche Ausführung mehrerer Analysen zu Danke verpflichtet. Die Untersuchungen wurden in dem Laboratorium des Hrn. H. du Bois bez. im wissenschaftlich-chemischen Laboratorium Berlin N. ausgeführt.

Berlin, December 1899.

1) Umgerechnet nach der Zusammenstellung bei W. Ostwald, Stöchiometrie 2. Aufl. p. 512, Leipzig 1891.

(Eingegangen 18. December 1899.)

10. *Moleculare Susceptibilität paramagnetischer Salze seltener Erden;*
von H. du Bois und O. Liebknecht.

Im Anschluss an die vorläufige auszugsweise Mitteilung über die in der vorhergehenden Arbeit beschriebenen Untersuchungen wurde auch der paramagnetische Charakter der Salzlösungen von 5 „seltenen“ Erdmetallen — Yttrium, Cerium, Praseodym, Neodym und Erbium — festgestellt[1]), während die untersuchten möglichst reinen Schottländer'schen Lanthanverbindungen sich als diamagnetisch erwiesen. Da über die Reinheit des untersuchten Yttriumnitrats Zweifel obwaltete und ferner die Untersuchung des nahe verwandten Samariums, Gadoliniums und Ytterbiums wünschenswert erschien, hat sich dann im August d. J. der Eine von uns mit Hrn. P. T. Cleve in Upsala in Verbindung gesetzt; seinem liebenswürdigen Entgegenkommen verdanken wir es, dass wir nunmehr über Messungen berichten können[2]), welche mit den neuesten und reinsten bisher dargestellten Präparaten ausgeführt wurden.[3])

Da die Menge des verfügbaren Materiales — in Form von Oxyd, Oxalat oder Sulfat — von der Ordnung eines Grammes war, kam uns die Methode der unmagnetischen Lösungen sehr zu statten. Wir haben den im Vorhergehenden beschriebenen und p. 180 abgebildeten Mischapparat zu dem vorliegenden Zweck erheblich verkleinert, sodass wir schon mit 2—3 g Lösung operiren konnten. Zur Untersuchung gelangten:

---

1) O. Liebknecht u. A. P. Wills, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 1. p. 170. 1899 (30. Juni), insbesondere Tab. II; es wurden damals einige abgeglichene, ziemlich verdünnte unmagnetische Lösungen demonstrirt. Die anfängliche dankenswerte Mitarbeit des Hrn. A. P. Wills wurde infolge seiner Rückreise nach Amerika unterbrochen.

2) H. du Bois u. O. Liebknecht, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 1. p. 236. 1899 (3. Nov., vorläufige Mitteilung).

3) Die einschlägige chemische Literatur ist ziemlich zerstreut; für physikalische Zwecke genügt wohl die Uebersicht bei H. Erdmann, Anorg. Chemie p. 596—605, Braunschweig 1898.

Name	Symbol	Atomgewicht (O = 16,00)	Reindarsteller
Yttrium	Y	89,0	P. T. Cleve-Upsala
Cerium	Ce	140,0	Schottländer †
Praseodym	Pr	140,4	C. v. Schéele-Upsala
Neodym	Nd	143,6	Schottländer †
Samarium	Sa	150	P. T. Cleve-Upsala
Gadolinium	Gd	156	Benedicks-Upsala
Erbium	Er	166	P. T. Cleve-Upsala
Ytterbium	Yb	173	Frl. Cleve-Stockholm

Das Atomgewicht des Gadoliniums ist in der Tabelle der Deutsch. Chem. Gesellsch. nicht angeführt; für Praseodym und Neodym haben wir die von Hrn. v. Schéele bestimmten Atomgewichte annehmen zu sollen geglaubt. Thulium und Holmium sind bislang nur in concentrirten Mutterlaugen vorhanden; von der Untersuchung dieses Materiales wurde daher abgesehen. Das Cerium war noch etwas lanthanhaltig, während das Neodym mit etwa 2 Proc. Praseodym verunreinigt war. Im übrigen enthalten wir uns an dieser Stelle der chemisch-kritischen Beurteilung der Reinheit des Materiales, sowie der bekanntlich vielfach discutirten Frage, inwiefern einige der angeblichen Elemente Gemische sind.

Behufs analytischer Bestimmung der unmagnetischen Lösungen wurde Cerium, Neodym und Praseodym aus neutraler Lösung mit Ammoniumoxalat gefällt. Cerium wurde durch anhaltendes Glühen auf dem Gebläse in CeO_2 übergeführt und gewogen. Das in reinem Zustande hellblaue, durch Glühen unveränderliche Nd_2O_3 war durch das beigemengte schwarzbraune PrO_2 grau gefärbt und musste im Wasserstoffstrom geglüht werden, um PrO_2 in Pr_2O_3 überzuführen; dabei tritt die hellblaue Farbe wieder hervor, da sie durch das hellgrüne Pr_2O_3 nicht mehr verdeckt wird. Praseodymoxalat, das sich beim Glühen zum grössten Teil in PrO_2 verwandelt, wurde andauernd auf dem Gebläse im Wasserstoffstrom geglüht, um PrO_2 in Pr_2O_3 überzuführen, was jedoch niemals vollständig gelang; die hierdurch entstandenen Analysenfehler sind indessen unbedeutend. Die übrigen Erden wurden mit Ammoniak gefällt und als Sesquioxyde bestimmt.

Die Erweiterung und Vertiefung unserer Kenntnis magnetischer Erscheinungen dürfte zur Zeit in erster Linie von der eingehenderen Erforschung thermomagnetischer und magnetochemischer Vorgänge zu erwarten sein. Es erscheint daher nicht überflüssig, die dabei in Frage kommenden elementaren rechnerischen Grundlagen an dieser Stelle in möglichst präciser Fassung zum Ausdruck zu bringen. Die früher vielfach übliche Beziehung magnetischer Momente auf die Masseneinheit ist infolge der weit fortgeschrittenen Entwickelung der mathematischen Theorie des Elektromagnetismus grösstenteils verdrängt worden, weil sich in ihrem Rahmen die Beziehung auf die Volumelemente der mathematischen Physik als die einfachere erweist. Der Eine von uns hat bereits früher[1]) ausgeführt, dass man in besonderen Fällen besser thut, zur ursprünglichen Methode zurück zu kehren, indem die Resultate in mancher Hinsicht besser vergleichbar werden, wenn die variabele Dichtigkeit eliminirt wird. Da die magnetischen Vorgänge wesentlich moleculare sind, bezieht man sie für stöchiometrische Zwecke bekanntlich sogar noch besser auf moleculare Massen.

Im Folgenden bezeichnet m Moleculargewicht; M Masse; $\mathfrak{M}$ magnetisches Moment; $\mathfrak{S}$ specifische Magnetisirung, d. h. Moment pro Masseneinheit; $\mathfrak{H}$ Feldintensität; i specifische Susceptibilität, definirt durch die Beziehung $i = \mathfrak{S}/\mathfrak{H}$.[2]) Die moleculare Susceptibilität i_m sei nun definirt durch die Gleichung

$$i_m = m\,i = \frac{m\,\mathfrak{S}}{\mathfrak{H}}.$$

Die Indices l, w und s beziehen sich der Reihe nach auf Lösung, Lösungsmittel und Salz. Wegen des zuerst von G. Wiedemann nachgewiesenen rein additiven Verhaltens der hier in Betracht kommenden Grössen gilt für eine Lösung im gleichförmigen Felde einfach

$$\mathfrak{M}_l = \mathfrak{M}_w + \mathfrak{M}_s.$$

---

1) H. du Bois, Phil. Mag. (5) **29**. p. 293. 1890.

2) Bezeichnet man wie üblich mit D die Dichtigkeit, mit $\mathfrak{J}$ die Magnetisirung und mit $\varkappa$ die Susceptibilität nach der gewöhnlichen Definition, so ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{J}/D$ und $i = \varkappa/D$. Vgl. hierzu J. Koenigsberger, Wied. Ann. **66**. p. 698. 1898 (Anmerkung).

Vom Einfluss der Gestalt, sowie von der damit zusammenhängenden magnetischen Wechselwirkung der einzelnen gleichartigen oder ungleichartigen Volumelemente darf auch bei den am stärksten paramagnetischen Lösungen abgesehen werden, da das Quadrat der Susceptibilität gegen eins völlig vernachlässigbar ist. Insbesondere wird für eine *unmagnetische* Lösung $\mathfrak{M}_l = 0$, daher

$$\mathfrak{M}_s = -\mathfrak{M}_w$$

oder

$$\mathfrak{S}_s M_s = -\mathfrak{S}_w M_w.$$

Nach Division durch $\mathfrak{H}$ ergiebt sich

$$\frac{i_s}{i_w} = -\frac{M_w}{M_s}. \tag{1}$$

Und die relative moleculare Susceptibilität i_m / i_w des Salzes wird schliesslich

$$\frac{i_m}{i_w} = -m\frac{M_w}{M_s}, \tag{2}$$

d. h. gleich dem negativen Product aus dem Moleculargewicht in das Massenverhältnis von Lösungsmittel und Salz. Dieser Wert von i_m gilt nicht nur für die besondere Concentration der unmagnetischen Lösung, sondern ganz allgemein [1]; ob er auch innerhalb der bei Benutzung unserer Nullmethode erreichbaren bedeutend engeren Fehlergrenzen vom Lösungsmittel ganz unabhängig ist, wäre erst durch besondere Versuchsreihen zu entscheiden; mit der Temperatur ändert er sich stark.

Der Eine von uns hat schon früher darauf hingewiesen, dass das Verhalten einer unmagnetischen Lösung in Feldern von verschiedener Intensität einen Rückschluss auf die Constanz der Susceptibilität erlaube [2], und diese für Felder bis zu 10 000 C.G.S. in der That nachgewiesen.

Wenn die durch M_w / M_s gemessene Zusammensetzung der unmagnetischen Lösung von der Feldintensität unabhängig ist, so folgt aus Gl. (1) ohne weiteres, dass dies auch für die auf Wasser bezogene specifische Susceptibilität i_s / i_w zutrifft.

---

1) Nach den übereinstimmenden Resultaten verschiedener Forscher; vgl. die Literaturzusammenstellung p. 178, insbesondere auch die theoretische thermodynamische Beweisführung bei J. Koenigsberger, l. c. p. 708.

2) H. du Bois, Wied. Ann. 35. p. 155. 1888.

Thatsächlich wurde bei keiner der untersuchten unmagnetischen Lösungen jemals eine derartige Abhängigkeit constatirt, und zwar gilt dies für den ausgedehnten Feldbereich zwischen 2000 und 40 000 C.G.S.-Einheiten. Es darf mit einer an Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit behauptet werden, dass etwaige Variationen der Susceptibilität des Wassers von derjenigen der verschiedenen Salze nicht ebenfalls genau proportional befolgt werden. *Es folgt daher aus der Constanz der auf Wasser bezogenen Susceptibilität auch diejenige der absoluten Susceptibilität des in Lösung befindlichen Salzes, sowie des Wassers innerhalb des angegebenen Feldbereichs.*

Es ist ferner sehr unwahrscheinlich, dass die Susceptibilität etwa für schwächere Felder variabel wäre. [1]) Die constante Susceptibilität des Wassers tritt nun im Folgenden überall als Hauptfactor auf. Es liegen dafür folgende Bestimmungen vor, welche sämtliche so gut wie möglich auf die Temperatur 18° und gegen das Vacuum umgerechnet sind; die Susceptibilität der Luft bei Atmosphärendruck und 18° wurde dabei zu + 0,023 Millionstel angenommen. [2])

Tabelle 1.

Temperatur: 18°. Gegen Vacuum.

1885	G. Quincke (genauester Wert)	$\varkappa =$ – 0,797	Millionstel
1888	H. du Bois	– 0,831	„
1892	S. Henrichsen	– 0,727	„
1895	P. Curie (Mittelwert)	– 0,788	„
1896	J. S. Townsend	– 0,735	„
1898	J. Koenigsberger	– 0,785	„
1899	G. Jäger-St. Meyer (Mittelwert)	– 0,645	„
	Mittelwert	$\varkappa =$ – 0,758	„

Da $D_{18} = 0,9987$, wird $i_w = -0,759$ Millionstel.

1) Vgl. F. Auerbach in Winkelmann's Handbuch der Physik **3.** 2. Abt. p. 217. Breslau 1895.

2) G. Quincke, Wied. Ann. **24.** p. 404. 1885; H. du Bois, Wied. Ann. **35.** p. 167. 1888; S. Henrichsen, Wied. Ann. **45.** p. 53. 1892; P. Curie, Thèse Nr. 840. p. 31. Paris 1895; J. S. Townsend, Proc. Roy. Soc. **60.** p. 186. 1896; Beibl. **20.** p. 796. 1896; J. Koenigsberger, Wied. Ann. **66.** p. 703, 1898; G. Jäger und St. Meyer, Wied. Ann. **67.** pp. 427 u. 707. 1899. (Mittelwert nach 3 Methoden.) — Die älteren Bestimmungen von M. Faraday, E. Becquerel, J. Schuhmeister und der ganz herausfallende Wert Th. Wähner's sind nicht berücksichtigt.

In Anbetracht der Unsicherheit, welche demnach betreffs der auf magnetochemischem Gebiete fundamentalen Constante i_w und ihres Temperaturcoefficienten noch herrscht, haben wir sie vorläufig mit x bezeichnet und die moleculare Susceptibilität auf sie bezogen; um für jene Zahl wenigstens Näherungswerte zu erhalten, ist dann der provisorische, abgerundete Mittelwert $x = -0{,}75 \, . \, 10^{-6}$ eingeführt worden. Eine eingehendere Discussion der vorliegenden Werte und weitere Neubestimmungen von x für Wasser und andere Lösungsmittel bei verschiedenen Temperaturen wären sehr erwünscht. Sobald diese mit der Genauigkeit durchgeführt sein werden, mit der die relativen Werte i_m/x bestimmt sind, wird die Umrechnung der letzteren auf absolute Zahlen stets ohne weiteres erfolgen können.

Tabelle 2.

Temperatur: 18°. $x = -0{,}75 \, . \, 10^{-6}$.

Name des Salzes in wässeriger Lösung	q	Formel	O = 16,00 a	m	$\frac{M_w}{M_s}$	$-\frac{i_m}{x}$	$+i_m$
Yttriumchlorid	3	YCl_3	89,0	195,35	1,41	280	0,00021?
{ Ceriumchlorid }	3	{ $CeCl_3$	140,0	246,35	13,20	{3250	0,00243}
{ Ceriumbromid }		{ $CeBr_3$	140,0	379,88	8,44	{3210	0,00240}
Praseodymchlorid	3	$PrCl_3$	140,4	246,75	17,72	4370	0,00328
{ Neodymchlorid }	3	{ $NdCl_3$	143,6	249,95	28,00	{7000	0,00525}
{ Neodymnitrat }		{ $Nd(NO_3)_3$	143,6	329,72	20,98	{6920	0,00519}
Samariumchlorid	3	$SaCl_3$	150	256,35	60,52	15510	0,01164
Gadoliniumchlorid	3	$GdCl_3$	156	262,35	130,24	34170	0,02563
Erbiumchlorid	3	$ErCl_3$	166	272,35	179,59	48910	0,03668
Ytterbiumchlorid	3	$YbCl_3$	173	279,35	33,95	9480	0,00711

Die Versuchsergebnisse sind wieder in Tab. 2 zusammengestellt, welche der Tabelle auf p. 186 ganz ähnlich eingerichtet ist. Nach den dort zusammengestellten Resultaten glaubten wir uns hier mit der Bestimmung der Chloride vorläufig begnügen zu können; der Controle halber haben wir nur noch Messungen am Ceriumbromid und Neodymnitrat angestellt, welche gegen die Chloride die gewohnten kleinen Unterschiede aufweisen. Die Werte für Cerium sind wegen der geringen Beimischung diamagnetischen Lanthans etwas zu klein. Diejenigen für Neodym werden wegen der zwei-

procentigen Verunreinigung durch Praseodym um etwa $^2/_3$ Proc. zu gering sein, wie sich aus den Zahlen für beide Metalle ergiebt. Beim Yttriumchlorid war die unmagnetische Lösung nahe gesättigt und sehr schwerflüssig; die Bestimmung wurde daher in einem weiteren schwach geknickten Rohre vorgenommen und steht an Genauigkeit hinter den übrigen Messungen zurück.[1]) Es bedarf kaum des Hinweises, dass ein Salz um so stärker paramagnetisch ist, je verdünnter seine unmagnetische Lösung sich erweist. In dieser Beziehung steht das Manganofluorid an erster Stelle.

Aus Tab. 2 gehen die paramagnetischen Constanten der Salze seltener Erden hervor, welche mit denen der Eisengruppe vergleichbar sind; die Verhältnisse M_w/M_s, die nach Gleichung (1) ein Maass für die specifische Susceptibilität ergeben, betragen z. B. für $MnCl_2$ und $FeCl_3$ 163 bez. 111, dagegen für $ErCl_3$ und $GdCl_3$ 179 bez. 130. Infolge der etwa dreifach höheren Atomgewichte der letzteren erscheint ihre moleculare Susceptibilität freilich viel grösser. Umgekehrt wie bei der Eisengruppe fällt hier zuerst der allmähliche Anstieg von Cerium bis Gadolinium und Erbium und das plötzlichen Abfallen zum Ytterbium auf; das asymmetrische Maximum erscheint hier gegen *grössere* Atomgewichte verschoben.

Durch die vorliegende und die vorhergehende Arbeit sind für die zwei wohlausgeprägten Gruppen von zusammen 13 Metallen, welche verhältnismässig stark paramagnetische Verbindungen liefern, die Eigenschaften der Hauptsalze im wesentlichen klargestellt, trotzdem es immerhin erwünscht wäre, die beschriebene Nullmethode noch auf möglichst viele andere Salze auszudehnen. Das Verhalten mancher anderer Metalle und Salze dieser Gruppen kann erst durch die sorgfältigsten systematischen magnetochemischen Untersuchungen sichergestellt werden; mögliche allgemeinere Folgerungen werden sich dann von selbst ergeben, scheinen uns aber zur Zeit verfrüht. Von den Erdmetallen kämen hierbei wohl nur Titan,

1) Vgl. die Methode der magnetischen Drucklibelle von A. Toepler und R. Hennig, Wied. Ann. 34. p. 790. 1888. Die geringe positive Susceptibilität des Yttriumchlorids dürfte nur durch Verunreinigungen bedingt sein (vgl. p. 198).

Vanadin und vielleicht Thorium in Betracht; von der Eisengruppe Molybdän, Wolfram und Uran.

Bei diesen Metallen ist die Atomsusceptibilität, falls überhaupt positiv, doch so gering, dass nur wenige oder gar keine paramagnetischen Verbindungen existiren. Die Untersuchung der Metalle als solche ist bekanntlich immer recht heikel; die vielen seit Faraday's Zeiten in der Literatur auftauchenden Einzelangaben sind mit grosser Vorsicht zu discutiren.[1]) Die Anwesenheit minimaler Eisenspuren, welche kaum noch durch die Rhodankaliumreaction oder durch Funkenspectra nachweisbar sind, kann unter Umständen die Eigenschaften des Hauptmetalles in einer Weise verdecken, wie sie bei der Untersuchung in gelöstem Zustande cet. par. gar nicht in Frage kommt. Neuere Erfahrungen mit dielektrischen Körpern[2]), sowie bei der Herstellung von Spulengehängen für Galvanometer mit starkem Magnetfelde haben dies wiederholt bestätigt.

Die merkwürdigen Eigenschaften mancher Legirungen des Eisens mit anderen Metallen — Chrom, Mangan, Nickel, Molybdän, Wolfram u. a. — gewinnen neuerdings erhebliches wissenschaftliches und technisches Interesse. Mehrere der nicht allzu „seltenen“ Erdmetalle bieten nunmehr eine noch grössere Auswahl von ferneren Elementen zur Darstellung von Eisenlegirungen mit vielleicht ganz neuen Eigenschaften. Im übrigen ist die Seltenheit eines Elementes zuweilen nur eine bedingte; sind doch z. B. infolge von Hrn. Auer v. Welsbach's Untersuchungen Thorium und Cerium heute kaum als sehr selten zu betrachten. Hr. Muthmann[3]) hat neuerdings ein Trennungsverfahren für die hier in Betracht kommenden Erden beschrieben, mittels dessen eine leichtere Darstellung und eine bessere Ausbeute erreicht werden dürften.

Bei einiger Uebung ist die Herstellung einer unmagnetischen Lösung eine sehr bequeme und rasch durchführbare

---

1) Vgl. zu alledem G. Wiedemann, Elektricität 2. Aufl. **3.** § 1206. Zu bemerken ist, dass eine einzige *diamagnetische* Bestimmung eines Metalles seine Stellung entscheidet, nicht umgekehrt.

2) W. Duane u. W. Stewart, Wied. Ann. **61.** p. 435. 1897; **62.** p. 543. 1897.

3) W. Muthmann, Deutsch. chem. Ges., Sitzung vom 9. Oct. 1899.

Operation; wir bedienten uns dabei eines grossen Ringelektromagnetes. Indessen ist die hiermit erreichbare Genauigkeit der Abgleichung auf 0,00001 x meistens zwecklos und eine Fehlergrenze von 0,001 x genügend, welche derjenigen der nachfolgenden chemischen Analyse nicht nachsteht. Eine solche lässt sich schon mit schwächeren leichten Elektromagneten (vgl. weiter unten p. 205), oder gar mit geeignet construirten permanenten Ringmagneten erreichen. Wir halten es daher nicht für ausgeschlossen, dass die Bestimmung der molecularen Susceptibilität sich später für manche chemische Zwecke, z. B. die Beurteilung der Reinheit oder der Concentration einer paramagnetischen Salzlösung praktisch erweisen könnte.[1])

Anmerkung bei der Correctur:

Hr. K. Ångström[2]) hatte schon vor 20 Jahren die Oxyde Y_2O_3, CeO_2, Di_2O_3, Er_2O_3, Yb_2O_3 magnetisch befunden, während er u. a. Be_2O_3, La_2O_3 und ThO_2 als diamagnetisch bezeichnet. Bei seinen magnetochemischen Untersuchungen hatte G. Wiedemann die moleculare Susceptibilität seiner offenbar unreinen Ceriumsalze etwa gleich derjenigen der Kupferoxydsalze gefunden, während der von uns ermittelte Wert etwa 50 Proc. grösser erscheint.[3])

Kürzlich hat Hr. St. Meyer eine grössere Anzahl von Bestimmungen der „Magnetisirungszahlen anorganischer Verbindungen", u. a. auch *trockener* Oxyde und Nitrate seltener Erden, veröffentlicht.[4]) Seine Resultate sind im grossen und

---

1) Die Anwendung magnetischer Methoden zur Erforschung chemischer Fragen ist bereits von G. Wiedemann, Wied. Ann. **5.** p. 45. 1878 angebahnt worden.

2) Vgl. L. F. Nilson u. O. Petterson, Chem. Ber. **13.** p. 1465. 1880; Beibl. **4.** p. 635. 1880. Wir haben diese Bestimmungen K. Ångström's bisher leider übersehen, da wir weder im G. Wiedemann'schen noch im Winkelmann'schen Handbuch einen Hinweis darauf fanden.

3) G. Wiedemann, Elektricität 2. Aufl. **3.** § 1272; das von diesem Forscher ebenfalls untersuchte Didym ist bekanntlich später durch Auer von Welsbach in Praseodym und Neodym zerlegt worden.

4) St. Meyer, Wied. Ann. **69.** p. 236. 1899; Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. zu Berlin **1.** p. 275. 1899; hierzu Replik von H. du Bois u. O. Liebknecht in der Sitzung vom 19. Januar 1900. Vgl. auch die Ausführungen J. Koenigsberger's, Wied. Ann. **66.** p. 698. 1898, über das Verhalten paramagnetischer Verbindungen im trockenen, festen Zustande.

ganzen mit den unsrigen im Einklang; jedoch lässt die quantitative Uebereinstimmung manches zu wünschen übrig; das von uns angewandte Verfahren der Bestimmung auf *nassem* Wege halten wir für erheblich einfacher und zugleich genauer.

In Uebereinstimmung mit Hrn. St. Meyer neigen wir zur Ansicht, dass der Paramagnetismus der Yttriumverbindungen wohl nur von Beimengungen herrühren dürfte. In dem uns von Hrn. P. T. Cleve gütigst zur Verfügung gestellten Yttriumsulfat hatte das Metall ein scheinbares Atomgewicht 89,5; von der allerreinsten Verbindung, der das angegebene Atomgewicht zukommt, war leider zu wenig vorhanden. Setzt man den Unterschied von einer halben Einheit auf Rechnung von Erbium, so wird nach unseren Ergebnissen die gefundene moleculare Susceptibilität des Yttriumchlorids dadurch schon nahezu bedingt. Es ist also auch aus diesem Grunde wahrscheinlich, dass das Yttrium mit seinem weit geringeren Atomgewicht sich in magnetischer Beziehung anders verhält wie die übrigen seltenen Erdmetalle mit Atomgewichten zwischen 140 und 173.

Den auf p. 190 genannten Chemikern, insbesondere Hrn. P. T. Cleve, sagen wir für die Ueberlassung der kostbaren Präparate unseren besten Dank, ebenso Hrn. Emil Fischer, welcher uns das aus der Sammlung des Hrn. Schottländer stammende Material gütigst zur Verfügung stellte. Den Herren H. Jahn und C. v. Schéele sind wir für manche wertvolle Ratschläge zu Danke verpflichtet.

Berlin, December 1899.

(Eingegangen 18. December 1899.)

---

11. *Halbring-Elektromagnet; von H. du Bois.*

Der in diesen Annalen beschriebene Ringelektromagnet gestattet ein mehrere Millimeter ausgedehntes Feld von rund 40000 C.G.S. zu erzeugen. Bei Benutzung „mikromagnetischer“ Vorrichtungen, deren Dimensionen sich nach zehntel Millimetern bemessen, wurden mittels Zugkraftsbestimmungen die Werte $\mathfrak{H} = 51600$ und $\mathfrak{B} = 74\,200$ C.G.S. gewonnen.[1]) Der Apparat wiegt freilich 270 kg und verbraucht etwa 5 Kilowatt, sodass ein Bedürfnis nach leichteren Elektromagneten mit geringeren elektrischen Ansprüchen nach wie vor besteht; freilich wird man dabei eine gewisse Einbusse von Feldintensität zu erwarten haben.

Das grössere Modell des aus hochpermeabelem Stahlguss hergestellten neuen „Halbring-Elektromagnets“[2]) ist in Fig. 1 in $^1/_{10}$ der natürlichen Grösse im Verticalschnitt dargestellt. Die bogenförmigen Schenkel S_1 und S_2 sind auf der mit dem nötigen Zubehör ausgestatteten Grundplatte $G\,G$ parallel der Axe $A_1\,A_2$ verschiebbar und auch um die Schrauben K_1 und K_2 drehbar. Die Benutzung auf Laboratoriumstischen ist vorgesehen, wobei sich die Axe $A_1\,A_2$ etwa 42 cm über der Tischebene befindet, sodass der Apparat leicht in Verbindung mit optischen Instrumenten jeder Art verwendbar ist. Die Grund-

1) H. du Bois, Wied. Ann. 51. p. 537. 1894; E. Taylor Jones, Wied. Ann. 57. p. 273. 1896; vgl. auch G. Wiedemann, Elektricität 2. Aufl. 3. p. 905. 1895. Sir D. Salomons, Phil. Mag. (5) 42. p. 248. 1896, beschreibt einen 650 kg wiegenden Elektromagnet „with a field probably far more powerful than any which had been made before“. Diese Angabe scheint mir indessen mindestens des Erhärtens durch Messungen bedürftig.

2) Eine vorläufige Veröffentlichung über den Halbring findet sich in den Verhandl. d. physikal. Gesellsch. zu Berlin 17. p. 99. 1898. Eine eingehendere illustrirte Beschreibung erfolgt in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde 19. p. 357. 1899; vgl. auch P. Weiss, Ecl. électr. 15. p. 481. 18

platte enthält mehrere Hohlfutter, in die sich verschiedenartige Träger nach Bedarf einsetzen lassen. Auf der Querschiene Q kann z. B. ein Universalschlitten montirt werden. Ferner ist ein Galgen vorgesehen, an welchem magnetooptische und magnetochemische Hülfsapparate, sowie Gehänge für dia- und paramagnetische Versuche und dergl. befestigt werden. Jeder Schenkel wiegt mit den zugehörigen vier Spulen ca. 60 kg, die Grundplatte ca. 40 kg. Bei der Bewickelung wurde im allgemeinen ein niedriges Gleichstrompotential von höchstens 72 Volt vorgesehen, wie es z. B. eine Batterie von 36 Accu-

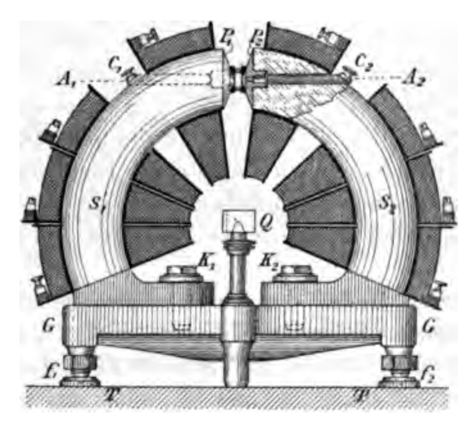


Fig. 1. — $^1/_{10}$ der nat. Grösse.

mulatoren, und viele ältere in Laboratorien aufgestellte Dynamos erzeugen. Die acht sectorförmigen Spulen bedecken insgesamt $8 \times 22{,}5^0 = 180^0$ des Umfanges und haben hintereinander 3,6 Ohm Widerstand, sodass bei obiger elektromotorischer Kraft der Strom höchstens 20 Amp. beträgt. Die gesamte Windungszahl ist 2500, sodass dieser Stromstärke eine magnetomotorische Kraft von 50000 Ampèrewindungen oder 62800 C.G.S.-Einheiten entspricht; dabei ist die Leistung $20 \times 72 = 1440$ Watt oder etwa zwei Pferdestärken. Der Selbstinductionscoefficient beträgt an der steilsten Stelle der Inductionscurve etwa 180 Henry, die Relaxationsdauer 50″; die Unterbrechung oder Commutirung des Stromes sollte daher nur mittels Kohlenausschalters oder Kurzschlussunterbrechers erfolgen.

Als Polschuhe sind zunächst die üblichen Flachpole und Tellerpole vorgesehen, die mittels Bajonettzapfen an die

Schenkelstirnflächen befestigt werden können; auch können passende rohe Stahlgussstücke beigegeben und zur Herstellung von Polschuhen für besondere Zwecke verwendet werden. Alle Polschuhe können, falls erwünscht, centrale Bohrungen beliebigen Durchmessers bez. Profils — z. B. desjenigen eines Schlitzes — erhalten, die bei Nichtbenutzung mit passenden Eisenkernen zu verschliessen sind. Am meisten kommen die conischen Polschuhe in Betracht; es sind deren zunächst zwei, P_1 und P_2, vorgesehen, welche den Eisenquerschnitt auf ein Viertel zusammenschnüren (Durchmesser der Stutzflächen 40 mm); der halbe Oeffnungswinkel beträgt hier 63,5°. In dem von den derart verjüngten Polstirnflächen begrenzten „Intrapolarraume" lassen sich nun verschieden angeordnete Zwischenpolstücke anbringen, die sich dem jeweilig ins Auge gefassten Zwecke anpassen. Derartige Vorrichtungen lassen sich wohl auch in jedem Laboratorium aus 40 mm starkem, gutem, weichen Rundeisen zweckentsprechend herstellen. Für die Untersuchung des Halbringes mittels Wismutspirale wurde beispielsweise ein besonderes Zwischenpolstück benutzt; die Spiralen erhalten füglich einen Durchmesser von nicht unter 5 mm, wobei sich ein Widerstand von der Ordnung 10 Ohm erzielen lässt. Dementsprechend wurde als Durchmesser der die Spirale einschliessenden Kegelstutzflächen 6 mm, als Abstand 1 mm gewählt; eine Kegelfläche vom halben Oeffnungswinkel 60,5° vermittelte den Uebergang zu den Basisflächen von 40 mm Durchmesser; Rothgussringe und passende Verbindungsstücke halten die Eisenteile in der richtigen Lage fest.

Die rechnerische Behandlung des Apparates bietet ein Beispiel für die Anwendung der Hopkinson'schen Theorie auf nahezu gesättigte magnetische Kreise.[1]) Die erwähnte Theorie liefert bekanntlich die Beziehung zwischen dem erstrebten Wert des Inductionsflusses und der dazu aufzuwendenden gesamten magnetomotorischen Kraft. Für letztere ergeben sich folgende Teilbeträge, berechnet für Kegelpolschuhe vom halben Winkel 63,5° und magnetisirt bis zur Induction 20000 C.G.S.; die Inductionscurve des benutzten Stahlgusses war mittels einer magnetischen Waage bestimmt worden.

1) Vgl. H. du Bois, Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung 7. p. 90. 1898.

Teil des magnetischen Kreises	Querschnitt qcm	Induction C.G.S.	M.M.-Kraft C.G.S.	M.M.-Kraft Amp.-W.
1. Interferricum	—	—	40000	31900
2. Kegelpolschuhe und angrenzende Schenkelteile	50	20000	2500	2000
2. Schenkel	57,5	17000	4000	3200
1. Grundplatte	—	ca. 15000	500	400
Insgesamt Ampèrewindungen				37500
Daher bei 2500 Windungen Ampère				15

Wie ersichtlich beansprucht das Interferricum 85 Proc. der magnetomotorischen Kraft; in ihre Berechnung geht der magnetische Widerstand des eigentümlich gestalteten Luftzwischenraumes ein, der sich zwar nicht genau ermitteln lässt,

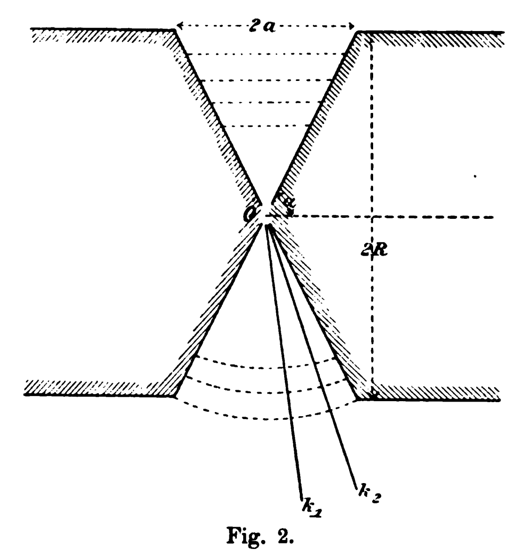


Fig. 2.

für den man aber einen unteren und einen oberen Grenzwert[1]) finden kann.

Da die Permeabilität der Polschuhe selbst bei der höchsten Sättigung noch von der Ordnung 100 ist, werden die Kraftlinien infolge des tangentialen Brechungsgesetzes sehr nahe

1) Vgl. hierzu die Näherungsmethoden für die Berechnung elektrischer Widerstände bei Maxwell, Treatise 2. Ed. 1. § 306. 1881.

senkrecht aus Stahlguss in Luft austreten; bei den Polkegelflächen wird die Abweichung von der Normalen kaum $^1/_4$ Grad betragen; folglich sind jene nahezu Aequipotentialflächen. Von der von den Mantelflächen ausgehenden Streuung ist hier abgesehen; die dem Punkte O unendlich benachbarten Flächenelemente sind ferner ausser Betracht gelassen, da sich in praxi eine unendlich scharfe Kegelspitze überhaupt nicht herstellen lässt. Man erhält nun einen *unteren* Grenzwert des Widerstandes, wenn man unendlich permeabele dünne Schichten in geeigneter Weise angebracht denkt, die alsdann ebenfalls Aequipotentialflächen darstellen; es seien hierzu Hülfskegelflächen gewählt, wie k_1 und k_2 in der unteren Hälfte der Fig. 2; die Kraftlinien müssen diese Flächen orthogonal durchsetzen und sind daher Kreisbögen. Für diese Anordnung erhält man als untere Widerstandsgrenze den Ausdruck

$$(1) \qquad 2\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\gamma}{\sin\gamma \int_0^{R \operatorname{cosec} \alpha} 2\pi\, d r} = \frac{-\sin\alpha \operatorname{logtg}\frac{\alpha}{2}}{\pi R} < X.$$

Es bezeichnet γ den variabelen halben Kegelwinkel der Hülfsflächen, α den constanten halben Polkegelwinkel, R den Radius der Basisflächen, X den magnetischen Widerstand.

Könnte man andererseits die Sättigung noch weiter treiben, sodass sich die Permeabilität der Einheit näherte, so würde sich das Bild der oberen Hälfte der Fig. 2 ergeben, wobei sämtliche Kraftlinien parallel der Axe verlaufen. Dasselbe Resultat könnte man durch Anbringung völlig impermeabeler cylindrischer Scheidewände erzwingen; hieraus ergiebt sich dann als *obere* Widerstandsgrenze der Ausdruck

$$(2) \qquad \frac{\cot\alpha}{\pi R} > X.$$

Für den angegebenen Winkel $\alpha = 63{,}5^0 = \operatorname{arctg} 2$ wird

$$\frac{0{,}43}{\pi R} < X < \frac{0{,}50}{\pi R}.$$

Vorsichtshalber ist für die Berechnung der obere Grenzwert eingesetzt; es entspricht diesem der Luftwiderstand zwischen

Flachpolen, deren Abstand die Hälfte der grössten Entfernung $2a$ der Kegelpole beträgt; hierbei ist von Streuung abgesehen.

Bei Benutzung von Kegelstutzpolen ergiebt sich theoretisch für den Wert der Feldintensität $\mathfrak{H}$ in der Mitte

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{B} \sin^2 \alpha \cos \alpha \log \frac{R}{r} + \mathfrak{B} \left\{ 1 + \frac{r}{d} - \sqrt{1 + \frac{r^2}{d^2}} \right\}.$$ [1]

Das erste Glied bezieht sich auf die beiden Kegelflächen, das zweite auf die kleinen abgestutzten Stirnflächen. Es bedeutet r den Radius der Stutzflächen, d deren Abstand. Setzt man hierfür die thatsächlichen Werte ein, also $\mathfrak{B} = 20000$ C.G.S., $\alpha = 60{,}5^0$, $R = 40$ mm, $r = 3$ mm, $d = 1$ mm, so erhält man

$$\mathfrak{H} = 19200 + 16800 = \mathbf{36000} \text{ C.G.S.}$$

Die Prüfung des Halbring-Elektromagnets erfolgte mittels einer kleinen Wismutspirale, deren Temperatur sorgfältig zwischen $17{,}5^0$ und $18{,}5^0$ gehalten wurde. Die mit der Brücke bestimmten relativen Widerstände R/R_0 gestatten sofort die entsprechende Feldintensität aus der bis 39000 C.G.S. reichenden Henderson'schen Normalcurve für 18^0 zu entnehmen.[2] In nachstehender Tabelle sind die Versuchsergebnisse übersichtlich zusammengestellt, und zwar für Hinter- (H: 3,6 Ohm) bez. Nebeneinanderschaltung (N: 0,9 Ohm) der beiden Schenkelwickelungen.

Verbrauchte Leistung Watt	Schenkel H		Schenkel N		$\frac{R}{R_0}$ bei 18^0	$\mathfrak{H}$ C.G.S.
	E.M.K. Volt	Strom Amp.	E.M.K. Volt	Strom Amp.		
0	0	0	0	0	1,00	0
3,6	3,6	1	1,8	2	2,09	ca. **20000**
14,4	7,2	2	3,6	4	2,45	ca. **26000**
90	18	5	9	10	2,82	**31800**
360	36	10	18	20	3,00	**34300**
810	54	15	27	30	3,09	**35800**
1440	72	20	36	40	3,15	**36700**

Der mit einem Erregerstrom von 15 Amp., d. h. 37500 Ampèrewindungen erzeugte Feldwert stimmt zufällig überraschend gut mit dem oben berechneten überein; jedenfalls

1) Vgl. H. du Bois, Magnetische Kreise, p. 287. Berlin 1894.

2) J. B. Henderson, Wied. Ann. 53. p. 912. 1894.

ist die Vorherberechnung der Wirkung verschieden gestalteter Zwischenpolstücke mittels der angeführten Gleichungen eine zuverlässige.

Mit einem Strome von 20 Amp. kommt man noch etwas weiter; der Hauptnutzen solcher „Reserveampèrewindungen" ergiebt sich aber, wenn man das Interferricum zu verlängern genötigt ist. Will man z. B. den Versuchsraum für thermomagnetische Zwecke isoliren, so sind zunächst die vier Trennungsflächen zwischen den einzelnen Teilpolstücken möglichst wärmeundurchlässig zu machen, was am besten durch etwa millimeterdicke Hornscheiben geschieht. In dieser Weise gelingt es, kryomagnetische Versuche in siedender Luft auszuführen; eine Wismutspirale erfährt dabei z. B. in einem Felde von 37500 C.G.S. eine 230 fache Widerstandsvermehrung.[1])

Die Streuung des Halbringes ist verhältnismässig gering, was für die Benutzung in grösseren Instituten behufs Vermeidung gegenseitiger Störung immerhin erwünscht ist.

Ausser dem im vorigen beschriebenen Modell wird noch ein kleiner, sehr leichter Halbring-Elektromagnet hergestellt, dessen Lineardimensionen die Hälfte betragen — d. h. das Fünffache der Fig. 1. — Für die wesentlichen Bestimmungsstücke sind folgende ungefähre Werte normirt:

Gesamtgewicht		25 kg
Axenhöhe über Tischebene		250 mm
Basisdurchmesser der Polschuhe		40 mm
Maximale Induction		20000 C.G.S.
Gesamtwindungszahl		2000
Gesamtwiderstand		4 Ohm
Selbstinductionscoefficient	Maximal-	60 Henry
Relaxationsdauer	werte	15 sec
Maximalstrom		8 Amp.
Maximale magnetomotorische Kraft		16000 Amp.-Wind.
Maximale elektromotorische Kraft		32 Volt
Maximale verbrauchte Leistung		256 Watt

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die beiden — gleichmässig bewickelten — Schenkel hintereinander geschaltet sind; durch Parallelschaltung wird die Voltzahl unter Verdoppelung der

1) H. du Bois u. A. P. Wills, Verhandl. d. Deutschen Physikal. Gesellsch. zu Berlin 1. p. 169. 1899.

Stromstärke halbirt; andererseits kann für höhere Voltzahlen die Bewickelung auch mit dünnerem Draht erfolgen.

Für die Beurteilung des Einflusses einer solchen Linearhalbirung ist ein bekannter Satz Lord Kelvin's maassgebend:

„Geometrisch ähnliche Elektromagnete mit Strömen — und daher auch magnetomotorischen Kräften — proportional den Lineardimensionen weisen in entsprechenden Punkten gleiche und gleichgerichtete Magnetisirungs- bez. Inductionswerte auf.“ Der kleine Halbring mit seinen 16000 Ampèrewindungen wird sich daher dem grösseren in allen Punkten gleich verhalten, wofern letzterer von 2 × 16000 Ampèrewindungen erregt wird, was bei dessen 2500 Windungen einem Strome von 12,8 Amp. entspricht. Nach der Tabelle auf p. 204 erzeugt ein solcher ein Feld von rund 35000 C.G.S.; dasselbe leistet der kleine Apparat, wofern er in allen Stücken völlig ähnlich ist, insbesondere die kleinen Kegelstutzflächen ebenfalls linear halbirt sind, daher 3 mm Durchmesser und 0,5 mm Abstand aufweisen. Würde man aber die für die Einsetzung der Wismutspirale angemessenen Dimensionen von 6 und 1 mm beibehalten, so erhielte man ein Feld von rund 30000 C.G.S., also etwa so viel, wie die älteren schweren Elektromagnete zu leisten pflegten.

Die Herstellung der Halbring-Elektromagnete hat die Firma Hartmann & Braun in Frankfurt a. M. übernommen; die Versuche wurden in ihrem Laboratorium ausgeführt, wobei mir Hr. Th. Bruger in dankenswerter Weise zur Seite stand.

Berlin, 4. December 1899.

(Eingegangen 5. December 1899.)

12. *Ueber den zeitlichen Verlauf der magnetischen Nachwirkung in Eisenscheiben; von Lizzie R. Laird.*

§ 1. Eisen, in ein schwaches Magnetfeld gebracht, nimmt den definitiven Wert des inducirten Magnetismus nicht sofort, sondern erst nach einiger Zeit an. Diese Erscheinung, magnetische Nachwirkung oder magnetische Viscosität genannt, wurde zuerst von Lord Rayleigh, dann von Ewing[1]) und Klemenčič[2]) an Eisendrähten untersucht. Bei diesen Versuchen besteht hinsichtlich des Anfangs- oder Momentanwertes der Magnetisirung ein Zweifel, welcher wegfällt bei einer von Hrn. Martens[3]) benutzten Methode. Derselbe liess horizontale Eisenscheiben im Erdfeld rotiren und fand das magnetische Moment der rotirenden Scheibe innerhalb weiter Grenzen der Rotationsgeschwindigkeit von dieser unabhängig, woraus folgt, dass jenes Moment dem Momentanwert des durch das Erdfeld inducirten Magnetismus entspricht. Die Nachwirkung äussert sich dann in dem Zuwachs, welchen das Moment erfährt, wenn die Scheibe zur Ruhe gebracht wird.

§ 2. Um nach dieser Methode auch das Anwachsen des Moments mit der Zeit zu verfolgen, gebrauchte ich, wie Hr. Martens, ein astatisches System, dessen Nadeln einen Abstand von 15 cm hatten, und brachte die obere Nadel des Systems in die Ebene der Scheibe 5 cm von deren Rand entfernt in südöstlicher oder südwestlicher Richtung an eine Stelle, an welcher das Scheibenfeld senkrecht zum Erdfeld steht. Die Wirkung der Scheibe auf die untere Nadel kann hierbei vernachlässigt werden. Zunächst maass ich, wie Hr. Martens, die Ablenkung, welche 1. die ruhende, 2. die rotirende Scheibe dem System

1) Vgl. J. A. Ewing, Magnet. Induction p. 120. 1892.
2) I. Klemenčič, Wied. Ann. **62.** p. 68. 1897; **63.** p. 61. 1897; Sitzungsber. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Wien **106.** IIa. Oct. 1897.
3) F. Martens, Berl. Dissert. 1896. Gekürzt Wied. Ann. **60.** p. 75. 1897.

erteilte. Im zweiten Fall wurde die Scheibe durch Drehung in ihrer Ebene um ihren Mittelpunkt in 25 äquidistante Stellungen gebracht und das Mittel aus den erhaltenen 25 Ablenkungswerten genommen. Aus diesen Versuchen ergiebt sich

$$\frac{J_0}{J_\infty} = \delta \tag{1}$$

wo J_0 und J_∞ bez. den Anfangs- und den Endwert der Intensität der Magnetisirung bedeuten.

Für die zu den folgenden Versuchen benutzte, zweimal ausgeglühte, 0,062 cm dicke, 4,5 cm im Durchmesser haltende Scheibe aus Walzeisen ergab sich

$$\delta = 0{,}872.$$

§ 3. Alsdann wurde die Ablenkung des Systems bei rotirender Scheibe durch einen kleinen Hülfsmagneten compensirt, die Scheibe zur Ruhe gebracht und das Wandern der Gleichgewichtslage des Systems mit der Zeit verfolgt. Dieses Wandern erfolgte so schnell, dass eine photographische Registrirmethode benutzt werden musste. Das Licht einer Nernst'schen Lampe wurde durch eine Linse auf einen horizontalen, mit einem Secundenpendel verbundenen Spalt concentrirt, passirte alsdann eine zweite Linse und brachte, nachdem es von dem Magnetometerspiegel reflectirt worden war, auf einer mit Bromsilberpapier bedeckten Myographiontrommel mit horizontaler Drehungsaxe ein horizontales Spaltbild hervor. Schwingt das Pendel, so entsteht auf der rotirenden Trommel eine Reihe von horizontalen Spaltbildern, welche, wenn der Spiegel ruht, auf einer verticalen Linie, wenn er schwingt, auf einer Curve liegen, und zwar entstehen die Spaltbilder nacheinander zu Zeiten, welche um 1 Secunde auseinander liegen. Zur Ausmessung der Curve diente eine gleichzeitig mit dieser entstehende verticale Spaltbilderreihe (Leitlinie), welche von dem Magnetometerfenster herrührt. Man macht eine solche Aufnahme 1. während der Nachwirkungsperiode, 2. nach Beendigung derselben, im letzteren Fall, nachdem man dem Magnetometersystem eine beliebige Ablenkung erteilt hat, und besitzt dann alle Daten, um den zeitlichen Verlauf der Nachwirkung zu berechnen.

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse der Versuche 1 und 2 für die erwähnte Scheibe verzeichnet. z bedeutet den Abstand des der Zeit t entsprechenden Spaltbildes von der Leitlinie.

Versuch 1.

t	z	$f(t)$	t	z	$f(t)$
1	4,5	14,3	14	93,3	39,3
2	19	23,2	15	97,4	39,4
3	43,2	25,5	16	99,2	38,9
4	68	29,6	17	98,2	39,5
5	88	31,4	18	96	39,9
6	98,2	33,6	19	94	38,9
7	99,2	34,3	20	92	40,3
8	93,5	35,2	21	92	40,3
9	85,7	37,2	22	93,5	39,7
10	81	36,3	23	95	40,9
11	79,5	37,7	24	97	41,1
12	82,2	38,8	25	98,9	40,5
13	88	38,0			

Versuch 2.

t	z	$f(\infty)$	t	z	$f(\infty)$
1	41,5	—	8	104	38,5
2	49	39,0	9	92	39,8
3	70,8	39,1	10	84	39,7
4	95,4	39,0	11	82	39,5
5	113	39,1	12	85	38,9
6	119	39,0	13	90,1	39,6
7	114	40,7	14	95,5	39,2

§ 4. Die Rechnung wird folgendermaassen ausgeführt. Es ist

$$z = \Theta_0 + \Theta, \tag{2}$$

wo Θ_0 eine Constante, Θ die in gewissem Maasse gemessene Elongation des Systems zur Zeit t bedeutet. Sei nun X das ganze Directionsmoment, welches bei rotirender Scheibe auf das System wirkt und das nach dem Vorhergehenden in den Meridian fällt, $F(t)$ das von der Nachwirkung herrührende Moment, welches senkrecht zum Meridian steht, J das Träg-

heitsmoment des Systems, $X/J = \mathfrak{X}$, $F(t)/J = f(t)$, dann ist im ersten Fall

$$\frac{d^2 \Theta}{d t^2} + 2\beta \frac{d \Theta}{d t} + \mathfrak{X} \sin \Theta = f(t) \cos \Theta ,$$

oder wenn Θ sehr klein

$$\frac{d^2 \Theta}{d t^2} + 2\beta \frac{d \Theta}{d t} + \mathfrak{X}\, \Theta = f(t) , \tag{3}$$

im zweiten Fall

$$\frac{d^2 \Theta}{d t^2} + 2\beta \frac{d \Theta}{d t} + \mathfrak{X}\, \Theta = f(\infty) . \tag{4}$$

Aus dem zweiten Versuch findet man mittels (4) 2β und $\mathfrak{X}$, alsdann aus dem ersten $f(t)$. Da nämlich die ganze Schwingungsdauer des Systems 10 sec betrug, so kann man mit hinreichender Annäherung setzen

$$d t = 1 \sec,\ 2 \frac{d \Theta}{d t} = \Theta_{t+1} - \Theta_{t-1} = z_{t+1} - z_{t-1} ,$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d t^2} = (\Theta_{t+1} - \Theta_t) - (\Theta_t - \Theta_{t-1}) = (z_{t+1} - z_t) - (z_t - z_{t-1}) .$$

So ergiebt sich für $t = 3$ aus dem zweiten Versuch

$$\frac{d^2 \Theta}{d t^2} = 2{,}8,\ 2 \frac{d \Theta}{d t} = 46{,}4 ,$$

mithin

$$2{,}8 + \beta \,.\, 46{,}4 + \mathfrak{X} (70{,}8 - \Theta_0) = f(\infty) . \tag{5}$$

Ebenso für $t = 4$

$$- 7 + \beta \,.\, 42{,}2 + \mathfrak{X} (95{,}4 - \Theta_0) = f(\infty) . \tag{5a}$$

Aus (5) und (5a)

$$9{,}8 + \beta \,.\, 4{,}2 - \mathfrak{X} \,.\, 24{,}6 = 0 . \tag{6}$$

In derselben Weise erhält man aus den Ergebnissen für $t = 9$ sec und $t = 10$ sec

$$2 + \beta \,.\, 10 - \mathfrak{X} \,.\, 8 = 0 . \tag{6a}$$

Aus (6) und (6a)

$$\mathfrak{X} = 0{,}42 ,\quad \beta = 0{,}14 .$$

Mit Hülfe dieser Werte von $\mathfrak{X}$ und β sind die in der Tabelle verzeichneten Werte von $f(t)$ und $f(\infty)$ berechnet.

$f(\infty)$ ergiebt sich im zweiten Versuch, wie es sein muss, in den Fehlergrenzen constant, $f(t)$ erreicht in etwa 14 sec den Wert $f(\infty)$. Für $f(\infty)$ ergiebt sich aus Versuch 2 der Mittelwert 39,3, aus Versuch 1 39,9 (Mittelwert der 12 letzten $f(t)$-Werte). Als Mittel aus beiden

$$f(\infty) = 39,6\,. \tag{7}$$

§ 5. Es ist nun in der Bezeichnung des § 2

$$\frac{f(t)}{f(\infty)} = \frac{J(t) - J_0}{J_\infty - J_0}, \tag{8}$$

woraus mit Hülfe von (1)

$$\frac{J_t}{J_\infty} = \delta + (1 - \delta) \cdot \frac{f(t)}{f(\infty)}\,. \tag{9}$$

Hieraus findet man[1]), wenn $\varkappa_t$ und $\varkappa_\infty$ die J_t und J_∞ entsprechenden Susceptibilitäten sind,

$$\frac{\varkappa_t}{\varkappa_\infty} = \frac{\dfrac{J_t}{J_\infty}}{\left(1 - \dfrac{J_t}{J_\infty}\right) . N . \varkappa_\infty + 1}, \tag{10}$$

wo N der Entmagnetisirungsfactor gleich

$$\frac{\pi^2 . \text{Dicke}}{\text{Durchmesser}} = 0,136\,.$$

Es muss also auch $\varkappa_\infty$ bestimmt werden. Dazu maass ich die Ablenkungen, welche die in verschiedene Stellungen (§ 2) gebrachte ruhende Scheibe einer *einfachen* Magnetometernadel an einer Stelle erteilte, an welcher das Scheibenfeld Y senkrecht zur Horizontalcomponente H ist. Bedeutet α das Mittel dieser Ablenkungen, dann ist

$$\alpha = \frac{Y}{H}. \tag{11}$$

Nach Hrn. Martens[2])

$$Y = J . Q\,, \tag{12}$$

wo Q von den Dimensionen der Scheibe und der Entfernung r zwischen dem Mittelpunkte der Scheibe und der Magnetometernadel abhängt, nämlich

1) F. F. Martens, Dissert. p. 36.

2) F. F. Martens, Wied. Ann. 60. p. 63. 1897, Gleichungen (1) und (2).

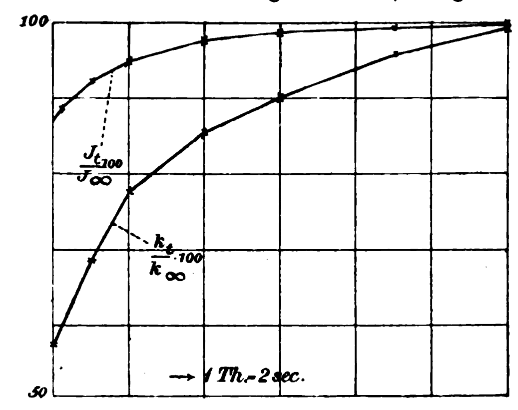
$$(13)\quad \begin{cases} Q = \dfrac{2\pi\sqrt{1-\varepsilon^2}\,.\,\eta^3\,.\,\sin 2\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\eta^2}}, \\ \cos 2\varphi = \dfrac{1}{\varepsilon^3\eta^3}\{-\varepsilon\eta + \sqrt{1-\varepsilon^2\eta^2}.\arcsin\varepsilon\eta\}, \\ \varepsilon^2 = \dfrac{a^2-c^2}{a^2}, \\ \eta = \dfrac{a}{r}. \end{cases}$$

a ist der Halbmesser, c die halbe Dicke der Scheibe.

Weiter $J = \varkappa(H - NJ)$ oder, wenn für H/J nach (11) und (12) Q/α gesetzt wird,

$$(14)\qquad \varkappa = \frac{1}{\dfrac{Q}{\alpha} - N}.$$

Das durch den Versuch so gefundene $\varkappa$ ist $\varkappa_\infty$, welches sich als Mittel aus vier Beobachtungen zu 30,8 ergab.



Die folgende Schlusstabelle enthält die nach (7), (9) und (10) berechneten Werte von J_t/J_∞ und $\varkappa_t/\varkappa_\infty$.

Scheibe aus Walzeisen, zweimal ausgeglüht.
Dicke 0,062 cm. Durchmesser 4,5 cm. $\varkappa_\infty = 30,8$.[1])

t	$J_t : J_\infty$	$\varkappa_t : \varkappa_\infty$	t	$J_t : J_\infty$	$\varkappa_t : \varkappa_\infty$
0	0,872	0,567	6	0,980	0,904
1	0,918	0,683	9	0,992	0,959
2	0,947	0,775	12	0,997	0,984
4	0,968	0,854	∞	1	1

1) Dieser Wert bezieht sich auf das benutzte Feld, d. h. auf das durch Induction geschwächte Erdfeld $(H - N\,.\,J)$.

Die Figur giebt J_t und $\varkappa_t$ in Procenten von J_∞ und $\varkappa_\infty$
s Function der Zeit.

Eine empirische Formel für den zeitlichen Verlauf von
und $\varkappa_t$ erscheint wertlos, solange nicht die Untersuchung
uf Scheiben von verschiedener Dicke und Natur ausgedehnt
·; doch dürfte die Brauchbarkeit der Methode durch das
orstehende erwiesen sein.

Hrn. Prof. Warburg danke ich für die Anregung zu
eser Untersuchung.

Berlin, Physikal. Institut.

(Eingegangen 18. November 1899.)

13. *Zur Kenntnis des thermomagnetischen Transversaleffectes im Wismut;*
von E. Yamaguchi.

§ 1. Eine Wismutplatte *ABCD* (Fig. 1) werde von einem Wärmestrom in der Richtung des starken Pfeiles durchsetzt.

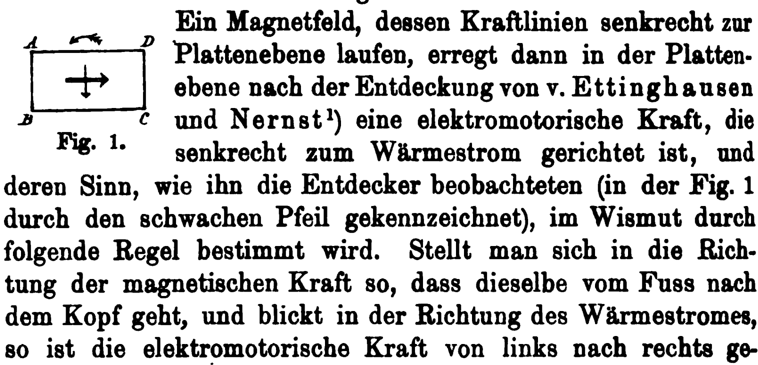


Fig. 1.

Ein Magnetfeld, dessen Kraftlinien senkrecht zur Plattenebene laufen, erregt dann in der Plattenebene nach der Entdeckung von v. Ettinghausen und Nernst[1]) eine elektromotorische Kraft, die senkrecht zum Wärmestrom gerichtet ist, und deren Sinn, wie ihn die Entdecker beobachteten (in der Fig. 1 durch den schwachen Pfeil gekennzeichnet), im Wismut durch folgende Regel bestimmt wird. Stellt man sich in die Richtung der magnetischen Kraft so, dass dieselbe vom Fuss nach dem Kopf geht, und blickt in der Richtung des Wärmestromes, so ist die elektromotorische Kraft von links nach rechts gerichtet (die Richtung der dem Feld entsprechenden Solenoidströme ist in der Fig. 1 durch den gefiederten Pfeil gekennzeichnet). Eine elektromotorische Kraft von dieser Richtung soll im Folgenden stets positiv gerechnet werden.

Die geschilderte elektromotorische Kraft wird von v. Ettinghausen und Nernst als thermomagnetischer Transversaleffect bezeichnet. Die elektromotorische Kraft q zwischen zwei Punkten, welche auf einer zum Wärmestrom senkrechten Linie im Abstand β liegen, ist nach Nernst[2]) annähernd

$$q = -\beta \frac{\partial t}{\partial x} \mathfrak{H} \cdot Q_t \,.$$

t ist die Temperatur, die positive x-Axe ist in die Richtung des Wärmestromes gelegt. $\mathfrak{H}$ ist die Feldstärke, Q_t eine von

---

1) A. v. Ettinghausen u. W. Nernst, Wied. Ann. **29**. p. 343. 1886.
2) W. Nernst, Wied. Ann. **31**. p. 760. 1887.

›r Temperatur abhängige Constante. Doch fand schon Nernst von $\mathfrak{H}$ nicht ganz unabhängig, und Hr. v. Everdingen[1]), m man wertvolle Untersuchungen auf diesem Gebiet ver- ›nkt, fand für kleine Feldstärken bei gewissen Temperaturen gar Q_t negativ. Wir wollen daher $\mathfrak{H}.Q_t = m$ und

$$q = -\beta \frac{\partial t}{\partial x} \cdot m$$

zen, wo m von $\mathfrak{H}$ und t abhängt, aber nach Nernst von $/\partial x$ jedenfalls in erster Annäherung unabhängig ist. Hr. oyd hat im hiesigen Institut einige Versuche über den ›rmomagnetischen Transversaleffect gemacht. Diese Ver- ›he schienen ihm eine angenäherte Proportionalität der össe m mit der procentischen Widerstandsvermehrung, welche s Wismut im Magnetfeld erfährt, anzudeuten. Hierdurch ırde er veranlasst, den Effect auch bei tiefen Temperaturen ter Anwendung von Kohlensäureschnee und flüssiger Luft untersuchen; und in der That zeigte es sich, dass, so wie › Widerstandszunahme im Magnetfeld, so auch die Grösse m t abnehmender Temperatur erheblich zunahm. Dieser Sinn r Temperaturvariation von m wurde bereits von Nernst obachtet. Auf Veranlassung von Hrn. Warburg habe ich ›se Versuche fortgesetzt und erlaube mir, im Folgenden rüber zu berichten.

§ 2. Zu den Versuchen brauchte ich den grossen Elektro- ıgneten der Berliner Akademie, dessen Polflächen von 5 qcm ›erfläche in einem Abstand von 1,7 cm gebraucht wurden. e Feldstärke maass ich mit Hülfe einer geaichten Wismut- irale von Hartmann und Braun, an *der* Stelle, an welcher i den Versuchen die Wismutplatten sich befanden. Diese ırden aus einer Lösung von Wismutnitrat nach den Lenard'- ıen Vorschriften[2]) auf Platinblech elektrolytisch niederge- ılagen. Ich verwandte drei derartige Platten I, II, III. und II rührten von Hrn. Lloyd her, III wurde von mir bst aus einer Lösung, welche 8 g Salz auf 100 ccm Wasser thielt, in 80 Stunden niedergeschlagen. Als Anode diente

1) A. v. Everdingen, Communications from the Phys. Lab. of iv. of Leyden, Nr. 42, 1898.

2) Ph. Lenard, Wied. Ann. 39. p. 638. 1890.

eine sehr reine Wismutstange von **Kahlbaum.** Hierunter folgen die Dimensionen der Platte in Millimetern.

	Länge	Breite	Dicke
I	50	28	0,65
II	57	27	0,7
III	62	26	0,8—0,9

§ 3. Zunächst untersuchte ich die Widerstandsvermehrung, welche das Magnetfeld in diesen Platten bei Zimmertemperatur hervorrief. Zu dem Ende wurden an die Längsseiten der Platten Kupferdrähte gelötet, diese in den Kreis eines Stromes von 0,2—0,9 Ampère eingeschaltet, und der Potentialunterschied zwischen zwei Punkten auf der Verbindungslinie der Kupferdrahtlötstellen durch Wismutsonden (§ 4) nach der Compensationsmethode bei verschiedenen Feldstärken gemessen. Dieser ist bei constanter Stromstärke dem Widerstand der Platte zwischen den Sonden proportional. Die Resultate sind hierunter verzeichnet.

$$\left(\frac{\varDelta W}{W} = \frac{\text{Widerstandsvermehrung im Feld}}{\text{Widerstand im Nullfeld}}\right).$$

Platte I.

Reihe *a*	$\mathfrak{H}$	1400	2950	4800	6300	7350	8770			
	$\frac{\varDelta W}{W}$	0,006	0,044	0,093	0,127	0,163	0,207			
Reihe *b* $t = 18°$	$\mathfrak{H}$	1100	2930	3650	4150	5100	6050	6900	7400	8250
	$\frac{\varDelta W}{W}$	0,006	0,040	0,061	0,081	0,099	0,121	0,143	0,158	0,180

Platte II.

Reihe *a* $t = 20°$	$\mathfrak{H}$	1100	2400	3950	5900	8170
	$\frac{\varDelta W}{W}$	0,011	0,029	0,058	0,112	0,171
Reihe *b* $t = 20°$	$\mathfrak{H}$	1200	2400	4100	6230	8630
	$\frac{\varDelta W}{W}$	0,009	0,026	0,065	0,126	0,198

Platte III.

$t = 20{,}8°$	$\mathfrak{H}$	1420	2730	4280	6250	8800
	$\frac{\varDelta W}{W}$	0,028	0,085	0,175	0,313	0,457

In Fig. 2 sind diese Resultate graphisch dargestellt. Die procentische Widerstandsvermehrung durch das Feld ist für Platte III viel grösser, als für Platte I und II, für diese beiden nicht sehr verschieden. Ich verzeichne hierunter die von verschiedenen Beobachtern gefundenen Werte von $\Delta W/W$ für die Feldstärke $\mathfrak{H} = 7000$ C.G.S.

Beobachter:		$\frac{\Delta W}{W}$
Yamaguchi, Platte I und II	$t = 18-20^0$	0,15
Lloyd, Platte I und II	$t = 17,5^0$	0,159
v. Everdingen[1])	$t = 20^0$	0,175
Fleming und Dewar[2])	$t = 19^0$	0,19
v. Ettinghausen u. Nernst[3])		0,25
Henderson[4])	$t = 18^0$	0,295
Yamaguchi, Platte III	$t = 20,8^0$	0,355

§ 4. Zur Bestimmuug von m muss für die Querlinie, in welcher q bestimmt wird, auch das Temperaturgefälle und, sofern m von der Temperatur abhängt, auch diese bestimmt werden. Zu diesem Zweck wurden auf die Längsmittellinie der Platte die Lötstellen von fünf geaichten Thermoelementen Eisen-Constantan in ungefähr gleichem Abstand angelötet. Die von den Thermoelementen angezeigten Temperaturen t wurden als Ordinaten, die Entfernungen λ der Lötstellen von dem einen Längsende der Platte als Abscissen aufgetragen und so Temperatur und Temperaturgefälle graphisch bestimmt, ebenso wie es v. Everdingen gemacht hat. m berechnete

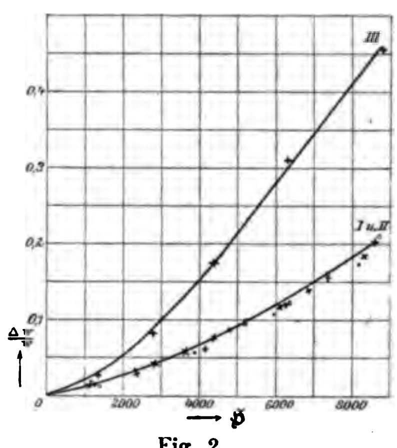


Fig. 2.

1) A. v. Everdingen, Communications from the Phys. Lab. of Univ. of Leyden, Nr. 48. 1899.

2) J. A. Fleming u. J. Dewar, Proc. Roy. Soc. **60.** p. 425. 1896.

3) A. v. Ettinghausen u. W. Nernst, Wied. Ann. **33.** p. 474. 1888.

4) J. B. Henderson, Wied. Ann. **53.** p. 912. 1894.

ich, wie frühere Beobachter, unter der Annahme, dass t nur von z abhängt, eine dem Betrage nach schwer zu schätzende Ungenauigkeit. Zur Bestimmung von q wurde die Potentialdifferenz V zwischen zwei Sonden, welche an zwei Punkte der betreffenden Querlinie im Abstand β angelegt waren, nach der Compensationsmethode gemessen. Da die Sonden nicht genau an eine Isothermallinie angelegt werden konnten, so bestand stets, auch im Nullfeld, eine thermoelektrische Potentialdifferenz zwischen ihnen. Ich suchte diese dadurch zu verkleinern, dass ich als Sonden zwei Wismutstäbchen von 8 cm Länge anwandte, welche aus demselben Bade, aus welchem die Platte stammte, elektrolytisch niedergeschlagen wurden. Einerseits endigten sie in Knöpfchen, welche an der Platte anlagen, andererseits waren sie an Kupferdrähte angelötet, die Lötstellen befanden sich in einem Petroleumbad. Die Knöpfchen wurden durch Gummibänder gegen die Platte gedrückt. Doch erfüllte die Vorrichtung ihren Zweck nicht in befriedigender Weise, da stets eine erhebliche Thermokraft übrig blieb. Die beobachtete Potentialdifferenz V enthielt also ausser der gesuchten thermomagnetischen Kraft q zunächst noch die thermoelektrische Kraft T zwischen den Sonden. Beide Kräfte hängen von der Stärke des Feldes ab, aber während q mit der Feldrichtung das Zeichen wechselt, ist T von ihr unabhängig. Doch enthielt V noch eine andere elektromotorische Kraft, welche mit der Feldrichtung das Zeichen wechselt. Leduc[1]) hat gezeigt, dass die Isothermallinien im Magnetfeld gedreht werden und zwar im Wismut entgegen der Richtung der dem Feld entsprechenden Solenoidströme. Also auch wenn die Sonden im Nullfeld auf einer Isothermallinie liegen, findet dies im Feld nicht mehr statt, sodass in diesem eine thermoelektrische Kraft entsteht, deren Zeichen von der Natur der Sonden abhängt und welche sich zu q algebraisch addirt. Bezeichnet man demnach durch U die Summe der mit der Feldrichtung das Zeichen wechselnden Kräfte, so ist für die eine Feldrichtung $V = U + T$, für die andere $V = U - T$, indem das Zeichen von U nach § 1 bestimmt ist. Das Mittel beider V-Werte ist U. Obgleich ich besondere Versuche über die Rotation der Isothermallinien

1) A. Leduc, Compt. rend. **104.** p. 1784. 1887.

gestellt habe, ist es doch nicht möglich, den hiervon her-
hrenden Teil von U abzusondern, da die Thermokraft
ischen den Sonden und der Platte nicht bekannt ist. Es
ibt nichts übrig, als vorläufig $U = q$ zu setzen, also die
tation der Isothermallinien zu vernachlässigen.

§ 5. Die umfangreichsten Versuche habe ich mit Platte III
macht. Diese Platte war an eine Kupferplatte angelötet,
lche den Boden eines cylindrischen, oben offenen, seitlich
t Filz umhüllten Metallgefässes von 3,7 cm Durchmesser,
5 cm Länge bildete. In dem Gefäss befand sich flüssige
ıft, Kohlensäureschnee mit Alkohol, Eis, oder Wasser, welches
rch Einleiten von Dampf im Sieden erhalten wurde. Bei
sen Versuchen wurde die durch das Feld hervorgebrachte
iderstandsvermehrung an der wärmedurchströmten Platte
ch § 3 gemessen. Je nachdem der zur Widerstandsmessung
mende Strom q gleich- oder entgegengerichtet ist, hat man

$$V_1 = q + T + e_1,$$
$$V_2 = q + T - e_2,$$

ı e gleich Stromstärke mal Widerstand und e_1 und e_2, wohl
gen des Halleffectes, gewöhnlich um einige Procent ver-
hieden sind. Es ist

$$\frac{V_1 - V_2}{2} = \frac{e_1 + e_2}{2} = e, \quad \frac{V_1 + V_2}{2} = q + T.$$

dem man die Feldrichtung umkehrt, findet man auch $q - T$,
thin q und T, welche mit den direct, ohne Strom gemessenen
erten stets gut übereinstimmten.

In den folgenden die Versuchsergebnisse enthaltenden
ıbellen bedeutet λ die Entfernung von dem Boden des Ge-
sses, an welchen die Wismutplatte angelötet war. $\mathfrak{H}$ ist immer
e Feldstärke im C.G.S.-System, die elektromotorischen Kräfte
ıd in Mikrovolt angegeben. Es sind nicht q und T, sondern

$$q_1 = \frac{q}{\beta}, \quad T_1 = \frac{T}{\beta}$$

rzeichnet. T_1' bezieht sich auf das Nullfeld. Es ist also

$$m = \frac{q_1}{-\frac{\partial t}{\partial z}} = \frac{q_1}{\pm\frac{\partial t}{\partial \lambda}}.$$

Am Schluss jeder Nummer sind die zusammengehörigen
erte von t und λ (in Centimetern) verzeichnet, aus welchen

t und $\partial t / \partial \lambda$ an der Beobachtungsstelle nach § 4 abgeleite wurden. Diese Bestimmungen wurden jedesmal vor (a) un nach (b) einer Versuchsreihe gemacht und das Mittel aus beide Bestimmungen der Berechnung von m zu Grunde gelegt. β wa in Nr. 2 gleich 1,95 cm, sonst immer 1,85 cm. Die zeitlich Reihenfolge der Versuchsreihen ist Nr. 2, 1, 3 und 4.

Nr. 1. Flüssige Luft im Gefäss.

An der Beobachtungsstelle $\lambda = 0,9$ war $t = -119^{\circ}$, $\frac{\partial t}{\partial \lambda} = 48,5 \frac{\text{centig.}}{\text{cm}}$

$\mathfrak{H}$	$\frac{\Delta W}{W}$	T_1	T_1'	q_1	m	$m : \frac{\Delta W}{W}$
2650	0,90	− 196	− 225	1224	25	28
4120	1,39	− 246	− 225	1856	38	27
6120	2,21	− 181	− 218	2659	54,5	24,5
	—	− 165	− 280	2615		
8650	3,38	− 137	− 218	3517	72	24
	3,17	− 240	− 170	3480		
	2,57	− 143	− 243	3452		

	λ	0	0,5	1,5	2,5	3,5 cm
a	t	− 170°	− 142°	—	− 55°	—
b	t	− 169	− 135	—	− 52	− 25

$$\text{für } \lambda = 0,9 \text{ aus } a: \quad t = -122 \quad \frac{\partial t}{\partial \lambda} = 50$$

$$\text{für } \lambda = 0,9 \text{ aus } b: \quad t = -116 \quad \frac{\partial t}{\partial \lambda} = 47.$$

Nr. 2. Mischung aus fester Kohlensäure und Alkohol im Gefäss.

An der Beobachtungsstelle $\lambda = 0,9$ war $t = -30,5^{\circ}$, $\frac{\partial t}{\partial \lambda} = 22 \frac{\text{centig.}}{\text{cm}}$

$\mathfrak{H}$	$\frac{\Delta W}{W}$	T_1	T_1'	q_1	m	$m : \frac{\Delta W}{W}$
			− 86			
2650	0,22	− 111		156	7	32
			− 88			
4120	0,39	− 139		304	14	35
			− 90			
6120	0,64	− 139		496	23	35
			− 101			
8650	0,92	− 147		680	31	34
			− 113			

	λ	0	0,5	1,5	2,5	für $\lambda = 0,9$	
a	t	− 66	− 42	− 20	− 4,1	− 32	$\frac{\partial t}{\partial \lambda} = 21$
b	t	− 65	− 40	− 17	− 0,9	− 29	$\frac{\partial t}{\partial \lambda} = 23$

Nr. 3. Eis im Gefäss.

An der Beobachtungsstelle $\lambda = 0{,}9$ war $t = 10^0$, $\dfrac{\partial t}{\partial \lambda} = 5 \dfrac{\text{centig.}}{\text{cm}}$

$\mathfrak{H}$	$\dfrac{\Delta W}{W}$	T_1	T_1'	q_1	m	$m:\dfrac{\Delta W}{W}$
			— 16			
1293	0,047	— 16		2,3	0,46	9,8
			— 16			
2650	0,123	— 17		11,6	2,32	19
			—			
4120	0,170	— 16		27,5	5,50	32
			— 12			
6120	0,337	— 19		52,7	10,6	31
			—			
8650	0,494	— 23		75,3	15,1	31
			— 10			

λ	0	0,5	1,5	2,5	3,5
t	1,9°	7,5°	12,8°	16,6°	18,1°

Nr. 4. Siedendes Wasser im Gefäss.

An der Beobachtungsstelle $\lambda = 0{,}9$ war $t = 62^0$, $-\dfrac{\partial t}{\partial \lambda} = 19 \dfrac{\text{centig.}}{\text{cm}}$

$\mathfrak{H}$	$\dfrac{\Delta W}{W}$	T_1	T_1'	q_1	m	$m:\dfrac{\Delta W}{W}$
			— 64			
1293	0,010	— 64		— 5,6	— 0,30	— 29
			— 63			
2650	0,040	— 56		— 4,8	— 0,25	— 6
			— 56			
4120	0,096	— 71		+ 12,3	+ 0,65	+ 6,7
			— 56			
6120	0,103	— 65		+ 53,6	+ 2,82	+ 27
			— 57			

λ	0	0,5	1,5	2,5	3,5
t	93°	71°	52°	41°	34°

In Fig. 3 (p. 222) sind diese Resultate graphisch dargestellt.

§ 6. Zu diesen Ergebnissen können folgende Bemerkungen gemacht werden.

1. Unter Nr. 1 sind für $\mathfrak{H} = 8650$ drei Bestimmungen von q_1 gemacht worden, bei welchen die Thermokraft T_1 ziemlich veränderlich war. Da gleichwohl die sich ergebenden Werte von q_1 nur unbeträchtlich voneinander abweichen, so scheint die Thermokraft hinreichend eliminirt zu sein.

2. Es ist auf den hohen Betrag aufmerksam zu machen, bis zu welchem bei tiefen Temperaturen der thermomagnetische Transversaleffect ansteigt. So betrug er nach Nr. 1 bei $t = -119^0$ $\mathfrak{H} = 8650$, $\partial t / \partial \lambda = 48{,}5$ 0,0065 Volt; nach Nr. 4 bei $t = +62^0$ $\mathfrak{H} = 6120$, $-\partial t / \partial \lambda = 19$ nur 0,000099 Volt.

3. Bei höherer Temperatur ($t = +62^0$, Nr. 4) und in schwachen Feldern ergab die Platte III, ebenso wie die von v. Everdingen benutzte Platte, negative Werte von m. Ich habe aus den Beobachtungen von v. Everdingen zur Vergleichung mit den meinigen die Grösse m berechnet. Er beobachtete an drei Punkten C, A, B seiner Platte, es waren die Temperaturen bei $C + 28^0$, bei $A + 34^0$, bei $B + 50^0$. Er giebt die von mir durch q bezeichnete Grösse in absolutem Maasse. Daraus findet man m in Mikrovolt, indem man die Werte für C, A, B bez. durch

$$8 \times 1{,}15 \times 100,$$
$$14 \times 1{,}15 \times 100,$$
$$28 \times 1{,}15 \times 100$$

dividirt.[1]) So finde ich:

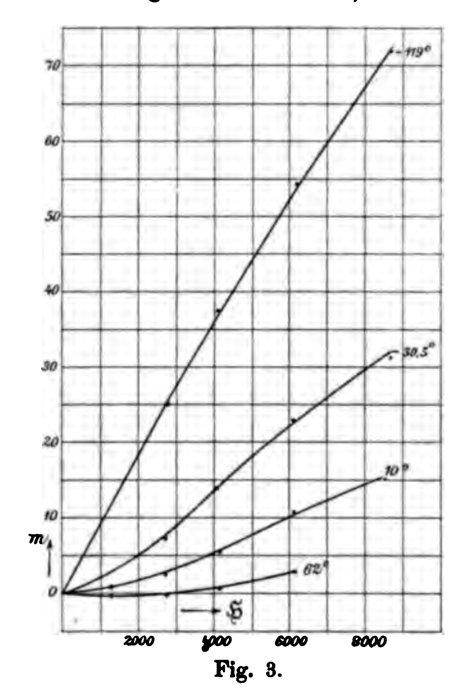


Fig. 3.

$\mathfrak{H}$	m_C, $t = 28^0$	m_A, $t = 34^0$	m_B, $t = 50^0$
1350	− 0,98	− 1,02	− 1,05
2730	− 0,90	− 0,81	− 1,59
4800	+ 0,76	+ 0,84	− 1,31
6100	+ 2,86	+ 2,78	− 0,37

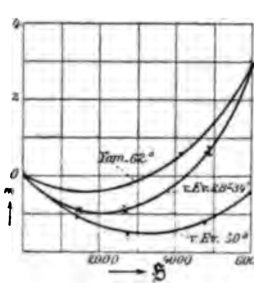


Fig. 4.

Diese Resultate sind Fig. 4 zugleich mit meinen Beobachtungen Nr. 4 bei $t = 62^0$ graphisch dargestellt. Wie man sieht, ist die Anomalie bei mir für 62^0 viel geringer, als die bei v. Everdingen für 50^0. Die Beschaffenheit der Platte scheint hier eine grosse Rolle zu spielen. In der That fand ich bei der Platte II für $t = 45^0$ gar keinen negativen Wert von m, wie folgende Tabelle zeigt.

1) Vgl. v. Everdingen, Comm. Phys. Lab. Leyden Nr. 42. 1898.

Platte II. $t = 45^0$, $\frac{\partial t}{\partial \lambda} = -17{,}3$.

$\mathfrak{H}$	$\frac{\Delta W}{W}$	m	$m : \frac{\Delta W}{W}$
2830	0,024	1,2	48
4430	0,045	2,3	51
6650	0,092	4,4	48
9200	0,126	6,6	52

4. Die folgende Tabelle enthält eine Zusammenstellung der Werte von $m : \Delta W / W$ für Platte III bei den verschiedenen benutzten Feldstärken und Temperaturen.

$\mathfrak{H}$	$m : \frac{\Delta W}{W}$			
	-119^0	$-30{,}5^0$	$+10^0$	$+62^0$
1293	—	—	9,8	-29
2650	28	32	19	-6
4120	27	35	32	$+6{,}7$
6120	24,5	35	31	$+27$
8650	24	34	31	—

Bei -119^0 und $-30{,}5^0$ zeigt sich in roher Annäherung jenes Verhältnis von der Feldstärke unabhängig, d. h. m mit $\Delta W / W$ proportional, was indessen nicht viel heissen will, da m auch mit $\mathfrak{H}$ in nicht viel geringerer Annäherung proportional ist und noch viele andere vom Felde abhängige Phänomene dieselbe Eigenschaft haben. Wenn man aber erwägt, dass m bei -119^0 2—3 mal so gross als bei $-30{,}5^0$ ist (Nr. 1 u. 2), so fällt auf, wie nahe die Werte $m : \Delta W / W$ für die beiden Temperaturen aneinander heranrücken. Es gilt dies auch für die Werte bei $+10^0$ und Feldstärken von 4120 ab aufwärts, und es sind die m-Werte hier noch nicht halb so gross, als bei $-30{,}5^0$. Hierbei ist noch folgendes zu bemerken. m ist der auf die Einheit der Länge und des Temperaturgefälles bezogene thermomagnetische Transversaleffect. Enger als mit dem Temperaturgefälle dürfte dieser mit dem Wärmefluss, dem k-fachen des Temperaturgefälles zusammenhängen, wo k das Wärmeleitungsvermögen bedeutet. Daher scheint es rationeller, den auf die Einheit der Länge und des Wärmeflusses bezogenen Effect, d. h. die Grösse m / k bez. $m / k : \Delta W / W$ zu be-

trachten. Leider reichen hierzu unsere Kenntnisse vom Wärmeleitungsvermögen des Wismuts nicht hin. Nach Lorenz[1]) ist $(k_{100} / k_0) = 0{,}93$, nach Jäger und Diesselhorst[2]) $(k_{100} / k_{18}) = 0{,}83$. k nimmt also bei Wismut mit steigender Temperatur ab. Andererseits ist k im Magnetfeld, dessen Kraftlinien den Wärmestrom rechtwinklig kreuzen, kleiner als im Nullfeld. v. Everdingen[3]) findet k für $\mathfrak{H} = 0$ 1,058 mal so gross, als für $\mathfrak{H} = 6000$ bei 20—40°. Der Einfluss des Magnetfeldes steigt mit sinkender Temperatur; man weiss nicht, wie es sich hier mit dem Wärmeleitungsvermögen verhält. Jedenfalls scheint das unter dieser Rubrik Gesagte einen engen Zusammenhang zwischen thermomagnetischem Transversaleffect und magnetischer Widerstandszunahme im Wismut anzudeuten.

1) L. Lorenz, Wied. Ann. **13.** p. 422. 1881.

2) W. Jäger u. H. Diesselhorst, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin Jahrg. 1899. p. 719.

3) E. v. Everdingen, Communications from the Phys. Lab. of Univ. of Leyden Nr. 48. p. 16. 1899.

(Eingegangen 12. October 1899.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

00. • № 2.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 1.

Die Druckkräfte in der Hydrodynamik und die Hertz'sche Mechanik; von R. Reiff.

Das Charakteristische der Hertz'schen Mechanik liegt in : Idee, die Kräfte, welche auf ein System wirken, zu ersetzen rch die Koppelung dieses Systemes mit einem zweiten, so ar, dass die Arbeit, welche das erste System unter der ıwirkung der Kräfte abgiebt, gleich dem Zuwachs der kine- :hen Energie des zweiten Systemes ist. Der Zweck der genden Untersuchung ist nun der, zu zeigen, dass wir bei .em stetigen, veränderlichen System auf Schwierigkeiten ssen, wenn wir die Hertz'sche Idee durchführen wollen.

Der einfachste Fall des stetigen Systemes ist die voll- mmene Flüssigkeit und die Differentialgleichungen einer chen vollkommenen Flüssigkeit lauten bekanntlich

$$\left\{\begin{aligned} \varrho \frac{d u_1}{d t}\,^{1)} &= -\frac{\partial p}{\partial x_1}, \\ \varrho \frac{d u_2}{d t} &= -\frac{\partial p}{\partial x_2}, \\ \varrho \frac{d u_3}{d t} &= -\frac{\partial p}{\partial x_3}, \end{aligned}\right.$$

ϱ die Dichte, u_i die Geschwindigkeitscomponente nach der :htwinkligen Coordinate x_i, und p der im Innern herrschende uck ist. Dabei setzen wir also voraus, dass keine äusseren äfte wirken. Von diesen wollen wir im Folgenden durchaus sehen.

Es müsste nun also der Druck durch die Koppelung des stemes mit einem zweiten System darzustellen sein, da dieser

1) Dabei bedeutet

$$\frac{d}{d t} = \frac{\partial}{\partial t} + \Sigma u_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}{}_{i = 1, 2, 3}\,.$$

Druck nichts anderes ist als die potentiale Energie der Flüssigkeit. Es fragt sich daher, durch welche Bedingung ist der Druck in die Flüssigkeitsbewegung hereingebracht? Nun giebt es aber keine andere Bedingung, welche eine ideale Flüssigkeit erfüllen muss, als die *Bedingung der Erhaltung der Masse* und es liegt nahe, diese Bedingung der Constanz der Masse daraufhin zu untersuchen, welche Kräfte durch sie hervorgerufen werden, und ob nicht gerade diese Kräfte den hydrodynamischen Druck darstellen. Das soll nun in der That durch die folgenden Entwickelungen gezeigt werden.

Zu dem Zwecke geht man am besten aus von der d'Alembert'schen Form der dynamischen Grundgleichung. Sind $x_1\, x_2\, x_3$ wie oben die rechtwinkligen Coordinaten eines Raumpunktes. $\delta\xi_1\ \delta\xi_2\ \delta\xi_3$ virtuelle Verschiebungen, welche mit den Bedingungen des Systemes im Einklang sind, so lautet die d'Alembert'sche Gleichung für das als stetig vorausgesetzte System, wenn keine äusseren Kräfte wirksam sind:

$$\int\Big(\sum_{i=1,2,3}\varrho\,\frac{d u_i}{d t}\,\delta\xi_i\Big)\,d\tau = 0. \tag{2}$$

Die Integration ist dabei zu erstrecken über alle Volumenelemente $d\tau$ des vom System erfüllten Raumes.

Die $\delta\xi_i$ müssen die Bedingung erfüllen, dass die Variation des Massenelementes gleich Null ist, d. h. also, dass

$$\delta(\varrho\, d\tau) = 0. \tag{3}$$

Nun ist aber

$$\delta\varrho = \frac{\partial\varrho}{\partial x_1}\,\delta\xi_1 + \frac{\partial\varrho}{\partial x_2}\,\delta\xi_2 + \frac{\partial\varrho}{\partial x_3}\,\delta\xi_3,$$

$$\frac{\partial\, d\tau}{d\tau} = \frac{\partial\,\delta\xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\,\delta\xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\,\delta\xi_3}{\partial x_3},$$

und daher

$$\frac{\delta(\varrho\, d\tau)}{d\tau} = \frac{\partial\,\varrho\,\delta\xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\,\varrho\,\delta\xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\,\varrho\,\delta\xi_3}{\partial x_3} = 0. \tag{3a}$$

Nach einem bekannten Satze der Variationsrechnung kann man aus (1) und (3) eine Gleichung herleiten, in der die δx_i willkürlich sind, wenn man die mit einer Function λ multiplicirte Gleichung (3) über den Raum des Systemes integrirt und das Integral

$$\int \lambda \sum_{1,2,3} \frac{\partial \varrho \, \delta \xi_i}{\partial x_i} d\tau = 0,$$

von (1) abzieht, sodass man erhält

$$(4) \qquad \int \left(\varrho \sum \frac{d u_i}{d t} \delta \xi_i - \lambda \sum \frac{\partial \varrho \, \delta \xi_i}{\partial x_i} \right) d\tau = 0.$$

Durch partielle Integration kann man die Gleichung (4) nun umformen in

$$(5) \qquad \int \varrho \left(\sum \frac{d u_i}{d t} \delta \xi_i + \sum \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \delta \xi_i \right) d\tau - \int \lambda \varrho \, \delta n \, d w = 0,$$

wo das zweite Integral über die freie Oberfläche des Systemes zu nehmen ist, und δn die Projection der Variation eines Oberflächenpunktes auf die nach innen positiv genommene Normale ist.

Da die $\delta \xi_i$ und ebenso δn hier vollständig willkürlich sind, so folgen für das innere des Systemes die Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{cases} \varrho \dfrac{d u_1}{d t} = - \varrho \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x_1}, \\ \varrho \dfrac{d u_2}{d t} = - \varrho \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial x_2}, \\ \varrho \dfrac{d u_3}{d t} = - \varrho \dfrac{\partial \lambda_3}{\partial x_3}, \end{cases}$$

und an der Oberfläche $\qquad \lambda = 0,$

hierzu kommt noch die Continuitätsgleichung

$$(7) \qquad \frac{d \varrho}{d t} + \varrho \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

Die Grössen $- \varrho \lambda_i / \partial x_i$ sind also die inneren Kräfte, welche von der Bedingung der Constanz der Massen herrühren. In einer vollkommenen, nicht reibenden Flüssigkeit, bei der durch die Bewegung keine Energie zerstreut wird, müssen diese Kräfte conservative Kräfte sein, d. h. sie müssen ein Potential haben. Nennen wir dieses Potential p, so muss also sein

$$(8) \qquad \begin{cases} - \varrho \dfrac{\partial \lambda}{\partial x_1} = - \dfrac{\partial p}{\partial x_1}, \\ - \varrho \dfrac{\partial \lambda}{\partial x_2} = - \dfrac{\partial p}{\partial x_2}, \\ - \varrho \dfrac{\partial \lambda}{\partial x_3} = - \dfrac{\partial p}{\partial x_3}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass

$$\varrho \sum \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} d x_i = \sum \frac{\partial p}{\partial x_i} d x_i,$$

oder

(9) $$\varrho \, d \lambda = d p .$$

Dadurch erhalten wir aber aus (8)

(10) $$\varrho \frac{d u_i}{d t} = - \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

also ganz genau die Gleichungen (1).

Nach Gleichung (9) ist dp / ϱ ein vollständiges Differential, und ϱ ist eine reine Function von p. Wählt man in der Gleichung (9) nach der Integration die Integrationsconstante so, dass für

$$\lambda = 0, \quad p = 0$$

ist, so ergiebt sich als Bedingung für die freie Oberfläche

$$\lambda = 0$$

und daher auch

(11) $$p = 0 .$$

Diese Gleichung (10) zusammen mit der Grenzbedingung (11) für die freie Oberfläche, wenn keine äusseren Kräfte wirken, giebt aber die gewöhnlichen Differentialgleichungen in Bedingungen der Hydrodynamik, wenn wir unsere Function $\int \varrho \, d \lambda = \int d p$ als den hydrodynamischen Druck auffassen.

Nach dieser Darstellung erscheint also der hydrodynamische Druck als das Potential der Kräfte, welche von der Bedingung der Erhaltung der Masse herrühren.

Diese Bedingung der Erhaltung der Masse erscheint uns eine so selbstverständliche, so sehr als eine der ersten und am besten gesicherten Grundlagen der Dynamik, dass wir die Bedingung (3), welche eine infinitesimale Koppelung des Systemes in sich selbst darstellt, nicht wohl durch eine andere Gleichung ersetzen können, welche das System mit einem zweiten verborgenen Systeme koppelt.

Die durch p dargestellte potentielle Energie lässt sich aber ohne eine Koppelungsgleichung nicht darstellen als die kinetische Energie eines zweiten Systemes. Es würde also bei strenger Durchführung der Hertz'schen Mechanik notwendig sein, die Bedingungsgleichung (3) bez. (3a) fallen zu

lassen. Es widerstrebt uns aber doch auch bei virtuellen Verrückungen, die Bedingung (3) nicht als notwendig anzusehen. Es bleibt aber die Möglichkeit noch offen, unstetige oder nicht differentiirbare virtuelle Verrückungen zuzulassen, und damit dann wohl die Bedingung der Constanz der Masse aufrecht zu erhalten, aber nicht die dieselbe unter der Voraussetzung der Differentiirbarkeit der Variationen darstellende Gleichung (3a). Man wird also zu der Annahme geführt, dass neben den offenen Bewegungen eines Systemes noch verborgene Bewegungen desselben Systemes hergehen können bez. müssen. Diese Annahme lässt aber Hertz nicht zu. Erweitert man in dieser Weise die Hertz'sche Mechanik, so kommt man von ihr zu Betrachtungen, welche denen der kinetischen Gastheorie analog sind bez. zu den von v. Helmholtz in seinen monocyklischen Systemen behandelten Bewegungen.

Wenn man zu den Gleichungen der reibenden Flüssigkeiten übergehen will, würde es nahe liegen, statt der infinitesimalen Koppelungsgleichung (3) zwischen den Variationen $\delta\xi_i$ eine allgemeinere anzunehmen. Da jedoch bei diesen Bewegungen Energie zerstreut wird, so müsste man streng genommen die zerstreute Energie wieder als kinetische Energie desselben Systemes darstellen; es erscheint hier einfacher, von den Hertz'schen verborgenen Systemen Gebrauch zu machen und das gegebene System 1 mit einem zweiten Systeme zu koppeln. Diese beiden materiellen Systeme mögen denselben Raum erfüllen. Es seien ϱ und σ die Massendichtigkeiten des ersten bez. zweiten Systemes im Punkte x_1, x_2, x_3, in diesem Punkte seien die Geschwindigkeiten des ersten Systemes u_1, u_2, u_3, diejenigen des zweiten v_1, v_2, v_3, die Variationen eines Massenpunktes des ersten Systemes seien im Punkte $x_1, x_2, x_3 = \delta\xi_1, \delta\xi_2, \delta\xi_3$, für das zweite System $\delta\eta_1, \delta\eta_2, \delta\eta_3$. Bei beiden Systemen wollen wir die Bedingung der Constanz der Massen gelten lassen.

Sind beide Systeme frei und bezeichnen wir mit p und q die in ihnen herrschenden Drucke, so lassen sich die Gleichungen der Bewegung zusammenfassen in die folgende

$$(12)\quad \int\left\{\sum\left(\varrho\frac{d u_i}{d t}-\frac{\partial p}{\partial x_i}\right)\delta\xi_i+\sum\left(\sigma\frac{d v_i}{d t}-\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)\delta\eta_i\right\}d\tau=0,$$

wo $\delta\xi_i$ $\delta\eta_i$ vollständig willkürlich sind und das Integral nun anzunehmen ist über den ganzen Raum der beiden Systeme.

Zu dieser Gleichung (12) treten dann noch die Gleichungen der Continuität:

$$(13) \qquad \frac{d(\varrho\, d\tau)}{dt} = 0, \qquad \frac{d\,\sigma\, d\tau}{dt} = 0.$$

Diese beiden Systeme ergeben für die Veränderung der kinetischen Energie:

$$(14) \qquad d\left\{\frac{\varrho}{2}\, d\tau \sum u_i^2 + \frac{\sigma}{2}\, d\tau \sum v_i^2\right\} = -(dp + dq)\, dc.$$

Nun wollen wir die beiden Systeme miteinander verbinden, das kann natürlich auf die mannigfaltigste Weise geschehen. Wir nehmen als Bedingungsgleichung zwischen den Variationen der beiden Systeme eine lineare homogene Differentialgleichung an, die wir schreiben wollen:

$$(15) \qquad \sum A_{ik} \frac{\partial\, \delta \xi_i}{\partial x_k} + \sum B_{ik} \frac{\partial\, \delta \eta_i}{\partial x_k} = 0, \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{matrix}$$

wo i und k alle möglichen Werte 1, 2, 3 annehmen können. Multipliciren wir die Gleichung (15) mit einer Function μ, integriren sie über den ganzen Raum der Systeme und ziehen wir sie ab von (12), so erhalten wir, abgesehen von einem Oberflächenintegral, das für sich verschwinden muss, nach Ausführung von partiellen Integrationen für das Innere des Systemes, wenn $\mu A_{ik} = a_{ik}$, $\mu B_{ik} = b_{ik}$ gesetzt wird, die Gleichung:

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \Bigg\{ \sum_{1,2,3} \left(\varrho \frac{du_i}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_3} \right) \delta \xi_i \\ &+ \sum_{1,2,3} \left(\sigma \frac{dv_i}{dt} + \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial b_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial b_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial b_{i3}}{\partial x_3} \right) \delta \eta_i \Bigg\} d\tau = 0 \end{aligned} \right.$$

und daher als Differentialgleichungen des Systemes die folgenden 6 Gleichungen.

$$(17\text{a}) \qquad \varrho \frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1} - \frac{\partial a_{i2}}{\partial x_2} - \frac{\partial a_{i3}}{\partial x_3}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

$$(17\text{b}) \qquad \sigma \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial q}{\partial x_i} - \frac{\partial b_{i1}}{\partial x_1} - \frac{\partial b_{i2}}{\partial x_2} - \frac{\partial b_{i3}}{\partial x_3}.$$

Nun stellen wir die Bedingung, dass durch die Koppelung der beiden Systeme die Gleichung (14) der Energie keine Veränderung erleidet, dann ergiebt sich die Bedingung:

$$(18) \qquad \sum \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} u_i + \sum \frac{\partial b_{ik}}{\partial x_k} v_i = 0.$$

Die Gleichung (18) liefert die Bedingung zwischen den a_{ik} und b_{ik}. Denken wir uns nun die drei unbekannten v_i, ausgedrückt durch t und die x_i, so können wir in der Gleichung (17a) die die a_{ik} lediglich durch die u_i bez. x_i ausdrücken und wir haben als Bewegungsgleichungen des Systemes 1, wenn die (a_{ik}) die a_{ik} nach der Elimination der v_i bedeuten, die Gleichungen:

$$(19) \quad \begin{cases} \dfrac{d\varrho\, d\tau}{dt} = 0, \\ \varrho \dfrac{du_i}{dt} = -\dfrac{\partial p}{\partial x_i} - \dfrac{\partial (a_{i1})}{\partial x_1} - \dfrac{\partial (a_{i2})}{\partial x_2} - \dfrac{\partial (a_{i3})}{\partial x_3}, \end{cases}$$

in denen die Grössen des zweiten Systemes gar nicht mehr vorkommen, d. h. also, das System bewegt sich gerade so, als ob es allein vorhanden wäre und der Gleichung (19) gehorchte. Das zweite System ist eliminirt, seine Bewegungen sind bei (19) gar nicht vorhanden, es sind sogenannte „verborgene Bewegungen“.

Man erkennt unschwer in der Gleichung (19) die Gleichungen der Bewegung eines stetigen Systemes unter dem Einfluss der Druckkräfte p und (a_{ik}).

Man kann hiernach aber noch nicht aus der Gleichung (19) auf die Gleichung (17a) und (17b) zurückschliessen. Vielmehr erscheint die letzte Aufgabe als eine unbestimmte, selbst wenn die (a_{ik}) in der bekannten Form als Summe partieller Differentialquotienten der u_i nach den x_k gegeben sind.

Böblingen bei Stuttgart, 2. December 1899.

(Eingegangen 4. December 1899.)

2. *Der longitudinale Elasticitätscoefficient eines Flusseisens bei Zimmertemperatur und bei höheren Temperaturen; von Paul A. Thomas.*

(Hierzu Taf. I, Fig. 1 u. 2.)

(Auszug aus der gleichnamigen Inaugural-Dissertation[1]) des Verfassers.)

Die elastischen Eigenschaften von Eisen und Stahl sind der Gegenstand bereits zahlreicher, zum Teil sehr sorgfältiger Untersuchungen gewesen. Doch zeigen die bisher erzielten Ergebnisse eine recht wenig befriedigende Uebereinstimmung, eine Erscheinung, welche freilich keineswegs auf das Gebiet der Eisenuntersuchungen beschränkt ist, die sich vielmehr bei fast allen bisherigen Elasticitätsuntersuchungen unangenehm geltend macht. Ihre Ursache hat man vorwiegend in Fehlern der Beobachtungsmethoden gesucht und durch Verbesserung letzterer zu beseitigen sich bemüht. Doch dürfte auch der Verschiedenheit des Materials (Unterschiede in der chemischen Zusammensetzung sowie der physikalischen Vorbehandlung), und zwar ganz besonders im Falle der Eisenuntersuchungen ein grosser Antheil an den Differenzen der Ergebnisse zuzuschreiben sein.

Speciell über das elastische Verhalten des Eisens als *Function der Temperatur* hat Verf. nur von vier Autoren Untersuchungen kennen gelernt, welche sich auf Temperaturen über 100° erstrecken. Von diesen müssen die Wertheim'schen als unzuverlässig bezeichnet werden. Aber auch die Beobachtungen von G. Pisati[2]) (bis 250°) und A. Martens[3]) (bis 600°) erreichen nur einen sehr beschränkten Grad von Genauigkeit.[4])

---

1) Jena, Hermann Costenoble, 1899. 8°. 69 pp. 3 Taf.

2) G. Pisati, Beibl. 1. p. 305—308. 1877.

3) A. Martens, Mittheil. aus d. kgl. techn. Versuchsanstalten zu Berlin, 8. p. 159—214. 1890. Heft 4.

4) A. Martens hat die Messung des Elasticitätscoefficienten nur nebenbei ausgeführt. Hauptzweck seiner Arbeit war die Untersuchung der Festigkeit bei höheren Temperaturen. Bei der dadurch bedingten Art der Apparateinrichtung war eine höheren Ansprüchen in Bezug auf Genauigkeit genügende Messung der elastischen Dehnungen gar nicht möglich.

Die Arbeit von M. Cantone[1]) endlich beschäftigt sich lediglich mit der Torsionselasticität.

Häufiger ist die Elasticitätsänderung des Eisens zwischen 0 und 100° untersucht worden. Doch sind Verf. auch hier nur zwei Arbeiten über die Aenderung der *longitudinalen* Elasticität bekannt geworden, nämlich diejenigen von A. Miller[2]) und N. Katzenelsohn.[3]) Die Ergebnisse dieser beiden Arbeiten weichen ganz erheblich voneinander ab. Eine Controluntersuchung erschien schon deshalb sehr erwünscht. Dieselbe ist vom Verfasser an Stäben von 14 cm Länge, 14 mm Breite und 3 mm Dicke ausgeführt worden und hat sich auf Temperaturen bis nahe 500° erstreckt.

Untersuchungsmaterial und Apparat.

Als Untersuchungsmaterial wurde ein Siemens-Martiu-Flusseisen von 48 kg Zerreissfestigkeit gewählt, welches von der Firma Friedr. Krupp, Essen, in überaus dankenswerter Weise kostenlos in der für die Versuche erforderlichen Form geliefert worden ist. Dasselbe enthielt 99,11 Proc. Fe, 0,20 Proc. C, eine Spur Si, 0,480 Proc. Mn, 0,038 Proc. P, 0,038 Proc. S und 0,135 Proc. Cu.

Zur Ausführung der Untersuchungen stand im Physikalischen Institut der Universität Jena der Apparat zur Verfügung, welchen Hr. Geh. Hofrath Professor A. Winkelmann bei seinen Messungen für die Arbeiten „Ueber die Elasticitätscoefficienten verschieden zusammengesetzter Gläser in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur“[4]), sowie „Ueber die Aenderung des Elasticitätscoefficienten des Platins mit wachsender Temperatur“[5]) benutzt hat, und dessen Einrichtung die A. König'sche[6]) Doppelspiegelungs-Methode zu Grunde liegt. Er ist in der erstgenannten Arbeit (l. c. p. 106—111)

1) M. Cantone, Beibl. 21. p. 177—179. 1897.

2) A. Miller, Abhandl. der math.-phys. Kl. der kgl. bayr. Akad. der Wissensch. 15. p. 705—758. 1886; vgl. auch Sitzungsber. 12. p. 377 bis 462. 1882. Heft 4.

3) N. Katzenelsohn, Inaugural-Dissert. Berlin 1887.

4) A. Winkelmann, Wied. Ann. 61. p. 105—141. 1897.

5) A. Winkelmann, Wied. Ann. 63. p. 117—123. 1897.

6) A. König, Wied. Ann. 28. p. 108—110. 1886.

ausführlich beschrieben. Bei den Untersuchungen des Verfassers wurde seine Leistungsfähigkeit noch wesentlich erhöht durch Anbringung einer pneumatischen, in ihrer Geschwindigkeit regulirbaren Be- und Entlastungsvorrichtung. Diese gestattete genau diejenigen grössten Geschwindigkeiten anzuwenden, bei welchen die Ablesungen gerade noch nicht durch Massenträgheitseinwirkungen gestört wurden, wodurch es möglich ward, den fehlerbedingenden Einfluss der elastischen Nachwirkung auf ein Minimum herabzusetzen.

Fehlerdiscussion.

Bekanntlich geschieht die Berechnung des longitudinalen Elasticitätscoefficienten bei der König'schen Methode aus der Neigungsänderung φ der Enden des in der Mitte mit P belasteten Untersuchungsstabes. Bezeichnet man die Stützweite mit l, das Trägheitsmoment des Stabquerschnittes mit J und den Elasticitätscoefficienten[1]) mit e, so ist

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg}\varphi = e \cdot \frac{Pl^2}{16\,J}.$$

Andererseits ist aber bei der König'schen Anordnung

$$\text{(2a)} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{v}{4\left(D + \frac{d}{2}\right)},$$

wobei v die beobachtete Scalenverschiebung, D den Abstand zwischen Scala und entfernterem Spiegel, und d den Abstand beider Spiegel voneinander bedeutet.[2]) Durch Combination dieser beiden Gleichungen erhält man

$$e = \frac{4\,v \, . \, J}{Pl^2\left(D + \frac{d}{2}\right)}$$

---

1) Verfasser unterscheidet zwischen Elasticitäts*coefficient* und Elasticitäts*modul*. Ersterer, die durch die Spannungseinheit (kg:mm²) bewirkte Dehnung (mm:mm) bez. Verkürzung, ist gleich dem reciproken Werte des letzteren.

2) Bei Anwendung von Prismen an Stelle der Spiegel ist D als der um $\delta : n$ (Quotient aus Prismendicke und Brechungsexponent) vermehrte Abstand zwischen Scala und Hypotenusenfläche des entfernteren Prismas und d als der um $2\delta : n$ vermehrte Abstand der Hypotenusenflächen beider Prismen voneinander zu definiren.

und weiter durch Einführung des Wertes von J für rechteckigen Querschnitt die Hauptformel

$$(3)\qquad e = v \cdot \frac{b\,h^3}{3\,P\,l^3\left(D + \frac{d}{2}\right)}.$$

Die Formeln (1) und (2a) besitzen aber nur unter bestimmten, nicht vollkommen erfüllbaren Bedingungen strenge Gültigkeit. Ausserdem sind die einzusetzenden Werte von v, b, h, P, l und $D + \frac{1}{2} d$ stets als mit gewissen Fehlern behaftet anzusehen. Die dadurch im Resultate entstehende Unsicherheit wurde einer ausführlichen Prüfung unterworfen, deren Hauptergebnisse die folgenden waren:

1. Die mittleren Ablesungsfehler ($\mathfrak{F}_v$) schwankten bei den normalen Messungen mit 7 Belastungen à 10 kg in Zimmertemperatur zwischen 0,01 und 0,03 Proc. Bei höheren Temperaturen fand eine anfangs geringe, von etwa 350° an aber sehr schnelle Zunahme dieser Fehler infolge Einflusses der elastischen Nachwirkung statt.

2. Die Entstehung von grösseren Fehlern dadurch, dass die Spiegel bez. Prismen schon in der Anfangsstellung (bei unbelastetem Stabe) nicht vertical (d. h. parallel zur Scala) gerichtet sind, kann leicht verhütet werden, indem man dem Beobachtungsfernrohr eine solche Neigung ertheilt, dass am Fadenkreuz derjenige Teilstrich der Scala erscheint, welcher mit den Mitten der Spiegel bez. Prismen in gleicher Höhe liegt. Hierdurch wird eine Anfangsabweichung des dem Fernrohr zugewandten Spiegels unschädlich gemacht. Der aber durch eine Abweichung des anderen Spiegels (um η von verticaler Richtung) entstehende Fehler ist dann

$$(4\text{a})\qquad \mathfrak{F}_\eta = \frac{d \operatorname{tg}[2\varphi - 2\eta] \cdot \operatorname{tg}[-2\eta]}{2D + d}.$$

Setzt man $\varphi = 38'$ und führt für D und d die den thatsächlichen Verhältnissen bei den Untersuchungen des Verfassers entsprechenden Werte 10597 und 135 ein, so erhält man für $\eta = -1^0$ $\mathfrak{F}_\eta = 0{,}001$ Proc., also einen durchaus vernachlässigbaren Fehlerbetrag.

3. Viel erheblicher sind die Fehler, welche dadurch ent-

stehen, dass die Spiegel in der Anfangsstellung um verticale Axen derart verdreht sind, dass ihre Horizontalprojection mit dem von der Scala kommenden Strahle einen um ψ von 90^0 verschiedenen Winkel einschliesst, bez. dass die Prismen um horizontale, senkrecht auf den Hypotenusenflächen stehende Axen so verdreht sind, dass ihre brechenden Kanten um den Winkel ν von der Verticalrichtung abweichen. Unter Voraussetzung gleicher Grösse der Winkel ψ bez. ν bei *beiden* Spiegeln bez. Prismen[1]) gilt im ersteren Falle die Fehlerformel

$$(5) \qquad \mathfrak{F}_\psi = \frac{\operatorname{tg}[2\varphi . \sin^2\psi]}{\operatorname{tg} 2\varphi} = \sim \sin^2\psi,$$

im letzteren

$$(6) \qquad \mathfrak{F}_\nu = \frac{\operatorname{tg}[2\varphi(1-\cos^4\nu)]}{\operatorname{tg} 2\varphi} = \sim 1 - \cos^4\nu.$$

Hier entspricht einer Abweichung um 1^0 bereits ein Fehler von 0,031 bez. 0,065 Proc. im Resultate, und da thatsächlich in der Einstellung der Prismen Abweichungen kleiner als $^1/_2{}^0$ nicht mit Sicherheit vermieden werden konnten, musste ein Betrag $\mathfrak{F}_\nu = 0{,}02$ Proc. bei der Resultatfehlerbestimmung in Anrechnung gebracht werden.

4. Die Formel (2a) hat nur für unendlich kleine Winkel φ strenge Gültigkeit, da sie Proportionalität zwischen Winkel und zugehöriger Tangente voraussetzt. Der entstehende Fehler ist

$$(7) \qquad \mathfrak{F}_\varphi = \frac{\left(D + \frac{d}{2}\right)(5\operatorname{tg}^2\varphi - 4\operatorname{tg}^4\varphi)}{D + \frac{d}{2} - 2\,d\operatorname{tg}^2\varphi} = \sim 5\operatorname{tg}^2\varphi.$$

Für $\varphi = 38'$ ergiebt sich $\mathfrak{F}_\varphi = 0{,}061$ Proc. Der Fehler war mithin nicht vernachlässigbar. Er konnte aber leicht corrigirt werden.

5. Die infolge unrichtiger Einstellung der Mittelschneide (Abweichung um λ) möglichen Fehler

$$(8) \qquad \mathfrak{F}_m = \frac{D\lambda^2 + d\left(\frac{l\lambda}{12} + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^3}{3\,l}\right)}{\frac{l^2}{4}\left(D + \frac{d}{2}\right)},$$

---

1) Diese Gleichheit der Winkel ist praktisch leicht controlirbar.

sowie die durch Ungenauigkeiten in den Belastungsgewichten und den Werten von b und $(D + \frac{1}{2} d)$ zu befürchtenden Fehler erwiesen sich als nahezu vernachlässigbar.

6. Hinsichtlich der Temperaturbestimmungsfehler war anzunehmen, dass sie bei den Zimmertemperaturen $^1/_2{}^0$ nicht überschritten haben. Bei den höheren Temperaturen mussten aber Ungenauigkeiten bis zu 2,5° für möglich erachtet werden, welchem Maximalbetrage ein Fehler $\mathfrak{F}_t$ von 0,10 Proc. im Resultate entspricht.

7. Ein von der Reibung des Stabes auf den Auflagerschneiden erwarteter Fehlereinfluss konnte nicht nachgewiesen werden.

8. Die Dicke der sehr exact gearbeiteten Stäbe wurde mit Hülfe eines Abbe'schen Dickenmessers auf $\pm$ 1,0 μ genau bestimmt. Entsprechende Unsicherheit $(\mathfrak{F}_h)$ im Resultate = 0,10 Proc.

9. Weniger genau konnte die Stützweite gemessen werden. Die Unsicherheit betrug hier $\pm$ 0,02 mm. Entsprechender Fehler $(\mathfrak{F}_l)$ im Resultate = 0,04 Proc.

Aus der Gesamtheit der Fehlererörterungen waren folgende Schlüsse über den *Genauigkeitsgrad der numerischen Beobachtungsergebnisse* zu ziehen:

1. Für die Genauigkeit der *relativen Messungen* bei *Zimmertemperatur* sind maassgebend die Ablesungsfehler $\mathfrak{F}_v$, die Prismeneinstellungsfehler $\mathfrak{F}_r$ und die Temperaturfehler $\mathfrak{F}_t$. Bringt man die übrigen, kleineren Fehlereinflüsse noch mit 0,01 Proc. in Anrechnung, so ergiebt sich als Maximalfehler die Summe

$$0{,}03 + 0{,}02 + 0{,}02 + 0{,}01 = 0{,}08 \text{ Proc.}$$

Der zu erwartende mittlere Fehler stellt sich auf 0,04 Proc.

2. Bei den relativen Messungen in *erhöhten Temperaturen* bis etwa 350° ist die Genauigkeit erheblich geringer infolge von schwacher Zunahme der Ablesungsfehler und bedeutender Vergrösserung der Temperaturfehler.

Maximalfehler = 0,05 + 0,02 + 0,10 + 0,01 = 0,18 Proc.; mittlerer Fehler = 0,11 Proc.

3. Bei noch höheren Temperaturen schnelle weitere Verminderung der Genauigkeit durch Vergrösserung der Ab-

lesungsunsicherheit infolge rapider Zunahme der elastischen Nachwirkung.

4. Für die Genauigkeit der *absoluten Wertbestimmungen*, soweit ihnen Messungen bei *Zimmertemperatur* zu Grunde liegen, sind am wichtigsten die Fehler in der Dickenbestimmung. Nach ihnen folgen die Fehler in der Messung des Auflagerabstandes, die Ablesungs-, Einstellungs- und die Temperaturfehler. Bringt man die übrigen kleineren Fehlereinflüsse noch durch zwei Addenten im Betrage von 0,01 Proc. in Anrechnung, so erhält man den Maximalfehler

$$= 0{,}10 + 0{,}04 + 0{,}03 + 0{,}02 + 0{,}02 + 0{,}01 + 0{,}01 = 0{,}23 \text{ Proc.}$$

Der mittlere Fehler stellt sich auf 0,12 Proc.

5. Bei den absoluten Wertbestimmungen, welche sich auf Messungen bei *erhöhten Temperaturen* bis etwa 350° stützen, steigt infolge der dann höheren Beträge von $\mathfrak{F}_e$ und $\mathfrak{F}_t$ der Maximalfehler auf 0,33 Proc., der mittlere Fehler auf 0,16 Proc.

Schliesslich sei hier gleich darauf hingewiesen, dass bei den später zu erörternden *indirecten* Wertbestimmungen von e mit Hülfe von Formeln, welche den thermischen Ausdehnungscoefficienten enthalten, als weitere Fehlerquelle noch die Unsicherheit hinzukommt, welche den benutzten Zahlenwerten der thermischen Coefficienten anhaftet. Eine zahlenmässige Feststellung des Einflusses dieser Fehlerquelle konnte vom Verfasser wegen unzureichender Unterlagen nicht durchgeführt werden.

Resultate.

Die Ergebnisse der ausgeführten Messungen sind in der beigegebenen Tafel I graphisch zusammengestellt, und zwar in Fig. 1 die bei Zimmertemperatur, in Fig. 2 die bei höheren Temperaturen erhaltenen. In beiden Figuren sind Scalenverschiebungsbeträge, welche den Werten des Elasticitätscoefficienten direct proportional sind, als Ordinaten über einer ausserhalb der Zeichnung liegenden X-Axe aufgetragen.

Die in Fig. 1 aufgezeichneten Mittelwerte (pro 1 kg) der bei Zimmertemperatur ausgeführten Messungsreihen sind sämtlich auf 20° reducirt und in horizontaler Richtung durch Strecken proportional den zwischenliegenden Zeiträumen ge-

trennt. Nur bei grösseren Zeitintervallen ist, zwecks Raumersparnis, die Anzahl der zwischen zwei Beobachtungen liegenden Tage durch Ziffern angegeben. Ausserdem sind alle zwischen den Zimmertemperaturmessungen vorgenommenen Erhitzungen (für Messungen bei erhöhter Temperatur) durch grosse Punkte gekennzeichnet.

In Fig. 2 dagegen sind in horizontaler Richtung die Temperaturen abgetragen, und die (in gleichem Maassstabe wie in Fig. 1) als Ordinaten gezeichneten Werte v_t' sind die auf Stabdimensionen bei 0° reducirten Scalenverschiebungsmittelwerte (pro 1 kg), d. h. diejenigen mittleren Scalenverschiebungen, welche beobachtet worden sein würden, wenn der Stab bei allen Versuchen die der Temperatur 0° entsprechenden Dimensionen besessen hätte.

Bei Betrachtung von Fig. 1 fällt sofort der bedeutende *Einfluss der ersten Erhitzungen* nach längerer Ruhe in die Augen, welcher bekanntlich auch schon bei anderen Stoffen (z. B. von A. Winkelmann[1]) bei Gläsern und Platin) beobachtet worden ist. Verfasser zieht aus dem Verlauf dieser Erscheinung den Schluss, dass die *Elasticität* bei bestimmten Temperaturen als *abhängig* von der *Einwirkungsdauer* dieser Temperaturen anzusehen ist.

Die graphische Darstellung lässt indessen auch noch *kleinere*, die Fehlergrenze von 0,08 Proc. (gleich 0,0015 Scalentheilen) aber noch bedeutend überschreitende *Schwankungen* erkennen, welche nicht durch Erhitzungseinflüsse zu erklären sind. Ausführliche Untersuchungen, unternommen um einen etwaigen Einfluss von Aenderungen in der Versuchsausführung, betreffend Grösse, Geschwindigkeit, Dauer und Häufigkeit der Belastung nachzuweisen, führten nur zur Erklärung eines sehr untergeordneten Theiles dieser Elasticitätsänderungen. Es konnte nämlich mit Sicherheit nachgewiesen werden, dass *nach Elasticitätserhebungen infolge von Erhitzungen durch häufig wiederholte Beanspruchung die Wiederannäherung an den ursprünglichen Zustand* begünstigt wird. Dieser Einfluss häufig wiederholter Beanspruchung trat aber nur in relativ wenigen Messungsreihen

1) A. Winkelmann, Wied. Ann. **61**. p. 140. 1897 und **63**. p. 122 bis 123. 1897.

besonders deutlich hervor und ist zur Erklärung der beobachteten *Mittelwerts*schwankungen durchaus unzureichend. Ob diese etwa als eine den grösseren, durch Erhitzungen bewirkten Elasticitätsänderungen analoge Erscheinung aufzufassen sind und ihre Ursache in den vorgekommenen Schwankungen der Zimmertemperatur selbst zu suchen ist, konnte nicht genauer geprüft werden und muss als eine noch offene Frage hingestellt werden. Es ist aber wahrscheinlich, dass es sich um eine Uebereinanderlagerung einer grösseren Anzahl verschiedener Einflüsse handelt, deren Ursachen schon in der Behandlung des Materials lange vor Beginn der Beobachtungen liegen können.

Verfasser vermutet übrigens, dass die beobachteten Elasticitätsschwankungen Folgeerscheinungen von geringen Dimensionenänderungen sind.

Sollten sie auch bei anderen Stahlsorten vorkommen, so würde dadurch die Zuverlässigkeit von Normalstimmgabeln eine erhebliche Beeinträchtigung erfahren.

Im Gegensatz zu den bei Zimmertemperatur gewonnenen zeigen die in Fig. 2 dargestellten *Messungsergebnisse* aus *höheren Temperaturen* einen sehr regelmässigen, von unberechenbaren Elasticitätsschwankungen nicht merklich gestörten Verlauf.

Zur mathematischen Darstellung der beobachteten Aenderung des Elasticitätscoefficienten mit der Temperatur wurde vom Verfasser mit Erfolg eine Formel benutzt, die sich von allen bisher für den gleichen Zweck verwendeten dadurch wesentlich unterscheidet, dass sie das Bestehen einer bestimmten gesetzmässigen Beziehung zwischen Elasticitätsänderung und der Aenderung einer anderen physikalischen Eigenschaft, des Molecularabstandes, zur Grundlage hat. Es wurde angenommen, dass sich die *Elasticität proportional einer Potenz n der Dichtigkeit* ändere und aus dieser Annahme die Formel

$$e_t = e_0 (1 + \alpha_{0/t} . t)^{3n} \tag{11}$$

abgeleitet, in welcher t die Temperatur und $\alpha_{0/t}$ den für das Temperaturintervall 0 bis t geltenden thermischen Ausdehnungscoefficienten bezeichnet. Die nach dieser Formel berechneten Werte v_t' sind in der graphischen Darstellung durch die ausgezogene Curve verbunden.

Als Ausgangspunkte für die Berechnung dienten die zwei bei 109 und bei 322° ermittelten Beobachtungswerte v_t'.

Einen bei Zimmertemperatur gefundenen Wert mit zu benutzen, hielt der Verfasser für unrichtig, da nach seiner Ansicht, wie schon erwähnt, die Grösse des Elasticitätscoefficienten bei irgend einer Temperatur abhängig ist von der Dauer der Einwirkung dieser Temperatur, nämlich mit ihr langsam zunimmt, sich dabei (scheinbar asymptotisch) einem Grenzwerte nähernd. Da nun das Untersuchungsmaterial den höheren Temperaturen stets nur vorübergehend (wenn auch viele Stunden lang) ausgesetzt war, der Zimmertemperatur dagegen nur ausnahmsweise *nicht* ausgesetzt war, muss nach obiger Anschauung eine wesentliche Verschiedenheit zwischen den bei höheren Temperaturen gefundenen Elasticitätswerten (Verfasser nennt sie „Initialwerte") und den bei Zimmertemperatur ermittelten („Accommodationswerten") vorausgesetzt werden, eine Annahme, deren Richtigkeit nicht nur in dem Ausbleiben der bei Zimmertemperatur beobachteten Elasticitätsschwankungen bei den Hochtemperaturmessungen Bestätigung zu finden scheint, sondern auch in der Thatsache, dass die beobachteten Zimmertemperaturwerte des Elasticitätscoefficienten sämtlich erheblich *über* der Curve der berechneten Werte liegen, welche im übrigen (bis zu den Temperaturen, bei welchen die elastische Nachwirkung die Messungen zu stören beginnt) eine recht gute Uebereinstimmung mit den Beobachtungsergebnissen aufweist.

Aus diesen Gründen muss Verfasser auch das bisher allgemein übliche Verfahren, Zahlenwerte für die Aenderung der Elasticität mit der Temperatur durch *directe Vergleichung von bei Zimmertemperatur und bei höheren Temperaturen gewonnenen Beobachtungswerten* zu ermitteln, als unrichtig bezeichnen. Statt dessen empfiehlt er, aus zwei bei aussergewöhnlichen Temperaturen bestimmten Elasticitätswerten durch Rechnung unter Benutzung von Formel (11) den Exponenten $3n$ und den Initialwert e_0 zu ermitteln und diese beiden Zahlenwerte als Materialconstanten in Anwendung zu bringen.

Selbstverständlich bedarf es noch der Bestätigung, ob der Gleichung (11) allgemeine Gültigkeit zukommt. Da sie aber deductiv (nicht empirisch) ermittelt wurde, ist es unwahrscheinlich, dass ihre Anwendbarkeit auf das vom Verfasser unter-

suchte Material beschränkt sein sollte. Ausserdem wird der Erfolg des vorgeschlagenen Verfahrens von der Genauigkeit der benutzten thermischen Ausdehnungscoefficienten, sowie von der Schärfe der Materialdefinition abhängig sein.

Bei dem untersuchten Flusseisen wurde

$$3n = 31{,}3 \pm 0{,}5\,^{1)} \quad \text{und} \quad e_0 = \frac{1}{22116 \pm 40^{1)}}$$

gefunden.

Aus der Hauptgleichung (11) ist leicht folgende Formel für die Grösse Δ_{100} der Elasticitätsänderung zwischen 0 und 100° abzuleiten:

$$\text{(11b)} \qquad \Delta_{100} = \frac{e_{100} - e_0}{e_0} = \sim 3n \,.\, \alpha_{50} \,.\, 100\,.$$

Gilt nun die Hauptgleichung (11) auch noch für andere Stoffe als das untersuchte Flusseisen, so ist aus dieser Formel (11b) der Schluss zu ziehen, dass sich die Beträge der Elasticitätsänderung zwischen 0 und 100° bei diesen verschiedenen Stoffen verhalten müssen wie die Producte aus den Exponenten $3n$ und den thermischen Ausdehnungscoefficienten für das Intervall 0 bis 100°, und dass, falls es sich etwa bestätigen sollte, dass der Exponent $3n$ eine vom Material (in erster Annäherung) unabhängige Constante ist, sie einfach proportional den Ausdehnungscoefficienten sein müssen.

Für das Letztere liegt eine experimentelle Bestätigung noch nicht vor. Doch haben Miller (l. c.) und Katzenelsohn (l. c.) bereits erkannt, dass die Aenderung der Elasticität mit der Temperatur bei denjenigen Stoffen am grössten ist, welche die grössten thermischen Ausdehnungscoefficienten besitzen. Dass die von ihnen gefundenen Werte Δ_{100} von der einfachen Proportionalität mit den Ausdehnungscoefficienten noch ganz bedeutend abweichen, kann in Hinblick auf die Nichtberücksichtigung der Besonderheit der Zimmertemperaturergebnisse, sowie auch die bei einigen Stoffen (vor allem Cu und Al) augenscheinlich sehr bedeutenden Nachwirkungsfehler als hinreichendes Argument wider das Bestehen der fraglichen Proportionalität nicht angesehen werden.

---

1) Die beigefügten Fehler sind die *mittleren.* Die zugehörigen *Maximalfehler* betragen ± 1,0 bez. ± 97.

Der von Katzenelsohn speciell für Eisen gefundene Wert Δ_{100} zeigt ungefähre Uebereinstimmung mit analog aus den Beobachtungsergebnissen des Verfassers abgeleiteten Zahlenwerten. Dagegen ist der von Miller gefundene so bedeutend viel grösser (die Differenz gegenüber dem Katzenelsohn'schen Werte beträgt nicht weniger denn 66 Proc.), dass von vornherein eine Erklärung dieser Abweichung lediglich aus Verschiedenheiten des Materiales unmöglich erscheint. Nach des Verfassers Ansicht ist sie hauptsächlich dem eigentümlichen von Miller benutzten Beobachtungsverfahren zur Last zu legen, welches den Zweck hat, Fehler durch elastische Nachwirkung auszuschliessen, thatsächlich aber ihren störenden Einfluss nur begünstigt. Es ist nämlich ein Irrtum, wenn Miller aus dem in seinen Versuchsreihen beobachteten allmählichen Gleichwerden der Be- und Entlastungsverschiebungen schliesst, das Untersuchungsmaterial gehe zeitweilig in einen vollkommen elastischen Zustand über und die in diesem Zustande erhaltenen Scalenverschiebungen seien frei von elastischer Nachwirkung. Eine nähere Untersuchung der bei dem Miller'schen Beobachtungsverfahren sich abspielenden Nachwirkungsvorgänge lässt leicht erkennen, dass nur die am Anfange der Reihen bestehende grössere *Verschiedenheit* der Nachwirkungsbeträge bei Be- und Entlastung verschwindet, *nicht* aber die *Nachwirkungsbeträge selbst gleich Null* werden. Infolge dieses Irrtumes scheinen sämtliche Beobachtungsergebnisse Miller's, besonders aber die bei höheren Temperaturen erhaltenen, mit erheblichen Nachwirkungsfehlern behaftet zu sein, und daraus erklärt sich auch die ausserordentliche Höhe des von ihm bei Eisen für die Elasticitätsänderung mit der Temperatur gefundenen Zahlenwertes.

Ohrdruf, November 1899.

(Eingegangen 28. Nov. 1899.)

---

3. *Die Löslichkeit der Kohlensäure in Alkohol zwischen – 67° und + 45° C. In- und Evasionscoefficient bei 0°; von Christian Bohr.*

Für die Theorie von der Löslichkeit der Gase in Flüssigkeiten wird es von Interesse sein, Absorptionswerte bei niedrigeren Temperaturen, als bisher geschehen ist, festzustellen. Zu diesem Zwecke ist die unten im Abschnitt I beschriebene Reihe von Versuchen ausgeführt worden, durch welche die Absorption der Kohlensäure in Alkohol bei Temperaturen bis – 67° C. bestimmt wurde. Der Abschnitt II enthält die Bestimmung des In- und Evasionscoefficienten der genannten Stoffe bei 0°. Es wird hier nachgewiesen werden, dass die früher[1]) mit Bezug auf Wasser und Kohlensäure benutzte Auflösung des Absorptionscoefficienten in die genannten Coefficienten auch bei der Untersuchung der Aufnahme von Kohlensäure in Alkohol Anwendung findet. Den Wert der Coefficienten bei anderen Temperaturen als 0° mitzuteilen wird sich mir hoffentlich später die Gelegenheit darbieten.

I.

Die Absorption der Kohlensäure in Alkohol ist mittels des Bunsen'schen Absorptiometers früher von Carius[2]) für das Temperaturintervall von ca. 3—23° C. untersucht worden. Die Werte sollen zum Vergleich mit den von mir gefundenen, mit denen sie gute Uebereinstimmung zeigen, unten tabellarisch angeführt werden. Ausser Carius' Untersuchungen liegen in Betreff der hier behandelten Frage meines Wissens nur noch Versuche von O. Müller[3]) vor. Der Hauptzweck dieser Arbeit ist die Bestimmung der Löslichkeit der Kohlensäure in Mischungen von Alkohol und Wasser, wodurch es gelingt, ein Minimum der Absorption bei ca. 28 Gewichtsprocent Alkohol zu

---

1) Ch. Bohr, Wied. Ann. 68. p. 500. 1899.

2) Carius, Lieb. Ann. 94. p. 135. 1855.

3) O. Müller, Wied. Ann. 37. p. 24. 1889.

constatiren. Gelegentlich gerät der Verfasser hierdurch zur Anstellung einer Bestimmung mit 99proc. Alkohol bei 20,3° die einen Wert des Absorptionscoefficienten von ca. 2,6 ergiebt. Meinen Versuchen zufolge wird der Wert, wie unten zu ersehen, 2,96 betragen, in naher Uebereinstimmung mit Carius, der 2,93 findet; die von Müller angewandte Methode ist indes, wie der Verfasser selbst (l. c. p. 31) hervorhebt, nicht ohne Fehlerquellen, die wohl die Abweichung erklären mögen.

Zu den Bestimmungen wandte ich zwei verschiedene Verfahrungsarten an, von denen die unten zuletzt beschriebene wesentlich zur Controle der Werte für die niedrigen Temperaturen diente.

Bei der *ersten Methode* wird der Alkohol vorerst durch Durchleitung mit Kohlensäure gesättigt, worauf die Menge der Kohlensäure an einer Probe der Flüssigkeit bestimmt wird. Um die Temperatur während der Durchleitung constant zu erhalten, ist das Gefäss mit Alkohol von einem Mantel umgeben, der je nach den Umständen von Wasser mit constanter Temperatur durchströmt, oder, wenn es sich um niedrigere Temperaturgrade handelt, mit Eis oder mit einer Kältemischung von fester Kohlensäure in Aether gefüllt wird. Das Gefäss mit Alkohol ist nach unten mit einer engen, einen Hahn tragenden Röhre versehen, die durch den Boden des umgebenden Mantels hinausragt und dazu dient, nach der Sättigung Proben der Flüssigkeit zu entnehmen. Hinsichtlich der Durchleitung ist übrigens nur zu bemerken, dass die Kohlensäure erst völlig getrocknet und vorgewärmt wurde, um darauf, indem sie durch eine im oben erwähnten Mantel angebrachte Waschflasche mit Alkohol passirt, genau auf die Versuchstemperatur eingestellt und mit Alkoholdampf gesättigt zu werden, bevor sie in das eigentliche Absorptionsgefäss eintritt. Die Temperatur wurde mittels eines Weingeistthermometers gemessen, das mit dem *Luftthermometer* direct verglichen worden war, nach welchem die unten angegebenen Temperaturen überall corrigirt sind. Das Barometer und der Druck über der Absorptionsflüssigkeit wurden während der Durchleitung abgelesen, die ca. 6 Stunden lang dauerte, welche Zeit sich als genügend erwiesen hatte, um die Sättigung zu erzielen. — Bei der Bestimmung der Menge Kohlensäure, die

sich nach Sättigung in einer Probe des Alkohols fand, musste man von dem Verfahren der Entgasung der Flüssigkeit absehen, weil es Schwierigkeiten darbot, das evacuirte Gas völlig von Alkoholdampf zu befreien. Man bediente sich deshalb des Aufnehmens der Probe in eine alkalische Flüssigkeit, welche die Kohlensäure band, worauf die Menge der letzteren bestimmt wurde. Es wurden mehrere Methoden versucht, die aus verschiedenen Gründen kein genaues Resultat gaben, und die wir deshalb hier übergehen; nur sei genannt, dass die Aufnahme der Probe in eine Lösung von KOH in Alkohol, wodurch sich äthylkohlensaures Kali bildet, das durch gleiche Teile Aether gefällt und gewägt wurde, ebenfalls keine brauchbaren Resultate ergab. Es bildet sich nämlich ausser äthykohlensaurem Kali einiges kohlensaures Kali in je nach den Umständen wechselnder Menge, die z. B. nach der Zeit, während der die Probe vor der Fällung mit Aether ruhig steht, variirt. Hierdurch können sich bedeutende Fehler einschleichen, trotz guter Uebereinstimmung der Doppelbestimmungen, wenn diese genau auf dieselbe Weise ausgeführt werden.

Das Verfahren, das sich zuletzt als das zweckmässigste erwies, ist folgendes. Ein Literkolben, der mit zwei angeschmolzenen Röhren mit Schwanzhähnen versehen ist, deren eine bis ungefähr an den Boden reicht, wird luftleer gemacht, und eine angemessene Menge Barytwasser eingesaugt. In diese Kolben nimmt man aus dem Absorptionsgefässe durch die oben erwähnte, in dessen Boden angebrachte Röhre eine Probe des mit Kohlensäure gesättigten Alkohols auf, dessen Menge man durch Wägen bestimmt. Darauf dampft man den Inhalt des Kolbens im Vacuum bis zum Trocknen ein, und in den luftleeren Kolben wird zur Decomposition der kohlensauren Barytverbindungen verdünnte Salzsäure eingesaugt. Die Menge der Kohlensäure bestimmt man dadurch, dass man, indem die Flüssigkeit in dem Kolben schliesslich zum Sieden gebracht wird, einen Strom kohlensäurefreien Gases durch diesen und darauf durch ein System von Trockenröhren und durch einen Liebig'schen Kugelapparat mit Kalilauge saugt, in welch letzteren die Kohlensäure unter den üblichen Cautelen aufgenommen und durch Wägen bestimmt wird. In untenstehender

Tab. 1 finden sich die auf diese Weise gefundenen Versuchsresultate. Die erste Columne enthält die Temperatar in °C.; die zweite Columne den Absorptionscoefficienten α, berechnet als diejenige bei 0° und 760 mm gemessene Anzahl ccm Kohlensäure, welche bei einem Absorptionsdruck von 760 mm in 1 ccm Alkohol, bei der bezüglichen Temperatur gemessen, aufgenommen wird. Bei der Umrechnung der Werte des Absorptionsdruckes auf 760 mm kam das Henry'sche Gesetz zur Anwendung. Da dessen Gültigkeit unter den hier besprochenen Verhältnissen nicht näher untersucht ist, namentlich nicht bei so niedrigen Temperaturen, wird in der dritten Columne zugleich der Druck (P) angegeben, unter dem die Absorption stattfand. Die zu dieser Bestimmung erforderliche Tension des Alkoholdampfes für die betreffende Temperatur ist Regnault's Tabellen[1]) entnommen; da diese nicht weiter als bis — 20° C. hinab gehen, wurden die Werte für die niedrigeren Temperaturen graphisch extrapolirt, was keine Fehler von Bedeutung geben kann, da der absolute Wert der Tension schon bei — 20° im Vergleich mit dem gesamten Absorptionsdruck ein geringer (3,3 mm) ist. Der zu den Versuchen angewandte Weingeist besass bei 12,4° ein specifisches Gewicht von 0,7990 und enthielt mithin 99,0 Gewichtsprocente Alkohol.

Tabelle 1.

t^0	α	P	t^0	α	P
— 65,3	39,38	737,3	9,8	3,58	736,2
— 27,0	9,36	743,9	21,0	2,93	712,8
— 12,4	6,19	745,4	35,7	2,39	652,0
— 0,2	4,46	752,6	47,7	1,97	559,0
— 0,2	4,46	753,2			

Durch Interpolation nach der Formel[2]) $\alpha(T - n) = K$ wurde aus den Versuchen die untenstehende Tab. 2 über die Werte von α berechnet; die Variation von n mit der Temperatur ist zwischen —12° und 36° sehr gering und auch rücksichtlich der übrigen Temperaturintervalle ist die Formel als Interpolationsformel brauchbar, mit Ausnahme der Strecke

1) H. Landolt u. R. Börnstein, Tabellen p. 70. 1894.
2) Chr. Bohr, Wied. Ann. **62**. p. 644. 1897.

zwischen $-65,3^\circ$ und -27°, wo das Sinken von n so beträchtlich ist, dass die Formel sich zwischen zwei so entfernten Temperaturen nicht benutzen lässt. Für dieses Temperaturintervall werden sich die Bestimmungen in den nach der unten beschriebenen Methode ausgeführten Versuchen finden.

Wie oben kürzlich berührt, wurde α auf die Weise berechnet, dass man bestimmte, wie viele Cubikcentimeter Kohlensäure (0° und 760 mm) von einem gewissen Gewicht Alkohol, nach Abzug des Gewichtes der hierin enthaltenen Kohlensäure, absorbirt werden, worauf die Gewichtsmenge des Alkohols für dasjenige Volum umgerechnet wurde, welches er nach Recknagel's Angaben[1]) für 99,3 proc. Alkohol bei der betreffenden Temperatur haben würde. Da das Volumen des Alkohols aber durch Absorption von Kohlensäure zunimmt, entsprechen die angegebenen α nicht gänzlich dem Absorptionscoefficienten, wenn man unter diesem wie gewöhnlich die in 1 ccm Flüssigkeit, hier kohlensäurehaltigen Alkohol, enthaltene Gasmenge versteht. Auch diese letztere Grösse ist deshalb unter der Bezeichnung α_1 unten angegeben, indem ich nach Ångström[2]) den Ausdehnungscoefficienten des Alkohols bei Absorption von Kohlensäure als 0,0018 bei 0° gerechnet habe, welcher Wert dem von Blümcke[3]) angegebenen, 0,0020, nahe liegt. Dass ich überhaupt nicht nur α_1 berechnet habe, liegt darin, dass man gezwungen ist, einen bei 0° gefundenen Wert des genannten Ausdehnungscoefficienten anzuwenden, indem für so niedrige Temperaturen wie die, um welche es sich bei unseren Versuchen zum Teil handelt, keine directen Bestimmungen vorliegen. Es würde hierdurch eine Unsicherheit in den Angaben der eigentlichen Versuchsresultate eintreten und ich zog es deshalb vor, sowohl von α als von α_1 die Werte zu geben; man ersieht übrigens, dass der Unterschied zwischen α und α_1 nur bei sehr niedrigen Temperaturen Bedeutung erhält.

Des Vergleiches wegen sind in der letzten Columne der Tab. 2 die, wie oben erwähnt, von Carius ausgeführten Bestimmungen zwischen 3 und 23° C. aufgenommen.

---

1) H. Landolt u. R. Börnstein, Tabellen p. 104. 1894.
2) K. Ångström, Wied. Ann. **33**. p. 223. 1887.
3) A. Blümcke, Wied. Ann. **30**. p. 243. 1887.

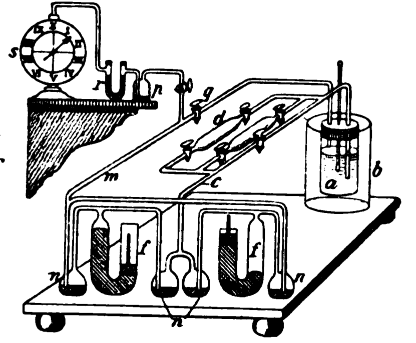
Tabelle 2.

Absorption der Kohlensäure in 99 proc. Alkohol.

° C.	α	α_1	α nach Carius	° C.	α	α_1	α nach Carius
— 65	38,41	35,93	—	10	3,57	3,55	3,51
— 25	8,75	8,61	—	15	3,25	3,23	3,20
— 20	7,51	7,41	—	20	2,98	2,96	2,95
— 15	6,59	6,51	—	25	2,76	2,74	2,76
— 10	5,75	5,69	—	30	2,57	2,56	—
— 5	5,01	4,96	—	35	2,41	2,39	—
0	4,44	4,40	4,33	40	2,20	2,19	—
5	3,96	3,93	3,89	45	2,01	2,00	—

Die andere, namentlich bei niedrigen Temperaturen benutzte Methode ist absorptiometrisch und besteht in der Messung derjenigen Menge Kohlensäure, welche bei einem Sinken der Temperatur von 0° bis auf einen niedrigeren Wärmegrad in einem gewissen Rauminhalt Alkohol aufgenommen wird.

Durch den im Gefässe *a* (vgl. die Figur) befindlichen Alkohol wird fortwährend aus der in der Nähe des Bodens von *a* ausmündenden Röhre *c* ein Strom von Kohlensäure geleitet, der im Apparate circulirt. Die Circulation wird mittels zweier mit Quecksilber gefüllter kleiner Pumpen *f* hergestellt. Die Stempel in diesen werden durch einen Motor zu gleicher Zeit und mit gleich grossen Excursionen in verschiedener Richtung in Bewegung gesetzt, sodass der eine aufsteigt, während der andere absteigt; indem der Raum über dem Quecksilber in den Pumpen auf die in der Figur angegebene Weise mit den Quecksilberventilen *n* in Verbindung steht, wird bei jedem Pumpenschlag eine gewisse Menge Gas durch das Rohr *c* ausgetrieben, während zugleich eine ebenso grosse Gasmenge aus dem Rohre *m* in die andere Pumpe aufgesaugt wird. Hierdurch entsteht eine fortwährende Circulation der



Kohlensäure im Apparate durch die Flüssigkeit in *a* hindurch, ohne dass eine merkbare Schwankung des Druckes eintritt. Durch das von *m* abzweigende Seitenrohr communicirt das Innere des Apparates mit der Quecksilbersperrflasche *p*, der Phosphorsäurerröhre *r* und der Gasuhr *s*, die wieder mit einem in der Figur nicht angegebenen Spirometer in Verbindung steht, welches reine Kohlensäure vom Drucke der Atmosphäre enthält. Der übrige Teil des Apparates wird im Folgenden zugleich mit dem Verfahren beim Anstellen eines Versuches beschrieben werden.

Im Behälter *a* werden ca. 220 ccm Alkohol eingebracht und man füllt das *a* umgebende Glas *b* mit Eis; den Schwanzhahn *q* dreht man quer, sodass er die Passage durch die Röhre *m* versperrt, während durch seinen Schwanz Communication des äusseren Raumes mit dem oben im Glase *a* mündenden Teil der Röhre *m* entsteht. Sind die Pumpen in Bewegung gesetzt, so wird aus dem Spirometer Kohlensäure durch die Gasuhr, die Trockenröhre und die Sperrflasche *p* hindurch in den Apparat eingesaugt und Kohlensäure durch den Alkohol in *a* hindurch am Hahne *q* aus dem Apparat ausgetrieben. Hat dieses Durchleiten lange genug gedauert, um den Apparat mit Kohlensäure zu füllen und den Alkohol bei 0° damit zu sättigen, so dreht man den Hahn *q* so, dass die Communication mit dem äusseren Raum unterbrochen, die Röhre *m* aber passirbar wird. Die Kohlensäure wird nun anfangen durch die Flüssigkeit zu circuliren, und wenn die Absorption beendigt ist und die Temperatur constant bleibt, keine Kohlensäure mehr durch die Gasuhr eintreten, wenn die Circulation auch stundenlang fortgesetzt wird. Nun entfernt man das Eis von *b* und ersetzt es durch eine Kältemischung, sodass die Temperatur in *a*, die an einem Weingeistthermometer abgelesen wird, zum Sinken kommt; es wird dann noch mehr Kohlensäure in Alkohol absorbirt, und aus dem Spirometer tritt durch die Gasuhr Kohlensäure ein, bis im Apparate wieder atmosphärischer Druck herrscht. Wird die Temperatur in *a* constant gehalten, so hört dieses Einsaugen von Kohlensäure allmählich auf, und man liest darauf die Gasuhr ab. Hierauf bringt man wieder die Temperatur in *a* zum Sinken; es findet aufs neue Absorption statt, und auf diese Weise fährt man

fort, bis man den niedrigsten Temperaturgrad, den man zu beobachten wünscht, erreicht hat. Man kann darnach die Kältemischung in *b* wieder durch Eis ersetzen, den Stand des Quecksilbers in der Sperrflasche *p* mittels eines in der Figur nicht angegebenen Hahnes senken und die Verbindung mit der Gasuhr umlegen, sodass man die Kohlensäure, die jetzt, während die Pumpen ununterbrochen in Gang bleiben, aus dem Apparat entweicht, zu messen vermag. Die gesamte Menge, die entwichen ist, wenn die Temperatur in *a* wieder 0° wird, soll der Summe sämtlicher während des Versuches beobachteter Absorptionen entsprechen, was denn auch mit hinlänglicher Genauigkeit der Fall ist.

Ueber die technischen Details ist folgendes in Kürze zu bemerken. Die aus Zinn verfertigte Gasuhr (*s*) ist nach vorn durch eine Glasplatte verschlossen, die mit einer in den Rand eingeritzten cirkularen Einteilung versehen ist. Die Gasuhr enthält übrigens nur die Trommel, während der gewöhnliche Zählapparat weggelassen ist; mittels eines an der Trommel angebrachten Zeigers sind an der Glasscheibe Bruchteile einer Umdrehung abzulesen, während jede ganze Umdrehung, die hier 200 ccm entsprach, dadurch angegeben wird, dass der Zeiger beim Passiren des Nullpunktes an ein dünnes Goldblättchen anstösst, wodurch ein elektrischer, ein Zählwerk in Bewegung setzender Strom geschlossen wird. Durch diese Einrichtung der Gasuhr erzielt man eine sehr leichte und sichere Bewegung der Trommel, indem man es zugleich ermöglicht, die Gasuhr ganz unter Wasser anzubringen, was für die Messung der Temperatur des eintretenden Gases von Bedeutung ist; der Wasserbehälter, in welchem die Gasuhr angebracht war, ist in der Figur nicht angegeben. Das Barometer und die Temperatur der Gasuhr wurden während des Versuches beobachtet, um das Volumen der durch die Gasuhr gehenden Kohlensäure auf 0° und 760 mm reduciren zu können. Der Absorptionsdruck im Apparat wurde mittels des Barometerstandes, der Höhe des Quecksilbers in der Flasche *p* und der Tension des Alkoholdampfes bei der betreffenden Temperatur bestimmt.

Es wurde eine Correction der Abkühlung des im Glase *a* über dem Alkohol stehenden Gases, wie auch der Abnahme

der Dampftension in diesem Raum unternommen; in den übrigen Teilen des Apparates war die Temperatur fast constant, und kleinere Schwankungen waren wegen des verhältnismässig geringen Volumens ohne Bedeutung.

Ferner wurde die Zusammenziehung des Alkohols bei Abkühlung wie auch dessen Ausdehnung durch Absorption von Kohlensäure berücksichtigt; diese beiden Correctionen hoben sich fast gegenseitig, würden aber jedenfalls nur geringe Bedeutung gehabt haben, da jede für sich (bei $-67,3^0$) höchstens 16 ccm betrug, während das Volumen der durch die Gasuhr eintretenden Kohlensäure zu gleicher Zeit ca. 8 Liter war.

Die in der Figur angegebenen Recipienten *d* dienten zur Absperrung von Gasproben während des Versuches, um später ihre Reinheit prüfen zu können; ursprünglich waren sie übrigens aus Rücksicht auf mögliche Absorptionsbestimmungen an Mischungen von Gasarten angebracht.

Um Diffusion der Kohlensäure zu vermeiden, waren die einzelnen Teile des Apparates in der Regel zusammengeschmelzt, an den wenigen Stellen, wo kurze Kautschukverbindungen zur Anwendung kamen, waren diese mit Lack überzogen.

In untenstehender Tab. 3 finden sich die Ergebnisse der einzelnen Versuche angeführt. Der benutzte Weingeist hatte bei 15^0 ein specifisches Gewicht von 0,7979 und enthielt 98,7 Gewichtsprocent Alkohol. Der Weingeist war also ein wenig schwächer als der vorher benutzte, und dementsprechend war die Absorption von Kohlensäure bei 0^0 ein wenig geringer. α und P bezeichnen übrigens dieselben Grössen wie oben; auch hier sind die Temperaturgrade nach dem Luftthermometer corrigirt.

Tabelle 3.

Versuch 1.

t^0	α	P
−0,5	4,40	736,6
−13,4	5,92	744,1
−20,4	7,31	746,1
−27,1	8,98	748,3

Versuch 2.

t^0	α	P
−0,5	4,40	737,9
−32,7	11,15	749,8
−42,2	15,56	750,4
−50,0	21,28	751,0
−57,4	29,30	751,4
−67,3	44,77	751,8

Hieraus ist zur Supplirung und Controle der nach r Durchleitungsmethode gefundenen Werte untenstehende ıb. 4 berechnet unter Benutzung der Interpolationsformel $(T - n) = K$, die sich hier wegen des geringeren Abstandes rischen den einzelnen Bestimmungen besser bei den niedri-ıren Temperaturen anwenden lässt, indem n und K für je rei Temperaturen bestimmt werden. α_1 bezeichnet wie oben, . 248, den Absorptionscoefficienten, so wie dieser unter Be-icksichtigung der Ausdehnung des Alkohols während der Ab-ırption berechnet wird.

Tabelle 4.

Absorption von Kohlensäure in 98,7 proc. Alkohol.

°C	α	α_1	°C	α	α_1
0	4,35	4,31	– 50	21,28	20,49
– 10	5,43	5,38	– 60	31,25	29,59
– 20	7,25	7,16	– 65	39,89	37,22
– 30	9,97	9,79	– 67	44,07	40,83
– 40	14,25	13,89			

Bei – 65° ist der Unterschied zwischen den nach den eiden Methoden gewonnenen Werten ca. 3,7 Proc. des Wertes, as unter Rücksichtnahme auf die Schwierigkeit, so niedrige emperaturen völlig constant zu erhalten, wie auch auf die rosse Wirkung, welche kleinere Temperaturunterschiede bei iesen Wärmegraden auf die Absorption üben (man vergleiche ie Werte – 65° und – 67°), recht befriedigend zu nennen ist.

II.

Die Evasion der Kohlensäure aus dem Alkohol bei 0° urde nach der in einer früheren Abhandlung[1]) gegebenen [ethode (l. c. p. 507) bestimmt.

Auch der angewandte Apparat war in allem Wesentlichen erselbe wie der dort beschriebene; nur enthielt der Kolben N Fig. l. c. p. 508) concentrirte Schwefelsäure, und zwischen N nd der Gasuhr war ein grosser Chlorcalciumbehälter ein-eschoben, sodass die Luft getrocknet wurde, bevor sie in die

1) C. Bohr, Wied. Ann. 68. p. 500. 1899.

Flasche Q eintrat, die Alkohol von demselben Procentgehalt wie der zum Versuche benutzte enthielt. Uebrigens war der ganze Gebrauch des Apparates, die Umdrehungsgeschwindigkeit des Rührers, die Menge des während einer Minute über die Oberfläche der Flüssigkeit hinübergesaugten Gases ganz ebenso wie bei den früheren Versuchen mit Wasser, auf die wir verweisen können.

Wie in der oben erwähnten Abhandlung (l. c. p. 507) angeführt, lässt sich die Evasionsconstante für den Apparat mit der gegebenen Füllung mit Flüssigkeit und Oberfläche berechnen als

$$b = \frac{\log x_0 - \log x}{t \log e},$$

wo x_0 die am Anfang des Versuches in der ganzen Flüssigkeitsmenge enthaltene Kohlensäuremenge ist, während x diejenige Kohlensäuremenge bezeichnet, welche in der Flüssigkeit zurückbleibt, nachdem während t Minuten kohlensäurefreies Gas über die Oberfläche gesaugt ist.

In untenstehender Tab. 5 finden sich bei verschiedener Dauer des Uebersaugens unternommene Bestimmungen von b. Die Rubriken von x_0 und x geben die Kohlensäuremenge (ccm, 0° und 760 mm) der Flüssigkeit zu Anfang, bez. am Schlusse des Versuches an; t giebt die Dauer des Versuches in Minuten an. Die Temperatur ist überall 0° C. Der Apparat enthielt 84 ccm Alkohol von 99,3 Gewichtsprocent. Die Oberfläche war 19,56 qcm.

Tabelle 5.

t	x_0	x	b
10	374,8	107,0	0,125
20	369,9	33,3	0,121
30	374,6	9,8	0,121

Trotz der grossen Variation der Werte von x überschreiten die Abweichungen der durchschnittlich 0,122 betragenden Evasionsconstante nicht 3,2 Proc. des Wertes.

Der *Evasionscoefficient* oder diejenige Menge Kohlensäure,

lche während einer Minute durch 1 qcm der Oberfläche tweicht (ccm, 0° und 760 mm) ist also (l. c. p. 514)

$$\beta = 0{,}122 \cdot \frac{84}{19{,}56} = 0{,}524.$$

Demnach wird der *Invasionscoefficient* bei 0° oder die- ige Menge Kohlensäure, welche während einer Minute durch qcm der Oberfläche eindringt, wenn der Druck der Kohlen- ure 760 mm beträgt,

$$\gamma = \alpha\,\beta,$$

› α der Absorptionscoefficient bei 0° ist (l. c. p. 516). Eine ecielle Bestimmung von α für den angewandten Alkohol),3proc.) ergab 4,532. Hieraus erhält man

$$\gamma = 4{,}532 \cdot 0{,}524 = 2{,}375.$$

Zur Controle dieses Wertes wurde das in der öfters irten Abhandlung (l. c. p. 517) beschriebene Verfahren an- wandt, wonach während der Zeit t Kohlensäure unter dem ucke P über die Oberfläche des ursprünglich kohlensäure- ien Alkohols hinübergeleitet und die darauf in der Flüssig- t enthaltene Kohlensäure x bestimmt wird. Ist die Evasions- ıstante b, so findet man die während einer Minute durch ı ganze Oberfläche eingedrungene Kohlensäuremenge

$$G = \frac{b\,x}{1 - e^{-b\,t}},$$

l hieraus wieder den Invasionscoefficienten

$$\gamma = \frac{G}{s} \cdot \frac{760}{P}.$$

Bei unserem Versuche, der bei 0° angestellt wurde, be- g das Volumen des Alkohols 84 ccm, die Oberfläche 56 qcm; $t = 10'$; $P = 739{,}9$; $x = 270{,}5$; $b = 0{,}122$. Hieraus let man

$$G = 46{,}83 \quad \text{und} \quad \gamma = 2{,}459.$$

Die Uebereinstimmung mit dem oben als $\alpha\,\beta$ gefundenen ›rte 2,375 muss als genügend betrachtet werden, da die weichung ca. 3,4 Proc. des Wertes ist und der Invasions- such wegen des grossen Wertes von γ erschwert wird.

Hält man die hier für Alkohol gefundenen Werte von α, ınd γ mit den früher für Wasser gefundenen zusammen, so ;ommt man für 0°

	β	γ	α
Wasser	0,077	0,132	1,713
Alkohol	0,524	2,375	4,532

Der verhältnismässig grosse Absorptionscoefficient des Alkohols entsteht also, trotzdem sein Evasionscoefficient 6,8 mal so gross ist als der des Wassers, dadurch, dass der Invasionscoefficient 18 mal so gross für Alkohol als für Wasser ist.

Wegen des Einflusses, den β auf die relative Sättigung hat, die während einer gewissen gegebenen Zeit dadurch erreicht wird, dass man Kohlensäure über die Flüssigkeit hinweg leitet (l. c. p. 524[1]), wird der Alkohol verhältnismässig schneller gesättigt werden als Wasser; ist das Verhältnis der Oberfläche zum Volumen = $^1/_5$, so wird bei 0° dasselbe Sättigungsprocent, das der Alkohol in 10′ erreicht, vom Wasser erst in 68 Minuten erreicht werden.

1) In der am citirten Ort angeführten Formel — nicht aber in den daselbst stehenden Berechnungen — ist vor dem Exponenten der Zahl e ein Minuszeichen ausgefallen.

(Eingegangen 14. December 1899.)

4. *Ueber die specifische Wärme der Metalle, des Graphits und einiger Legirungen bei tiefen Temperaturen; von U. Behn.*

(Hierzu Taf. II.)

---

1. Die vorliegende Arbeit bildet die Fortsetzung der im vorigen Jahre veröffentlichten.[1]) Diese wurde ausgedehnt auf die Untersuchung des Graphits und einiger weiterer Metalle, nämlich Sb, Sn, Cd, Ag, Zn und Mg. Ausserdem wurden noch die specifischen Wärmen mehrerer Legirungen gemessen: die des Messings und dreier verschiedener Zinn-Bleilegirungen: Sn_6Pb, SnPb und $SnPb_6$.

2. Wie früher wurde die Mischungsmethode benutzt, auch das Verfahren war wesentlich dasselbe. Die Calorimetereinrichtung war etwas verbessert worden: Der Rührer wurde von einem kleinen Elektromotor getrieben; die Calorimetergefässe (es wurden zwei von passender Grösse[2]) verwandt) bestanden aus dünnem Silber; sie waren in ähnlicher Weise, wie es von Hrn. Pfaundler angegeben ist, durch ein Wasserbad vor äusseren Temperaturschwankungen geschützt und standen auf kleinen Patentfiberschneiden.

3. Die Metalle, deren specifische Wärme gemessen werden sollte, waren zu Cylindern teils abgedreht, teils gegossen; das Graphitstück, das ich der Freundlichkeit des Hrn. Prof. E. Cohen in Greifswald verdanke, war ebenfalls zu einem Cylinder abgedreht. Die Maasse dieser Cylinder waren annähernd die gleichen: Höhe 6 cm, Durchmesser 2 cm.

4. Der Gang der Messungen war derselbe wie früher. Im speciellen sei bemerkt, dass beim Einsenken in das Wasser des Calorimeters der Magnesiumcylinder sich mit einer dünnen,

---

1) U. Behn, Wied. Ann. 66. p. 237. 1898.

2) Der Inhalt dieser Gefässe war 500 ccm und 250 ccm, ihr Gewicht 123,4 g und 60,6 g.

schützenden Hülle von Magnesiumhydrat überzog. Der Graphitcylinder gab nicht unbeträchtliche Mengen[1]) Luft ab, die er offenbar im kalten Zustande absorbirt hatte. Jedoch waren beide Erscheinungen quantitativ zu geringfügig, als dass eine Correctur notwendig geworden wäre.

5. Es sei mir gestattet, zunächst die Fehlerquellen — in derselben Reihenfolge wie in der ersten Hälfte dieser Arbeit — zu besprechen.

a) *Unreinheit der Metalle.* Das Messing wurde auf Zinn- und Bleigehalt analysirt, da eine zu erwartende Beimischung von Sn oder Pb von grossem Einfluss auf die specifische Wärme sein musste. Die Angaben über die anderen Metalle sind von den Händlern gemacht.

Sb enthält Spuren von As (Merck).
Sn ist elektrolytisch gewonnen und chemisch rein (Kahlbaum); gegossen.
Cd enthält Spuren von Fe und Zn (Merck); gegossen.
Ag chemisch rein (Heräus).
Zn chemisch rein (Kahlbaum); gegossen.
Mg enthält etwas Fe (Merck).
C dichter Graphit[2]) aus Sibirien (Alibert-Graphit).

Im Messing wurde gefunden: 1,2 Proc. Zinn und 0,44 Proc. Blei. Im übrigen bestand es aus 6 Teilen Cu und 4 Teilen Zink.

b) Als *Anfangstemperatur der Metallcylinder* wurde (vgl. l. c.) die des Bades genommen.

c) Die *Ueberführung der Cylinder* in das Calorimetergefäss geschah wie im ersten Teile dieser Arbeit und dauerte ca. 1 Secunde. Es waren früher schon Versuche angestellt, um die in dieser Zeit erfolgende Erwärmung berechnen und eine entsprechende Correctur anbringen zu können. Aber diese Versuche schienen nicht ganz einwandsfrei und zwar aus folgenden Gründen: Hängt ein auf ca. -186^0 gekühltes Metallstück in Zimmerluft, so überzieht es sich, auch wenn die Luftfeuchtigkeit nur eine geringe ist, im Laufe von

---

1) Nach einer Abkühlung auf -186^0 schätzungsweise 5—10 ccm. Liess man während des Abkühlens und darnach der Luft freien Zutritt zum Graphit, so absorbirte derselbe pro 1 g etwa $^2/_3$ ccm Luft.

2) Die Brodie'sche Reaction gab derselbe nicht.

0 Secunden mit einem dichten Pelz von Eiskrystallen. Die 'ondensation des Wassers geschieht unter Wärmeabgabe an das letall; andererseits wird diese Hülle möglicherweise die Värmezufuhr merklich hindern. Ausserdem wird beim Einringen ins Calorimeter der Metallcylinder schnell bewegt; ıängt er dagegen, wie bei jenen Versuchen, ruhig, so sind die 3edingungen der Erwärmung andere.

Um die Erwärmung einwandsfreier zu ermitteln, wurde laher die Wärmeabgabe eines gekühlten Metallcylinders im 'alorimeter gemessen, der 4 Secunden lang — in dieser Zeit st von einem Schneeüberzuge noch nichts zu sehen — in der immerluft geschwenkt worden war. Diese Versuche ergaben ine Erwärmung in der Luft pro Secunde um 0,30, 0,22, ,25 Proc. bei verschiedenen Metallcylindern, um 0,6 Proc. beim raphit.

Die frühere Correctur scheint also hinreichend genau; n Folgenden ist dieselbe auf 0,3 Proc. erhöht; für das Graphittück, das einen erheblich kleineren Wärmeinhalt hatte, vielicht auch durch Strahlung wesentlich mehr verlor als die lanken Metallcylinder, ist die grössere Correctur nicht auffallend.

d) *Thermoelement.* Die Angaben des Zeigervoltmeters urden nur auf Spannung controllirt. Verschiedene Thermolemente Eisen—Constantan, alle von der einen Lieferung, auf ie sich die Holborn'sche[1]) Formel bezieht, gaben dieselben ngaben, sodass auch eine zeitliche Aenderung derselben unahrscheinlich ist. Die schwer ausführbaren Siedepunktsestimmungen von flüssigem Sauerstoff und fester Kohlensäure um Zwecke der Aichung schienen daher entbehrlich. Ueberies ist der Sublimationspunkt der (unreinen) Kohlensäure, ie man dieselbe den käuflichen Stahlcylindern entnimmt, egen der Beimischungen von Wasser und Oelen unsicher.

6. Die in den Tabellen gegebenen Zahlenwerte beziehen ch auch hier auf die specifische Wärme des Wassers bei immertemperatur als Einheit.

In Tab. I finden sich die unmittelbar gemessenen mittren specifischen Wärmen für das Gebiet $+ 18^0$ bis $- 79^0$

1) Vgl. l. c.

Tabelle I.

Mittlere specifische Wärmen, für das Gebiet + 18° bis − 79° (links), und + 18° bis − 186° (rechts).

Sb[1] Spuren As		Sn chem. rein		Cd Spuren von Fe und Zn		Ag chem. rein		Zn chem. rein		Mg etwas Fe	
0,0484	0,0470	0,0517	0,0505	0,0538	0,0518	0,0544	0,0520	0,0892	0,0839	0,231	0,212
0,0483	0,0473	0,0519	0,0498	0,0536	0,0514	0,0543	0,0517	0,0893	0,0844	0,233	0,209
0,0485	—	—	0,0500	0,0537	0,0518	—	—	—	—	0,234	0,210
0,0484	0,0472	0,0518	0,0501	0,0537	0,0517	0,0544	0,0519	0,0893	0,0842	0,233	0,210

C Alibert-Graphit		Messing 1,2 % Sn, 0,44 % Pb		PbSn		Pb_2Sn		$PbSn_2$	
0,142	0,105	0,0873	0,0808	0,0387	0,0374	0,0320	0,0312	0,0473	0,0452
0,139	0,106	0,0873	0,0804	0,0391	0,0373	0,0325	0,0313	0,0476	0,0449
0,141	0,106	—	—	—	—	—	—	—	—
0,141	0,106	0,0873	0,0806	0,0389	0,0374	0,0323	0,0313	0,0475	0,0450

1) Hier, und in allen folgenden Tabellen, sind die Metalle nach ihrem Atomgewicht geordnet.

Tabelle II.

Mittlere specifische Wärmen.

	1[1])	2	3		1[1])	3	3
	+ 100° bis + 18°	+ 18° bis − 79°	− 79° bis − 186°		+ 100° bis + 18°	+ 18° bis − 79°	− 79° bis − 186°
b	0,0310	0,0300	0,0291	Zn	0,094	0,0893	0,0798
t	0,0324	0,0311	0,0277	Cu	0,093	0,0883	0,0716
r	0,0323	0,0303	0,0263	Ni	0,109	0,0988	0,0748
b	0,050	0,0484	0,0462	Fe	0,113	0,0999	0,0721
n	0,055	0,0518	0,0486	Al	0,22	0,195	0,153
d	0,056	0,0537	0,0498	Mg	0,25	0,233	0,189
g	0,056	0,0544	0,0496	C	0,197	0,141	0,075
d	0,059	0,0567	0,0491				

1 + 18° bis — 186° der jetzt untersuchten Metalle, des aphits und der Legirungen.

In Tab. II sind die mittleren specifischen Wärmen von en von mir untersuchten Metallen und des Graphits zu- nmengestellt und zwar 1. für das Gebiet + 100° bis + 18°[1]); + 18° bis − 79°; 3. −79° bis − 186°. Die Werte der tten Columne sind aus denen der Tab. I berechnet.

In Tab. IIb finden sich die mittleren specifischen Wärmen · untersuchten Legirungen und zwar immer nebeneinander beobachteten und die aus den specifischen Wärmen der standteile mit Hülfe der Mischungsregel berechneten. Es r ein solcher Vergleich besonders deshalb hier von Interesse, il er Aufschluss geben musste darüber, wie stark die Un- nheit der untersuchten Metalle die Resultate beeinflussen ıne. Nur wenn die Mischungsregel auch in diesen Ge- ten mit hinreichender Genauigkeit befolgt wurde, war Möglichkeit, dass die Beimischungen zu gröberen Fehlern ranlassung gäben, ausgeschlossen. In anderen Temperatur- ervallen haben viele Messungen bewiesen, dass bei Legirungen Mischungsregel immer annähernd gültig ist, sobald man h nur nicht dem Schmelzpunkt zu sehr nähert.

1) Mittelwerte nach bekannten Autoren.

Tabelle IIb.

Mittlere specifische Wärmen.

	+100° bis +18°		+18° bis −79°		−79° bis −186°	
	beob.	ber.	beob.	ber.	beob.	ber.
Pb_6Sn	—	—	0,0323	0,0319	0,0304	0,0306
PbSn	0,0407 [1])	0,0395	0,0389	0 0379	0,0360	0,0356
(47 Pb 53 Sn	0,0451 [1])	0,0437)	—	—	—	—
$PbSn_6$	—	—	0,0475	0,0469	0,0428	0,0437
Messing	0,093	0,093	0,0873	0,0880	0,0743	0,0750

Die hier beobachteten Werte zeigen kleine Abweichungen nach beiden Seiten von den berechneten. Im grossen und ganzen kann man, wie zu erwarten war, die Mischungsregel als erfüllt betrachten.

7. In Tab. III finden sich die mittleren Atomwärmen für dieselben Gebiete. Bei der Berechnung wurden die von der Deutschen chemischen Gesellschaft festgesetzten[2]) Atomgewichte benutzt.

Tabelle III.

Mittlere Atomwärme.

	Atom-gewicht	+100° bis +18°	+18° bis −79°	−79° bis −186°		Atom-gewicht	+100° bis +18°	+18° bis −79°	−79° bis −186°
Pb	207	6,4	6,2	6,0	Zn	65,4	6,1	5,8	5,2
Pt	195 [3])	6,3	6,1	5,4	Cu	63,6	6,0	5,6	4,5
Jr	193	6,2	5,8	5,1	Ni	58,7	6,4	5,8	4,3
Sb	120	6,0	5,8	5,5	Fe	56,0	6,3	5,6	4,0
Sn	118,5	6,5	6,1	5,8	Al	27,1	6,0	5,3	4,2
Cd	112	6,3	6.0	5,6	Mg	24,4	6,1	5,7	4,6
Ag	107,9	6,0	5,9	5,4	C	12,0	2,4	1,7	0,9
Pd	106	6,3	6,0	5,2					

1) Nach Regnault.
2) Berichte der Deutschen chem. Gesellsch. 31. p. 2761. 1898.
3) Statt 196, l. c.

Aus dieser Tabelle ersieht man den Verlauf der mittleren specifischen Wärmen noch besser als aus den voraufgehenden. Darnach bleibt der schon im ersten Teile der Arbeit ausgesprochene Satz bestehen, dass die specifischen Wärmen unter 0° mit sinkender Temperatur durchweg abnehmen, und zwar im allgemeinen um so stärker, je kleiner das Atomgewicht des betreffenden Metalles ist und zu je tieferen Temperaturen man herabsteigt.

8. Wissenswert erscheinen nun nicht allein die mittleren specifischen Wärmen für ein grösseres Temperaturgebiet, sondern oft auch die wahren specifischen Wärmen für eine bestimmte Temperatur; und da bei fast allen untersuchten Körpern die Abnahme der specifischen Wärme mit sinkender Temperatur erheblich zunimmt, so ist eine einfache lineare Interpolation kaum statthaft, sie würde zu kleine Werte liefern. Es sind daher im Folgenden die wahren specifischen Wärmen berechnet. Dabei wurde in gebräuchlicher Weise die Abhängigkeit der wahren specifischen Wärme c von der Temperatur t[1]) vereinfacht auf die parabolische Beziehung:

$$c = A + Bt + Ct^2.$$

Bekannt sind für drei verschiedene Gebiete die mittleren specifischen Wärmen $c_{1,2}$; nun haben wir, wenn $Q_{1,2}$ die Wärmemenge bedeutet, die erforderlich ist zur Erwärmung eines Grammes von t_1 auf t_2:

$$c_{1,2} = \frac{Q_{1,2}}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_1^2 c\,dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_1^2 (A + Bt + Ct^2)\,dt$$

$$= A + \frac{B}{2}(t_2 + t_1) + \frac{C}{3}(t_2^2 + t_2 t_1 + t_1^2).$$

Und durch Einsetzen der drei bekannten $c_{1,2}$ erhält man die Constanten A, B und C, die in der folgenden Tab. IV zusammengestellt sind.

1) Eispunkt gleich 0°.

Tabelle IV.

	A	*B*	*C*	Bemerkungen.
Pb	0,0303	0,0000108	$+0{,}0_5 00123$	*C* positiv.
Pt	0,0318	0171	− 00984	
Jr	0,0312	0247	− 00885	
Sb	0,0490	0183	− 00192	
Sn	0,0528	0352	+ 00231	*C* positiv.
Cd	0,0546	0274	− 00660	
Ag	0,0553	0218	− 0153	
Pd	0,0581	0324	− 0256	
Zn	0,0908	0580	− 0213	
Cu	0,0913	0676	− 0583	
Ni	0,103	135	− 0606	
Fe	0,106	164	− 0660	
Al	0,205	298	− 0693	
Mg	0,232	224	− 1270	
C	0,161	628	− 0112	

Die Sicherheit dieser Zahlen ist gering; besonders weil die zur Berechnung benutzten mittleren specifischen Wärmen für das Gebiet $+100^0$ bis $+18^0$ in anderer Weise mit anderem Material gewonnen sind.

9. Anschaulicher wird der Verlauf der Abhängigkeit der specifischen Wärmen von der Temperatur aus den Curven der beigegebenen Taf. II. Auffallend sind zunächst die fast geradlinigen Curven für Pb, Sb, Sn und C. Dass die Krümmung der Curven für Pb und Sn eine entgegengesetzte zu sein scheint (entsprechend den +Werten von C [Tab. IV]), als bei den anderen, kann wohl auf Versuchsfehlern beruhen. Die starke Abnahme der specifischen Wärme des Graphits nimmt (wie auch oberhalb 0^0) zwischen 0^0 und -200^0 noch schwach zu; schliesslich muss aber ein Wendepunkt kommen, da man sonst schon bei -250^0 zu negativen Werten gelangen würde. Für Sb und Cd haben andere Autoren[1]) ein geringes Zunehmen der specifischen Wärmen mit sinkender Temperatur (zwischen 0^0 und -80^0) gefunden. Zahlenangaben über die Reinheit der von mir verwandten Metalle kann ich allerdings leider nicht machen; dass aber die Beimischungen so gross

1) Vgl. l. c.

gewesen sein sollten, um allein die Abnahme zu erklären, ist sehr unwahrscheinlich.

Ueberall haben wir ein Abnehmen der specifischen Wärmen mit abnehmender Temperatur, und diese Abnahme ist, wie schon oben für die mittleren specifischen Wärmen bemerkt, für die (leichten) Metalle mit kleinem Atomgewicht am grössten. Allein die im ersten Teil der Arbeit ausgesprochene Vermutung, dass alle Curven für die absolute Temperatur 0° *einem* Punkte zustrebten, kann, wenn man die inzwischen untersuchten Metalle in Betracht zieht, nicht aufrecht erhalten werden. Jedoch scheint noch eine andere Gesetzmässigkeit in dem auf den ersten Blick ziemlich wirren Verlauf der Curven vorhanden zu sein; darauf soll am Schluss der Abhandlung näher eingegangen werden.

10. Zum bequemeren Gebrauch sind in der folgenden Tab. V für diejenigen Temperaturen, bei denen man am bequemsten arbeitet, +18°, 0°, −79° und −186°[1]) die wahren specifischen Wärmen zusammengestellt. Zu derselben ist folgendes zu bemerken: Die Annahme einer parabolischen Abhängigkeit der specifischen Wärmen von der Temperatur, die ja nur der Einfachheit wegen gewählt ist, wird den Thatsachen zum Teil nur schlecht entsprechen, und vornehmlich bei den äussersten Werten, für +18° und 0° einerseits und −186° andererseits, merkliche Fehler hervorrufen; besonders bei der Zimmertemperatur, da hier vielfach Wendepunkte in der Nähe zu liegen scheinen. Glücklicherweise ist es aber gerade hier möglich, wahrscheinlichere Werte anzugeben, da ja die Abhängigkeit der specifischen Wärmen von der Temperatur oberhalb 0° meist bekannt sind. Benutzt man für die Zimmertemperatur Formeln, die oberhalb 0° gelten, so wird man von den von mir berechneten im allgemeinen abweichende Werte erhalten, und zwischen beiden kann man dann etwa durch graphisches Interpoliren[2]) die wahrscheinlichsten Werte finden. Die so erhaltenen Curvenstücke sind auf der Taf. II punktirt;

1) Da die flüssige Luft ihren Siedepunkt stetig von ca. −190° bis −182° ändert, wurde −186° als mittlere Temperatur genommen.

2) Dabei ist möglichst so interpolirt, dass die mittlere specifische Wärme dieselbe bleibt, dass also die Grösse des zwischen der Curve und der Ordinatenaxe liegenden Flächenstücks (Wärmemenge) sich nicht ändert.

ihnen entsprechen in Tab. V die Zahlen, die hinter den eingeklammerten stehen. Uebrigens ist die Correctur nur dort vorgenommen, wo sich erhebliche Discrepanzen bemerkbar machten, wie besonders beim Cu; ferner beim Ag, Pd und Al.

Bemerkenswert ist die specifische Wärme des Graphits, die für -186^{0} bereits auf 0,0405 herabgesunken ist; die Atomwärme beträgt hier also nur noch $12.0{,}0405 = 0{,}486$, also weniger als $^{1}/_{10}$ ihres Wertes bei hohen Temperaturen.

Tabelle V.

	Specifische Wärme bei			
	$+18^{0}$	0^{0}	-79^{0}	-186^{0}
Pb	0,0305	0,0303	0,0296	0,0288
Pt	0,0321	0,0318	0,0297	0,0259
Jr	0,0312	0,0312	0,0287	0,0237
Sb	0,0494	0,0490	0,0474	0,0450
Sn	0,0535	0,0528	0,0502	0,0471
Cd	0,0550	0,0546	0,0520	0,0473
Ag	(0,0556) 555	(0,0553) 552	0,0526	0,0459
Pd	(0,0585) 582	(0,0581) 577	0,0539	0,0433
Zn	0,0918	0,0908	0,0849	0,0727
Cu	(0,0922) 916	(0,0913) 907	0,0822	0,0588
Ni	0,1053	0,0034	0,0888	0,0572
Fe	0,1087	0,1060	0,0888	0,0525
Al	(0,2106) 2125	(0,2053) 2075	0,177	0,126
Mg	0,2348	0,2320	0,209	0,146
C	0,1730	0,1610	0,111	0,041

11. Zum Schluss können wir uns noch die Frage vorlegen, inwieweit die Ergebnisse dieser Arbeit mit den theoretisch begründeten Ansichten über die specifische Wärme fester Körper im Einklange stehen.

Solche existiren bis jetzt überhaupt nur von seiten der kinetischen Betrachtungsweise, insbesondere hat Hr. Richarz[1]) aus wenigen allgemeinen Annahmen über die Atombewegung Schlüsse gezogen, die sich zum Teil sehr gut in den Ergebnissen der experimentellen Forschung bestätigten. Was die Einzelheiten der Deduction betrifft, verweise ich auf die citirte

1) F. Richarz, Wied. Ann. 48. p. 708. 1893.

Abhandlung. Hier will ich von diesen Schlüssen nur einen hervorheben, dass nämlich die Elemente, die der Regel von Dulong und Petit bei Zimmertemperatur nicht folgen, eine besonders starke Abhängigkeit ihrer specifischen Wärme von der Temperatur aufweisen, und dass der Grund beider Erscheinungen darin zu suchen ist, dass bei diesen die Verrückungen der Atome gegen die Atomabstände nicht mehr verschwinden. Dies wird eintreten, einmal dann, wenn die Atomabstände klein sind; zweitens dann, wenn die Verrückungen gross sind. Letzteres wird unter sonst gleichen Umständen offenbar dort der Fall sein, wo das Atomgewicht klein ist, da Atome von geringem Gewicht grössere Geschwindigkeiten, also auch grössere Elongationen erreichen müssen. Treffen gar beide Bedingungen zusammen, so ist die grösste Abhängigkeit von der Temperatur zu erwarten.

Hr. Richarz hat diese Beziehungen nur bei Elementen bis zum Atomgewicht 40 hinauf verificirt, da sich bei noch grösseren Atomgewichten keine erheblichen Abweichungen vom Dulong-Petit'schen Gesetz mehr finden. Aber wenn auch das nicht der Fall ist, so ist doch die Abhängigkeit der specifischen Wärmen von der Temperatur hier noch sehr verschieden[1]) und dieser Umstand wird es ermöglichen, bis zum Blei hinauf die von Herrn Richarz begründeten Beziehungen nachzuweisen.

In den Tabellen dieser Arbeit sind die Metalle immer nach dem Atomgewicht geordnet aufgeführt und auch auf der Taf. II finden sich die Curven wesentlich in derselben Ordnung. Zur Orientirung, wie sich nun die Atomvolumina mit wachsendem Atomgewicht ändern, ist noch die Figur[2]) (p. 268) beigegeben. Sieht man zunächst einmal davon ab, dass der Gang der Atomvolumina ein periodischer ist, so kann man sagen, dass im allgemeinen die Atomvolumina mit wachsendem Atomgewicht zunehmen, etwa so, wie (in der Figur) die grob gestrichelte Linie angiebt.

Es müssen also die auf der Figur mehr rechts stehenden Elemente aus zwei Gründen grosse Veränderlichkeit ihrer

---

1) Genau genommen schliesst dieses übrigens das erstere ein. Man vergleiche die Atomwärmen für ca. -130° (z. B. Tab. III, letzte Columne). Statt 6,4 wäre hier etwa 5,5 als Constante zu nehmen. Dass man in der Regel die Atomwärmen bei Zimmertemperatur zum Vergleich benutzt, ist doch willkürlich.

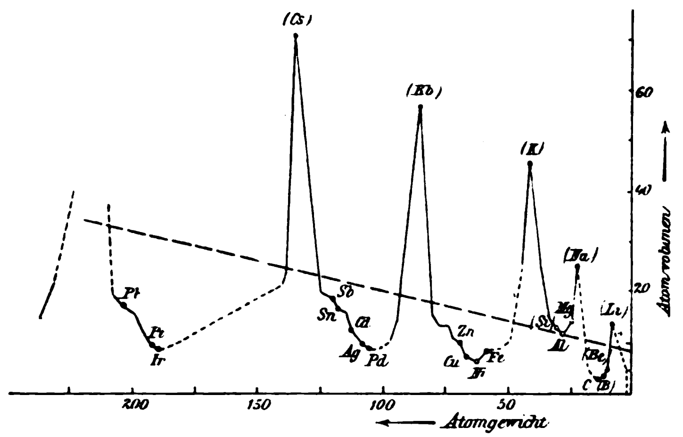
2) Nach Lothar Meyer.

specifischen Wärmen zeigen: erstens weil ihr Atomgewicht klein ist, und dann weil im allgemeinen auch ihr Atomvolumen klein ist.

Und das ist, wie ein kurzer Blick auf die Taf. II lehrt, in der That der Fall.

Gehen wir aber nun näher auf die Perioden der Atomvolumen ein, so finden wir an den Minimumstellen (vgl. Figur, rechts anfangend): 1. C, (B[1]), Be); 2. Al, (Si), Mg; 3. Ni, Cu, Fe; 4. Pd, Ag; 5. Jr, Pt.

Dazwischen mit grösserem Atomvolumen: Zn; Cd, Sn, Sb; Pb.



Die Elemente nun, die an den Minimumstellen stehen, haben mit ihren Nachbarn verglichen, wesentlich das gleiche Atomgewicht wie diese, aber ein kleineres Atomvolumen. Bei ihnen ist also die eine Bedingung für grössere Veränderlichkeit der specifischen Wärmen besser erfüllt als bei ihren Nachbarn. Dementsprechend unterscheidet sich wirklich (vgl. Taf. II) Jr und Pt vom Pb; Pd und Ag von Cd, Sn, Sb; Fe, Ni, Cu von Zn.

Allerdings sind diese Unterschiede nicht eben sehr gross; entscheidend wäre hier das Verhalten der Elemente mit maximalem Atomvolumen: Li, Na, K, Rb, Cs.

Berlin, Physik. Institut d. Univ., Mai 1899.

Nach Abschluss obiger Arbeit erfuhr ich, dass Herr C. C. Trowbridge[2]) ebenfalls einige Metalle (Cu, Fe, Al) auf

1) Abgesehen von den in Klammern hinzugefügten, sind nur hier untersuchte Elemente aufgeführt.

2) C. C. Trowbridge, Science N. S. 8. p. 6. 1898.

ihre specifische Wärme bei tiefen Temperaturen untersucht hat. Er findet Werthe, die erheblich grösser als die meinigen sind. Es ist jedoch hierbei hervorzuheben, dass Hr. C. C. Trowbridge einmal annimmt, die Temperatur flüssiger Luft sei nach längerem Sieden (— allowed to boil for a considerable [?] time) 181,4° und zweitens die Metallstücke direct in die flüssige Luft eintaucht.

Aeussere Umstände verschoben die Publication der obigen und der folgenden Arbeit. In letzterer ist die Anmerkung 1, p. 274, jetzt eingefügt.

Berlin, den 10. Januar 1900.

(Eingegangen 11. Januar 1900.)

5. *Ueber die Sublimationswärme der Kohlensäure und die Verdampfungswärme der Luft;*
von U. Behn.

Kennt man die mittlere specifische Wärme irgend eines Körpers für die Gebiete + 18° bis − 79° und + 18° bis − 186°, so lässt sich mit geringer Mühe die Sublimationswärme der Kohlensäure und die Verdampfungswärme der Luft bestimmen.

Man kann z. B. ein Metallstück von Zimmertemperatur in flüssige Luft einbringen, die im übrigen gut gegen Wärmezufuhr von aussen geschützt ist. Die flüssige Luft wird dann solange sieden, bis das Metall ihre Temperatur angenommen, d. h. eine bestimmte und bekannte Wärmemenge abgegeben hat. Fängt man die verdampfte Luft in einem Gasometer auf und misst nun ihr Volumen unter Berücksichtigung des Druckes und der Temperatur, so hat man damit alle nötigen Bestimmungsstücke.

Fig. 1.

Um dies auszuführen diente folgende Anordnung. Die flüssige Luft befand sich in einem cylindrischen Vacuumgefäss V_1 (vgl. Fig. 1), das seinerseits wieder in flüssiger Luft stand. Dieses Gefäss ist durch einen doppelt durchbohrten Gummistöpsel verschlossen. Das Glasrohr R_1 führt zu einem Dreiweghahn, mit Hülfe dessen man die verdampfte Luft entweder zu einem Messcylinder oder in ein Gasometer leiten kann. Das weitere Glasrohr R_2, das in die zweite Bohrung gesteckt ist, ist 22 cm lang, oben geschlossen, und dient zur Aufnahme des cylindrischen Metallstückes vor dem Versuch. Letzteres hängt an einem dünnen Seidenfaden, der, zum Ablaufen fertig, um die Spitze des verschliessenden Gummipfropfen G gewickelt ist. Gehalten

:d der Metallcylinder vorläufig durch einen Quetschhahn, der
a Faden in dem Schlauchstück S festklemmt. Durch das an-
blasene Röhrchen r ist ein Thermometer luftdicht eingeführt.

Der Versuch wird nun folgendermaassen ausgeführt: Der
eiweghahn des Röhrchens R_1 steht zunächst so, dass die
:dampfende Luft in. den Messcylinder gelangt. In diesem
:d von Minute zu Minute das verdampfte Luftquantum, das
läufig sehr gering ist, abgelesen. Dann, beim Beginn einer
nute, wird der Hahn auf Verbindung mit dem Gasometer
stellt, und nun der Metallcylinder ganz herabgelassen. Die
ssige Luft siedet stürmisch einige Minuten, während welcher
it das Metall allmählich ihre Temperatur annimmt. Nun
eht man den Hahn wieder auf Verbindung mit dem Mess-
.inder und erkennt an der pro Minute aufgefangenen Luft-
nge, wann vollständiges Wärmegleichgewicht zwischen Metall
d flüssiger Luft eingetreten ist. Mit der festen Kohlensäure
rde ebenso verfahren; im Gasometer befand sich bei letzteren
rsuchen abgestandenes Selterwasser; bei den Versuchen mit
ssiger Luft war das Wasser im Gasometer vorher durch
hütteln mit stark sauerstoffhaltiger Luft gesättigt.

Es mögen hier zunächst die Daten eines Versuches aus-
rlich Platz finden.

Versuch mit flüssiger Luft.

Aluminiumcylinder: 16,38 g; 16°. Gasometerwasser: 13,5°.

Zeit	Volumen	
$10^h\,57^m$	12 ccm	
58	14 „	
59	14 „	
		Hahn gedreht (vgl. oben)
$11^h\,00^m$		
1	8265 ccm	
2		
		Hahn zurückgedreht
$11^h\,3^m$	34 ccm	
4	20 „	
5	14 „	
6	13 „	

8265 − 3 . 14 + 20 + 6 = 8249 ccm = 7860 ccm von 0° [1]),

16,38 . 0,173 . 199 [2]) : 7860 . 0,001 416 [3]) = 50,7 Cal.

1) Der Druck war hier zufällig 760 mm.
2) Von + 16° bis − 183°.
3) Sauerstoff mit 7 Proc. Stickstoff von 0°.

Nämlich: Zugeführte Wärmemenge durch Gewicht der verdampften Luft gleich Verdampfungswärme.

Mit flüssiger Luft wurden zwei Versuche ausgeführt. Dieselben ergaben:

50,7 Cal.
50,8 „
———
50,8 Cal. im Mittel.

Mit fester Kohlensäure ebenfalls zwei:

142,0 Cal.
142,8 „
———
142,4 Cal. im Mittel.

Es ist bei diesen Versuchen wichtig, dass das Metallstück ganz eingetaucht wird, weil seine Wärme sonst nicht nur die Verdampfung veranlasst, sondern auch noch das verdampfte Gas weiter erwärmt. Deshalb war es nötig, die Kohlensäure mit einer Flüssigkeit gemischt zu verwenden; und zwar wurde absoluter Alkohol hierzu genommen. Bei den Vorversuchen war ich so verfahren, dass ich nur feste Kohlensäure in das innere Gefäss einbrachte, und sie derart zusammenstampfte (Fig. 2), dass ein cylindrisches Loch von passender Grösse in der Mitte übrig blieb, damit das Metall möglichst der festen Kohlensäure anliege. Aber je nach der zufälligen Lage wird das Metall zum grösseren oder kleineren Teil auch durch die schon verdampfte Kohlensäure gekühlt; dementsprechend stimmten die Werte, die diese Versuche gaben, untereinander schlechter überein, und waren ca. 10 Proc. grösser, als die oben mitgeteilten.

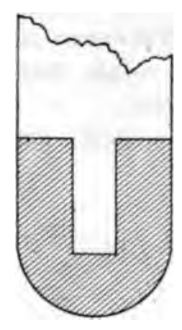


Fig. 2.

Eine andere Fehlerquelle ist folgende: Würde sich das Gefäss V_1 einfach in Zimmertemperatur befinden, so würden die inneren Wände über der flüssigen Luft (bez. dem Alkohol-Kohlensäure-Gemische) erheblich wärmer sein als diese. Es wird nun beim Einsenken des warmen Metalles die Flüssigkeit aufkochen und so mit den wärmeren Stellen der Wand in Berührung kommen; es muss dann also vielmehr verdampfen, als der Wärmezufuhr durch das Metallstück entspricht. —

Nun befand sich ja in Wirklichkeit bei den Versuchen das Gefäss V_1 tief in flüssiger Luft bez. Kohlensäure-Alkohol-Gemisch und die innere Flüssigkeit wurde jedesmal kurz vor dem Versuch umgeschwenkt, aber ganz so kalt, wie die Flüssigkeit, werden die Wände doch nicht gewesen sein.

Der Metallcylinder oben in der Röhre ist für die wenigen Minuten vor dem Versuch durch die Länge des Rohres R_2 und vor allem dadurch vor vorzeitiger Abkühlung geschützt, dass das ihn umgebende wärmere Gas ja erheblich leichter ist, als das unten durch R_1 ausströmende. In den Messcylinder bez. das Gasometer gelangt letzteres erst, nachdem es durch Wasser von Zimmertemperatur gegangen ist. Es ist vorausgesetzt, dass es hierbei diese Temperatur mit hinreichender Genauigkeit annimmt. Die Anfangstemperatur des Metallstückes ist auf 1° genau gemessen; die der Luft bez. der Kohlensäure, mit derselben Genauigkeit etwa, geschätzt auf $-79°$ und $-183°$.

Mit Hülfe der so erhaltenen Verdampfungs- und Sublimationswärme können wir nun eine Grösse berechnen, deren experimenteller Bestimmung sich grosse Schwierigkeiten entgegenstellen: es ist das die Dichte der Luft und der Kohlensäure im gasförmigen Zustande bei $-183°$ bez. $-79°$.[1]) Die mechanische Wärmetheorie liefert uns nämlich die sowohl auf Verdampfung wie auf Sublimation anwendbare Formel

$$J \cdot r = T \frac{dP}{dT} (s - \sigma),$$

worin J das Wärmeäquivalent ist, r die Verdampfungs- bez. Sublimationswärme, T die absolute Temperatur, dP/dT der Temperaturcoefficient des Siede- bez. Sublimationspunktes, s und σ die specifischen Volumina im luftförmigen und flüssigen bez. festen Zustande.

Wenn wir berücksichtigen, dass σ gegen s klein, also zu vernachlässigen ist, erhalten wir für letzteres

$$s = \frac{J \cdot r}{T \cdot \dfrac{dP}{dT}},$$

1) und Atmosphärendruck, d. h. also als gesättigter Dampf.

die Zahlenwerte für Kohlensäure eingesetzt, giebt

$$s = \frac{422 \,.\, 10^5 \,.\, 142{,}4}{194 \,.\, 733\,00\,^{1)}} = 423 = \frac{1}{0{,}00237}\,.$$

Amagat[2]) hat die Dichte der gasförmigen Kohlensäure bis 0° herab untersucht. Extrapolirt man auf Grund seiner Bestimmungen für − 79°, so findet man etwa 1/0,0025 für s.

Bei den Versuchen mit flüssiger Luft handelt es sich um sehr sauerstoffreiche Luft. Wir wollen die Annahme machen, es sei dieselbe ein Gemisch von 93 Proc. Sauerstoff und 7 Proc. Stickstoff gewesen. Hierfür haben nämlich die Herren Holborn und Wien[3]) den Temperaturcoefficienten des Siedepunktes bestimmt und zwar zu 50 mm Quecksilber pro 1 Proc. Wir erhalten also

$$s = \frac{422 \,.\, 10^5 \,.\, 50{,}8}{90 \,.\, 66700} = 358 = \frac{1}{0{,}00280}\,.$$

Eine Berechnung des specifischen Volumens unter Voraussetzung des Gay-Lussac'schen Gesetzes ($\alpha_v = 0{,}00367$) liefert einen erheblich grösseren Wert, nämlich 1/0,00237.

Berlin, Physikal. Institut der Universität, Mai 1899.

---

1) dP/dT nach Faraday bei Atmosphärendruck etwa 70 mm Quecksilberdruck pro 1°. Eine kürzlich ausgeführte Messung derselben Grösse durch die Herren H. du Bois und A. P. Wills (Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 1. p. 168. 1899) hat 55 mm ergeben. Da die neuere Messung wohl die zuverlässigere ist, so ist der Wert 55 mm pro 1° hier eingesetzt.

2) E. H. Amagat, Ann. de chim. et de phys. (4) 29. p. 252. 1878.

3) L. Holborn u. W. Wien, Wied. Ann. 59. p. 213. 1896.

(Eingegangen 11. Januar 1900.)

Ueber adiabatische Zustandsänderungen eines ystems, bestehend aus einem Krystall und seiner Schmelze; von G. Tammann.

Die Untersuchung adiabatischer (isentropischer) Zustandsderungen eines Systems, bestehend aus einem Krystall im eichgewicht mit seiner Schmelze, führt, wie im Folgenden zeigt wird, zum Schluss, dass bei solchen Processen in vielen illen das Gleichgewicht nicht merklich gestört wird. Ist r einen Krystall und seine Schmelze dieser Beziehung gegt, so ergeben sich einige einfache Gleichungen für die ermischen Haupteigenschaften des Krystalles und seiner hmelze. Diese Gleichungen können dann direct an der Erırung geprüft werden. Ihre Bestätigung durch die Erfahrung ırde den ersten Schluss betreffs der Erhaltung des Gleichwichtes bei adiabatischer Zustandsänderung stützen.

ırscheinungen, die zu erwarten sind, wenn die adiabatischen Curven die Schmelzcurve schneiden.

Bezeichnet $d_s T'/dp$ die Aenderung der Temperatur bei iabatischer Druckänderung um die Druckeinheit für die üssigkeit, $d_s T''/dp$ dieselbe für den Krystall und (dT/dp) ı Aenderung der Schmelzpunkte für die Einheit der Druckderung, so giebt folgende Zusammenstellung eine Uebersicht r verschiedenen Möglichkeiten, die bei adiabatischer Druckderung eines Systems, bestehend aus einem Krystall und ner Schmelze, beim Druck und der Temperatur des Gleichwichtes eintreten können.

$$\frac{d_s T'}{dp} > \frac{d_s T''}{dp} > \left(\frac{dT}{dp}\right),$$

$$\frac{d_s T''}{dp} > \frac{d_s T'}{dp} > \left(\frac{dT}{dp}\right),$$

$$\left(\frac{dT}{dp}\right) > \frac{d_s T'}{dp} > \frac{d_s T''}{dp},$$

$$\left(\frac{dT}{dp}\right) > \frac{d_s T''}{dp} > \frac{d_s T'}{dp},$$

$$(5) \qquad \frac{d_s T'}{d p} > \left(\frac{d T}{d p}\right) > \frac{d_s T''}{d p},$$

$$(6) \qquad \frac{d_s T''}{d p} > \left(\frac{d T}{d p}\right) > \frac{d_s T'}{d p}.$$

Aendert man in einem Gefäss, in dem sich das Gemenge von Krystallen und ihrer Schmelze anfangs bei der Temperatur und unter dem Druck des Gleichgewichtes befinden, plötzlich den Druck, so wird, wenn eine der sechs Ungleichheiten besteht, zuerst eine Krystallisation oder Schmelzung auf Kosten der durch den adiabatischen Process dem System zur Verfügung gestellten Wärmemenge vor sich gehen, dieser wird dann eine weitere Druckänderung folgen, die bedingt und regulirt wird von dem Streben des Systems, sich den neuen Gleichgewichtsbedingungen unter den gegebenen Bedingungen des Wärmeabflusses anzupassen. Diese letzte Druckänderung muss aber, weil sie an den Wärmeabfluss gebunden ist, viel langsamer vor sich gehen als die erste, für die allein bestimmend die maximale Krystallisations- und Schmelzgeschwindigkeit sind.

In den einzelnen der sechs Fälle hätte man, wenn beim Schmelzen Volumenvergrösserung eintritt, folgende Vorgänge zu erwarten:

In den Fällen (1) und (2) würde nach schneller Drucksteigerung bei constanter Temperatur der Umgebung die Temperatur über die des Gleichgewichtes steigen, also schnelle Schmelzung vor sich gehen, infolge dessen würde der Druck noch nachträglich schnell steigen, ein Maximum erreichen und dann entsprechend dem Wärmefluss aus dem Gemenge von Krystallen und Flüssigkeit auf den ursprünglichen Gleichgewichtsdruck zurückfallen. Bei schneller Druckerniedrigung müsste zuerst noch ein Nachfallen und dann erst der Druckanstieg erfolgen.

In den Fällen (3) und (4) würde der anfänglichen Drucksteigerung eine schnelle Krystallisation, der ein rascher Druckabfall entspricht, folgen. Dieser würde dann in einen langsameren Druckabfall, entsprechend dem Wärmeabfluss nach dem Bade, übergehen. Bei schneller Druckerniedrigung würde der Druck zuerst schnell, dann langsam steigen. In beiden Fällen muss sich in der Curve, welche die Drucke in ihrer Abhängig-

it von der Zeit darstellt, eine schnelle Aenderung des Druck-
lles oder des Druckanstieges finden.

Im Falle (5) würde nach der plötzlichen Drucksteigerung, e Flüssigkeit auf eine Temperatur gebracht, die höher ist s die zum neuen Druck gehörige Schmelztemperatur, und r Krystall auf eine tiefere Temperatur. Bei Druckerniedri-ıng würde das Gegenteil stattfinden, es würde Flüssigkeit ystallisiren und die Krystalle würden schmelzen, je nachdem r eine oder der andere Process überwiegt, würden dann ab-schwächte Erscheinungen, entsprechend den Fällen (1) und (2) ler (3) und (4), sich bemerkbar machen. Im Falle (6) werden e entgegengesetzten Erscheinungen des Falles (5) eintreten.

Um die beschriebenen Erscheinungen, die nach adiaba-ıchen Druckänderungen auftreten können, von ihrer quanti-tiven Seite kennen zu lernen, führen wir eine angenäherte ɔrechnung für einen fingirten mittleren Stoff, der unter Vo-menvermehrung schmilzt, aus und legen derselben die fac-ıchen Verhältnisse eines Apparates, in dem die adiabatischen ruckänderungen ausgeführt wurden, zu Grunde. Das Gefäss s Apparates fasste 50 ccm. Einer Druckänderung von 5 Atm. ıtsprach eine Verschiebung des Manometerzeigers auf dem fierblatt von 1 mm. Dieser Druckänderung entsprach zwischen 100 bis 2000 Atm. eine Volumenänderung des Gefässes von 02 ccm. Ist die Schmelztemperatur 0°, $(dT/dp) = 0{,}02^0$ ıd unterscheiden sich die adiabatischen Coefficienten $d_s T'/dp$ ıd $d_s T''/dp$ um 10 Proc. von (dT/dp), so würde bei einer ötzlichen Druckänderung um 100 Atm. das System auf eine emperatur gebracht werden, die sich um 0,2° von der des ıuen Gleichgewichtes unterscheidet. Es würden also, wenn e mittlere specifische Wärme des Gemenges von Krystallen ıd Flüssigkeit 0,4 und ihre Menge 50 g beträgt, 4 Cal. zu hneller Krystallisation oder Schmelzung zur Verfügung stehen. eträgt ferner die Schmelzwärme 30 Cal., so würden 0,13 g hmelzen oder krystallisiren, wobei, wenn eine Volumenände-ng von 10 Proc. eintritt, das Volumen des Gemenges sich n 0,013 ccm ändern würde. Dieser Volumenänderung würde ınn eine Druckänderung von 3,7 Atm., also eine deutlich ahrnehmbare Grösse, entsprechen.

Bei Stoffen, die unter Volumenverkleinerung krystallisiren,

habe ich bei sehr zahlreichen plötzlichen Druckveränderungen und Drucksteigerungen an verschiedenen Punkten der Schmelzdruckcurve in einem Intervall von 4000 Atm. eine Fortsetzung der Druckänderung im Sinne der ursprünglichen plötzlichen Druckänderung niemals wahrnehmen können, trotzdem die willkürlichen Druckänderungen bis 500 Atm. gingen, die nachträglichen Aenderungen also den Betrag von 20 Atm. hätten erreichen müssen.

Auch Unstetigkeiten im Druckabfall sind bei den bezeichneten Stoffen nicht bemerkt worden, und doch hätten solche sich wohl kaum der Beobachtung entziehen können, wenn die Ungleichungen (3), (4), (5) und (6) beständen, wie aus folgenden Ueberlegungen hervorgeht.

Einer plötzlichen Druckänderung um ± 100 Atm. entspricht gewöhnlich eine Aenderung der Temperatur in dem Gemenge von Flüssigkeit und Krystallen um $\pm 2^{\circ}$. Dieses ist die durch die Druckänderung verursachte Differenz zwischen der Temperatur des krystallisirenden oder schmelzenden Systems und der des Bades. In dieser Nähe der Gleichgewichtstemperatur kann weder die Schmelzung noch die Krystallisation mit der ihr eigentümlichen maximalen Geschwindigkeit vor sich gehen. Beide Processe werden in diesem und einem noch grösseren Intervall in erster Linie durch die Grösse des Wärmeflusses regulirt. Man könnte nun geneigt sein, die Geschwindigkeit des Druckabfalles der Differenz der jeweiligen Temperatur und der des Gleichgewichtes, oder der Differenz der entsprechenden Drucke, proportional zu setzen. Das ist aber nicht zulässig, weil die lineare Krystallisationsgeschwindigkeit bei kleinen Unterkühlungen bedeutend schneller mit der Unterkühlung zunimmt, als der Proportionalität entspricht. Infolge dessen kann nur behauptet werden, dass die Geschwindigkeit des Druckabfalles proportional sein wird der linearen Krystallisationsgeschwindigkeit, multiplicirt mit der Oberfläche der Krystalle und der Volumenänderung bei der Krystallisation. Die Berechnung des Druckabfalles mit der Zeit auf Grundlage dieses Ansatzes aus den direct im Rohr gemessenen linearen Krystallisationsgeschwindigkeiten bei verschiedenen Temperaturen ist deshalb nicht zulässig, weil dieselbe innerhalb des hier in Betracht kommenden Temperatur-

intervalles mit dem Lumen des Rohres, von 0,2 bis 2 mm Durchmesser schnell zunimmt, in weiteren Röhren aber nicht gut verfolgt werden kann. Jedenfalls ist die Geschwindigkeit des Druckabfalles bei Stoffen, für die $\Delta v / R$ ziemlich denselben Wert hat, wie Benzol, Naphtalin, Benzophenon, Essigsäure, Aethylendibromid etc. bei gleichen Druckabständen vom Gleichgewichtsdruck ziemlich gleich und ändert sich mit der Temperatur und dem Druck nicht erheblich. Beim Druckabstand 100 Atm. vom Gleichgewichtsdruck ist die Geschwindigkeit der Druckänderung zum Gleichgewichtsdruck hin pro Minute ca. 30—40 Atm. Nun ist die Krystallisationsgeschwindigkeit aber bei 2° unterhalb des Schmelzpunktes beim Benzophenon 0,25 mm pro Minute, während die maximale Krystallisationsgeschwindigkeit 55 mm pro Minute beträgt. Demnach müsste, wenn durch die plötzliche Druckänderung das System auf eine von der Gleichgewichtstemperatur verschiedene gebracht würde, der Abfall oder Anstieg des Druckes sofort mit einer Geschwindigkeit, die ca. 200 mal grösser ist als die bei der Druckdifferenz von 100 Atm., vor sich gehen, und zwar in einem Betrage, der unter den obigen Annahmen ca. 4 Proc. der willkürlichen Druckänderung ausmachen würde. Diese schnellen nachträglichen Druckänderungen sind bei normalen, unter Volumenvergrösserung schmelzenden Stoffen, nicht beobachtet worden, wohl aber bei allen Stoffen, die unter Contraction schmelzen, wie Wasser, oder bei Stoffen, die sich bei Temperatursteigerung unter Contraction umwandeln, wie Ammoniumnitrat und Jodsilber. Bei diesen Stoffen folgt der auf- oder abwärts gerichteten gleichmässigen Bewegung des Manometerzeigers bei der willkürlichen Druckänderung nach jedem Stillstand der Bewegung des Zeigers eine schnelle Bewegung derselben in entgegengesetzter Richtung. Die Geschwindigkeit dieser Bewegung ist so bedeutend, dass man dieselbe wohl am passendsten mit dem Worte „Zuckung“ bezeichnet. Beim Wasser und Eise beträgt die Grösse der Zuckung zwischen -10^0 und -20^0 ca. 20 Proc. der ursprünglichen Druckänderung. Die für den Unterschied in den Richtungen der adiabatischen Curven und der Schmelzcurve charakteristischen Zuckungen des Manometerzeigers sind nur bei Stoffen, deren $v' < v''$ ist, beobachtet worden, nicht aber bei den normal sich verhaltenden. Da innerhalb des

ganzen untersuchten Temperatur- und Druckintervalles, die sich bei mehreren Stoffen über 80° und 4500 Atm. erstreckten, bei keinem der normalen Stoffe eine noch so geringe Zuckung des Manometerzeigers bemerkt wurde, so ist hieraus wohl zu schliessen, dass innerhalb des bezeichneten Temperatur- und Druckgebietes die adiabatischen (isentropischen) Curven der Flüssigkeit und des Krystalles in der Nähe der Schmelzcurve dieser parallel verlaufen, oder dass durch adiabatische Druckänderungen die Mengen der beiden Phasen (Krystall und Flüssigkeit) nicht oder nur in ziemlich unerheblicher Weise geändert werden.

Folgerungen aus der Coincidenz der adiabatischen Curven mit der Schmelzcurve.

Untersuchen wir nun, welche weiteren Folgerungen sich aus diesem Resultat und zwar speciell in dem Falle, dass die Menge jeder der Phasen nach adiabatischer Druckänderung constant bleibt, ergeben. In diesem Fall gelten die folgenden Gleichungen:

$$\frac{d_s T'}{dp} = \left(\frac{dT}{dp}\right), \tag{7}$$

$$\frac{d_s T''}{dp} = \left(\frac{dT}{dp}\right), \tag{8}$$

$$\frac{d_s T'}{dp} = \frac{d_s T''}{dp}. \tag{9}$$

Ferner giebt die Thermodynamik folgende Beziehungen:

$$\frac{d_s T'}{dp} = \frac{T}{C_p'} \frac{d_p v'}{dT}, \tag{10}$$

$$\frac{d_s T''}{dp} = \frac{T}{C_p''} \frac{d_p v''}{dT}, \tag{11}$$

$$\left(\frac{dT}{dp}\right) = \frac{\Delta v\, T}{R}. \tag{12}$$

Hier bezeichnet T die absolute Temperatur, v' und v'' die Volumina der Flüssigkeit und ihres Krystalles, R die Schmelzwärme, C_p' und C_p'' die specifischen Wärmen unter constantem Druck, gemessen in mechanischem Maass, schliesslich ist $\Delta v = v' - v''$.

Vergleicht man (7) und (8) mit (10) und (11) und setzt (dT/dp) den Wert aus (12) ein, so erhält man die Glei-
ıngen

$$T\frac{d_p v'}{dT} = C_p'\frac{\Delta v\, T}{R} \quad \text{und} \quad T\frac{d_p v''}{dT} = C_p''\frac{\Delta v\, T}{R},$$

:h deren Subtraction sich

$$T\left(\frac{d_p v'}{dT} - \frac{d_p v''}{dT}\right) = \Delta v \frac{T(C_p' - C_p'')}{R} \tag{)}$$

er

$$\frac{\frac{d_p v'}{dT} - \frac{d_p v''}{dT}}{C_p' - C_p''} = \frac{\Delta v}{R} \tag{ł)}$$

giebt.

Aus (10) und (11) folgt unter Berücksichtigung von (9)

$$\frac{\frac{d_p v'}{dT}}{\frac{d_p v''}{dT}} = \frac{C_p'}{C_p''}. \tag{5)}$$

Setzt man die rechten Seiten der Gleichungen (10), (11) d (12) einander gleich, so folgt

$$\frac{\frac{d_p v'}{dT}}{C_p'} = \frac{\frac{d_p v''}{dT}}{C_p''} = \frac{\Delta v}{R}. \tag{3)}$$

Aus Gleichung (13) ergeben sich für kleine Drucke unter ıer bestimmten Annahme zwei neue Gleichungen, die direct der Erfahrung geprüft werden können. Für die Abhängig- it der Schmelzwärme von der Temperatur bei constantem ruck gilt, wie früher gezeigt wurde[1]), die Gleichung:

$$R_1 - R = (C_p' - C_p'')(T_1 - T) + p(\Delta v_{T_1} - \Delta v_T)$$
$$- p(T_1 - T)\left[\frac{d_p v'}{dT} - \frac{d_p v''}{dT}\right].$$

Hier beziehen sich die mit dem Index $_1$ bezeichneten rössen auf den Schmelzpunkt. Um über den Verlauf der obaren des Krystalles und der Flüssigkeit keine speciellen ınahmen zu machen, beschränken wir uns auf so kleine

1) Wied. Ann. 67. p. 872. 1899.

Drucke, dass die beiden letzten Glieder vernachlässigt werden können. Man hat dann:

$$R_1 - R = (C_p' - C_p'')(T_1 - T).$$

Für Stoffe, bei denen die adiabatischen Curven mit den Schmelzcurven zusammenfallen, ist die Differenz $C_p' - C_p''$ wahrscheinlich proportional der Temperatur. Da der Energieinhalt des Krystalles und der Flüssigkeit bei der Temperatur $T = 0$ Null ist, so folgt für $T = 0$ auch $R = 0$. Demnach würde unter obiger Einschränkung und der letzten Annahme die Gleichung

$$(17) \qquad R_1 = (C_p' - C_p'')\, T_1$$

gelten.

Vergleicht man (17) mit (13), so folgt:

$$(18) \qquad \Delta v_1 = T_1 \left(\frac{d_p v'}{d T} - \frac{d_p v''}{d T} \right).$$

Die Masseneinheiten einer Flüssigkeit und ihres Krystalles dehnen sich beim Schmelzpunkt so aus, als ob sich die geradlinig verlängerten Isobaren beider bei absolutem Nullpunkt schneiden würden. Diesem Satz ganz analog ist der folgende, den die Gleichung (17) giebt. Die Energiedifferenz der Masseneinheiten einer Flüssigkeit und ihres Krystalles ändert sich beim Schmelzpunkt so, als ob sie beim absoluten Nullpunkt den Nullwert annimmt.

Prüfungen der Gleichung (17) und (18) an der Erfahrung.

Das experimentelle Material, das zur Prüfung der Gleichungen (14), (15), (16), (17) und (18) zur Verfügung steht, ist nicht unbedeutend, die Werte $d_p v' / d T$, $d_p v' / d T$ und Δv sind für etwa 20 Stoffe, die Werte R, C_p' und C_p'' für ca. 30 Stoffe bestimmt. Dieses von verschiedenen Beobachtern zusammengetragene Material ist aber von recht verschiedener Beschaffenheit. Besondere Schwierigkeiten machen sich bei der Bestimmung der Quotienten $d_p v'' / d T$ und C_p'' geltend. Ist der zu untersuchende Stoff chemisch nicht in hohem Grade homogen, so ergeben sich die Werte $d_p v'' / d T$ und C_p'' immer zu gross und nehmen in der Nähe des Schmelzpunktes, weil hier in sie ein Teil der Volumenänderung beim Schmelzen bez. ein

Teil der Schmelzwärme mit eingeht, ganz ausserordentlich grosse Werte an. Darum sind $d_p v''/dT$ und C_p'' aus Daten, die sich auf möglichst weit vom Schmelzpunkt entfernte Temperaturen beziehen, zu ermitteln. Aber auch betreffs der Constanten Δv und C_p' liegen recht abweichende Angaben verschiedener Beobachter vor. Δv wird häufig, weil bei der Krystallisation leicht Luftblasen von den Krystallen eingeschlossen werden, zu klein gefunden, und C_p' ist gewöhnlich aus der Differenz zweier Wärmecapacitäten, die häufig um mehrere Procente unrichtig bestimmt wurden, gefunden worden. Aus dem vorliegenden experimentellen Material sind nur die zuverlässigeren Bestimmungen ausgewählt worden, bei dieser Auswahl ist kein Gewicht auf möglichste Vollständigkeit gelegt worden.

Es folgen die zur Prüfung der Gleichung (18) notwendigen Werte für den Druck $p = 1$ Atm. Δv, $d_p v'/dT$ und $d_p v''/dT$ sind gemessen in Cubikcentimetern und beziehen sich auf 1 g des betreffenden Stoffes. Unter „Δv berechnet" sind die Producte

$$T_1 \left(\frac{d_p v'}{dT} - \frac{d_p v''}{dT} \right)$$

verzeichnet.

	T_1	$\frac{d_p v'}{dT} \times 10^6$	$\frac{d_p v''}{dT} \times 10^6$	Δv gef.	Δv ber.
Ameisensäure (O. Petterson)	280,5	823	410	0,1015	0,1158
Essigsäure (O. Petterson)	289,5	1009	528	0,1278	0,1392
Natrium (E. Hagen)	370,6	299	216	0,029	0,031
Kalium (E. Hagen)	335	360	276	0,029	0,028
Cadmium (Vicentini und Omodei)	595	19,6	10,9	0,0056	0,0052
Zinn (Vicentini und Omodei)	500	15,6	9,4	0,0039	0,0031
Thallium (Vicentini und Omodei)	561	12,7	8,0	0,0026	0,0026
Blei (Vicentini und Omodei)	598	11,3	7,8	0,0030	0,0021

Für die Gleichung (17) können folgende Beispiele angeführt werden. c_p', c_p'' und r bezeichnen die specifischen Wärmen und die Schmelzwärmen, gemessen in calorischem Maass. Unter „r berechnet" findet man die Producte $(c_p' - c_p'') T_1$.

	T_1	c_p'	c_p''	r gef.	r ber.
Benzol (Ferche)	278	0,313	0,203	30,2	30,6
Naphtalin (Pickering)	352	0,482	0,399	24,6	29,2
$Na_2S_2O_3+5H_2O$ (Trentinaglia)	318	0,569	0,445	37,6	39,4
$PbCl_2$ (Ehrhardt)	858	0,1035	0,0707	20,9	17,3
Blei (Person)	626	0,0402	0,0320	5,4	5,1

Man darf wohl behaupten, dass die vorliegenden Ausdehnungscoefficienten, specifischen Wärmen, Schmelzwärmen und Volumenänderungen beim Schmelzen nicht gegen die Gültigkeit der Gleichungen (17) und (18) sprechen, man muss aber andererseits zugeben, dass das vorliegende, diesbezügliche Material nicht den Grad von Sicherheit besitzt, um diese Gleichungen zu stützen oder gar sicher zu stellen. Auch kann auf diesem Wege fürs erste nichts über die Gültigkeitsgrenze der Gleichungen in Erfahrung gebracht werden. Es mögen dieselben vielleicht nur angenähert gültig sein.

Es giebt aber auch Stoffe, bei denen nach adiabatischer Druckänderung das Gleichgewicht zweifellos nicht erhalten bleibt. Zu diesen Stoffen gehört vor allen Dingen das Wasser. Für Wasser ist bei 0°:

$$\frac{d_s T'}{d p} = -0{,}00058\,,$$

für Eis:

$$\frac{d_s T''}{d p} = +0{,}00115 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d T}{d p}\right) = -0{,}0088\,.$$

Hier findet sich die Beziehung

$$\frac{d_s T''}{d p} > \frac{d_s T'}{d p} > \left(\frac{d T}{d p}\right),$$

es liegt Fall (2) vor (vgl. p. 276), doch tritt hier bei der Schmelzung Contraction ein, infolge dessen ist bei der plötzlichen Drucksteigerung anfangs ein besonders schnelles Abschmelzen des Eises und dadurch ein besonders schneller Abfall des Druckes zu erwarten, das Umgekehrte bei plötzlicher Druckerniedrigung. Die Beobachtung bestätigt diese Folgerung. Dem entspricht auch der Umstand, dass beim Wasser die Gleichungen (17) und (18) sicher keine Gültigkeit besitzen,

$$\left(\frac{d_p v'}{d T} - \frac{d_p v''}{d T}\right) T_1 = -0{,}00025 \times 273 = -0{,}0602\,,$$

während Δv zu $-0{,}108$ gefunden wurde. Die Schmelzwärme würde sich nach (17) zu

$$(C_p' - C_p'')\,T_1 = -(1{,}00 - 0{,}48)\,273 = 142 \text{ Cal.}$$

berechnen, während dieselbe zu 80 Cal. gefunden wurde. Beim Wasser sind also die Gleichungen (17) und (18) nicht erfüllt, dementsprechend tritt aber auch bei plötzlichen Druckänderungen in einem Gemisch von Wasser und Eis „das Zurückzucken" des Manometerzeigers auf.

Dieses „Zurückzucken" wurde ferner noch bei der Umwandlung des Jodsilbers und den beiden Umwandlungen des Ammoniumnitrats beobachtet. Das abnorme Verhalten dieser Stoffe ist auf Grundlage ihrer thermischen Daten zu erwarten.

Für die Modificationen des Jodsilbers, die sich bei 144° ineinander umwandeln, ergiebt sich aus den Bestimmungen von G. F. Rodwell, R. Bellati und R. Romanese:

$$\frac{d_p v'}{d\,T} = 0{,}00001232, \qquad \frac{d_p v''}{d\,T} = -\,0{,}00000178,$$

$$c_p' = 0{,}0544 \quad \text{und} \quad c_p'' = 0{,}0577\,.$$

Diese Werte und der früher für $(d\,T/d\,p)$ gefundene geben die Ungleichung:

$$\underset{+\,0{,}000117}{\frac{d_s T'}{d\,p}} > \underset{-\,0{,}0000170}{\frac{d_s T''}{d\,p}} > \underset{-\,0{,}00378}{\left(\frac{d\,T}{d\,p}\right)}.$$

Es liegt also hier der Fall (1), aber mit entgegengesetzter Volumenänderung vor (vgl. p. 276). Dementsprechend ist die Zuckung des Manometerzeigers der ursprünglichen Druckänderung entgegengesetzt gerichtet.

Für das Ammoniumnitrat ergeben sich nach den Bestimmungen von Bellati und Romanese beim Umwandlungspunkt 31,8° unter dem Druck $p = 1$, bei dem sich die Modification IV beim Erwärmen in die Modification III umwandelt:

$$\frac{d_p v'}{d\,T} = +\,0{,}000095, \qquad \frac{d_p v''}{d\,T} = +\,0{,}000095\,,$$

$$c_p' = 0{,}355 \quad \text{und} \quad c_p'' = 0{,}407\,,$$

demnach besteht beim Umwandlungspunkt die Ungleichung:

$$\underset{+\,0{,}0346}{\left(\frac{d\,T}{d\,p}\right)} > \underset{+\,0{,}0032}{\frac{d_s T''}{d\,p}} > \underset{+\,0{,}0019}{\frac{d_s T'}{d\,p}}.$$

Es liegt also hier der Fall (4) vor (vgl. p. 276). In der Th[illegible] wurde hier ein schnelles Zurückfallen bez. Aufsteigen d[illegible] Manometerzeigers in entgegengesetzter Richtung der ursprün[illegible]lichen Druckänderung beobachtet.

Beim Umwandlungspunkt 84,6° des Ammoniumnitrats, [illegible] dem sich die Krystallart III in die Art II umwandelt, ist:

$$\frac{d_p v'}{d T} = + 0{,}00012, \quad \frac{d_p v''}{d T} = + 0{,}00012,$$

$$c'_p = 0{,}426 \quad \text{und} \quad c''_p = 0{,}355,$$

es besteht also die Ungleichung:

$$\overset{+\,0{,}0028}{\frac{d_n T''}{d p}} > \overset{+\,0{,}0023}{\frac{d_s T'}{d p}} > \overset{-\,0{,}022}{\left(\frac{d T}{d p}\right)}.$$

Es liegt hier der Fall (2), aber mit negativer Volumenänderung vor. Dementsprechend müsste die ursprüngliche Druckänderung von einer entgegengesetzten Zuckung des Manometerzeigers begleitet sein, wie in der That gefunden.

Bei den übrigen Stoffen, deren Schmelzcurven in den Arbeiten „Ueber die Grenzen des festen Zustandes II und III“ mitgeteilt sind, wurde das „Zurückzucken“ nicht bemerkt.

Die Abhängigkeit der Schmelzwärme von der Temperatur und vom Druck.

Wie früher gezeigt[1]), gilt für die Abhängigkeit der Schmelzwärme bei constant erhaltenem Druck ohne Vernachlässigung in allen Fällen, bei denen die Beziehung

$$\frac{d_p \varDelta v}{d T} = \frac{d_p v'}{d T} - \frac{d_p v''}{d T}$$

besteht, die Gleichung

$$\frac{d_p R}{d T} = C'_p - C''_p. \tag{19}$$

Die Abhängigkeit der Schmelzwärme vom Druck bei constant erhaltener Temperatur ist früher (l. c.) nicht richtig dargestellt. Durch Vollziehung eines isothermen Kreisprocesses, bei dem der Stoff geschmolzen, comprimirt, krystallisirt und dilatirt wird, gelangt man zur Gleichung

---

1) Wied. Ann. **67**. p. 872. 1899.

$$R_{p_1} - R_p = p\,\Delta v_p - p_1\,\Delta v_{p_1} + \int_{p_1}^{p} p\,\frac{d_T v'}{dp}\,dp$$

$$+ \int_{p_1}^{p} p\,\frac{d_T v''}{dp}\,dp - T\int_{p_1}^{p}\left(\frac{d_p v'}{dT} - \frac{d_p v''}{dT}\right)dp = 0.$$

Lässt man die Druckdifferenz $p - p_1$ bis dp abnehmen, so wird die Summe der vier ersten Glieder auf der rechten Seite gleich:

$$(p_1 + dp)\left[\Delta v_{p_1} - \left(\frac{d_T v'}{dp} - \frac{d_T v''}{dp}\right)dp\right]$$

$$- p_1\,\Delta v_{p_1} + p_1\left(\frac{d_T v'}{dp} - \frac{d_T v''}{dp}\right)dp = \Delta v_{p_1}\,dp,$$

und es folgt

$$\frac{d_T R}{dp} = \Delta v - T\left(\frac{d_p v'}{dT} - \frac{d_p v''}{dT}\right). \tag{20}$$

Gilt Gleichung (18), so wird

$$\frac{d_T R}{dp} = 0, \tag{21}$$

und die Abhängigkeit der Schmelzwärme von der Temperatur auf der Schmelzcurve wird

$$\left(\frac{dR}{dT}\right) = \frac{R}{T}. \tag{22}$$

Zu demselben Resultat gelangt man auch auf anderem Wege. Erwärmt man das Gemenge von Flüssigkeit und Krystallen und regulirt den Druck beständig in der Weise, dass das anfängliche Gleichgewicht nicht gestört wird, so beträgt unter diesen Umständen die specifische Wärme der Flüssigkeit c' und die des Krystalles c''. Bewegt sich bei adiabatischer Druckänderung die Temperatur jenes Systems auf der Schmelzcurve, so braucht das System zu seiner Erwärmung bis zur neuen Gleichgewichtstemperatur keiner Wärme, folglich sind c' und c'' gleich Null.

Da

$$c' = c_p' - T\frac{d_p v'}{dT}\left(\frac{dp}{dT}\right) \quad \text{und} \quad c' = c_p'' - T\frac{d_p v''}{dT}\left(\frac{dp}{dT}\right),$$

so ist

$$c_p' = T\frac{d_p v'}{dT}\left(\frac{dp}{dT}\right) \quad \text{und} \quad c_p'' = T\frac{d_p v''}{dT}\left(\frac{dp}{dT}\right).$$

Aus den letzten Gleichungen folgen wiederum die Gleichungen (13), (14) und (15), und aus der Gleichung

$$\left(\frac{dR}{dT}\right) = c' - c'' + \frac{R}{T}$$

Gleichung (22).

Die Krümmung der Schmelzcurven.

Fallen die adiabatischen Curven mit der Schmelzcurve zusammen, so folgt für die Krümmung der Schmelzcurven ein relativ einfacher Ausdruck, der bei Einführung der anderweitig bestimmten Grössen die gefundene Krümmung wiedergiebt.

Differenzirt man die Gleichung

$$\left(\frac{dT}{dp}\right) = \frac{\varDelta v\, T}{R},$$

indem man p als unabhängige Variabele wählt, und $\varDelta v$, T und R als abhängig von p und T betrachtet, so erhält man

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} R^2 \frac{d^2 T}{dp^2} &= R\, \varDelta v \left(\frac{dT}{dp}\right) + R\, T \left[\frac{d_T \varDelta v}{dp} + \frac{d_p \varDelta v}{dT}\left(\frac{dT}{dp}\right)\right] \\ &\quad - \varDelta v\, T \left[\frac{d_T R}{dp} + \frac{d_p R}{dT}\left(\frac{dT}{dp}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Gesetzt c' und c'' werden gleich Null, dann gelten die Gleichungen (21) und (22), es heben sich das erste und dritte Glied der vorhergehenden Gleichung auf, und der Ausdruck für $d^2 T / dp^2$ vereinfacht sich zu:

$$(24)\qquad \frac{d^2 T}{dp^2} = \frac{T}{R}\left[\frac{d_T \varDelta v}{dp} + \frac{d_p \varDelta v}{dT}\left(\frac{dT}{dp}\right)\right].$$

Die Quotienten innerhalb der Klammern haben die Bedeutung

$$\frac{d_T \varDelta v}{dp} = \frac{d_T v'}{dp} - \frac{d_T v''}{dp}$$

und

$$\frac{d_p \varDelta v}{dT} = \frac{d_p v'}{dT} - \frac{d_p v''}{dT}.$$

$d^2 T / dp^2$ wurde bei den bisher untersuchten Stücken von Schmelzcurven durchweg negativ gefunden. In der That ist die eingeklammerte Summe der Gleichung (24), soweit die Erfahrung reicht, negativ. Ferner liessen sich die bisher durch-

ıessenen Stücke der Schmelzcurven mit ganz gutem Anschluss a die Erfahrung durch Gleichungen der Form

$$T - T_0 = a p - b p^2$$

arstellen. $d^2 T / d p^2$ ist also in erster Annäherung unabhängig om Druck, dem würde entsprechen, dass auch $c'_p - c''_p$ und ie eingeklammerte Summe bei Druck und Temperaturänderung uf der Schmelzcurve innerhalb des untersuchten Druck- und Temperaturintervalles sich nicht erheblich ändern.

Für Naphtalin ist beim Schmelzpunkt unter dem Druck $p = 1$ in (24)

$$\frac{T}{R} = 0{,}33 \, \frac{d_p \Delta v}{d T} \left(\frac{d T}{d p}\right) = + 0{,}000016 \, \frac{d_T \Delta v}{d p} = - 0{,}000026$$

(geschätzt nach Angaben von C. Barus), zu setzen, $d^2 T / d p^2$ würde sich dann zu $- 0{,}0000033$ ergeben, während aus dem Verlauf der Schmelzcurve $(d T^2 / d p^2)$ zu $- 0{,}0000036$ abgeleitet wurde.

(Eingegangen 1. December 1899.)

7. *Ueber ein Vacuumelektroskop;* *von H. Pflaum.*

Im Capitel über die Faraday'sche Theorie der elektrischen Entladungen spricht sich Prof. Dr. O. Lehmann folgendermaassen aus[1]: „Dass ein Elektrometer im Vacuum wirklich functionirt, ist schon mehrfach nachgewiesen worden. So beobachtete bereits Gray, dass die elektrische Wirkung sich auch auf Körper im Vacuum erstreckt. Worthington[2] zeigte ebenso, dass ein elektrisches Pendel oder Blattgoldblättchen im sog. absoluten Vacuum ebenso functionirt, wie in gewöhnlicher Luft. Die Pendelkugel wird erst angezogen, und nachdem sie gleichartig elektrisch geworden, wieder abgestossen."

Im Gegensatz zu Obigem möchte ich behaupten, dass eine elektrostatische Wirkung im sog. absoluten Vacuum — falls nicht andere Beobachtungen dieser Art existiren und mir entgangen sind — noch nicht nachgewiesen worden ist. Denn, was erstens die citirte Beobachtung von Gray anlangt, so genügt wohl der Hinweis, dass es zu jener Zeit überhaupt nicht möglich war, ein Vacuum im heutigen Sinne des Wortes herzustellen. Die Beobachtung von Worthington aber bezieht sich gewiss auch nicht auf ein allzu hohes Vacuum; Worthington beobachtete nämlich, dass eine im stark evacuirten Raume aufgehängte Platinkugel heftig nach einem elektrisirten Platinblättchen hin angezogen wurde. Im Augenblicke der Berührung beider Körper war „ein kleiner Funke" zu sehen gewesen, worauf dann Abstossung eintrat.

Ausgehend von gewissen Vorstellungen über das Wesen der elektrostatischen Abstossung versuchte ich es vor einiger Zeit, Elektroskope bis zu jenem Grade zu evacuiren, bei welchem eine Entladung den Raum nicht mehr durchsetzt. Viele Versuche dieser Art waren vergeblich, da es nicht ge-

1) O. Lehmann, Die elektr. Lichterscheinungen p. 522. 1898.
2) A. M. Worthington, Phil. Mag. 19. p. 218. 1885.

lang grössere Gefässe bis zu jenem Grade zu exantliren und die Pendelblättchen von einem gewissen Grade des Vacuums an den elektrostatischen Wirkungen der Inductorschläge nicht mehr zu widerstehen vermochten. Um die Sache nicht aufgeben zu müssen, wandte ich mich an den bekannten Glastechniker Hrn. Müller-Unkel in Braunschweig, indem ich hoffte, dass seine vieljährige Erfahrung in der Herstellung von sog. Hittorf'schen absoluten Vacuumröhren gewiss alle Schwierigkeiten überwinden werde. Hr. Müller-Unkel nahm sich der Arbeit in entgegenkommendster Weise an, und nachdem er schon auf die Vorversuche eine geraume Zeit verwendet hatte, war er schliesslich „acht Tage lang ununterbrochen mit der Herstellung des Vacuumelektroskops beschäftigt". Man sieht hieraus, dass der im Folgenden zu beschreibende Apparat, trotz seiner einfachen Gestalt, nicht mühelos entstanden ist. Darum liegt für mich ein weiterer Grund zu der Annahme vor, dass elektrostatische Vorgänge im absoluten Vacuum bisher experimentell noch nicht nachgewiesen worden sind. Das Resultat, zu welchem die Beobachtungen am Vacuumelektroskop aber führen, ist, *dass das Vacuum ein vollständiger Isolator ist und elektrostatische Wirkungen in ihm intensiv auftreten.*

1. Der Apparat hat die Gestalt einer Birne von etwa 12 cm Länge. Der Knopf besteht aus einer hohlen Aluminiumkugel, die auf einem starken, ins Glas eingeschmolzenen Aluminiumdrahte aufsitzt. Letzterer geht im Innern des Elektroskops in eine flache Lamelle über, an welcher die etwa 1 cm langen und $1\frac{1}{2}$ mm breiten Pendelblättchen aus starker Aluminiumfolie befestigt sind. Spitzen und Unebenheiten sind überall auf das Sorgfältigste vermieden und die Schmelzstelle durch Firniss isolirt. Im unteren Teile der Glasbirne befinden sich zwei seitlich eingeschmolzene Platindrähte, deren Abstand nur etwa 0,4 mm beträgt.

2. Schaltet man den Apparat parallel zu einer 35—40 mm langen Funkenstrecke eines Inductoriums, so bleibt der Apparat vollständig dunkel, die Entladungen nehmen ihren Weg durch die etwa 100 mal längere Luftstrecke. Dabei aber werden die Pendelblättchen so heftig von der Lamelle angezogen und abgestossen, dass man die Entladungen nur wenige Secunden lang einwirken lassen darf, um die Blättchen vor Beschädi-

gung zu schützen. Steigert man die Länge der Funkenstrecke, so tritt schliesslich schwache Glasfluorescenz ein. Ein absolutes Vacuum weist der Apparat also nicht auf, vielmehr adhäriren noch geringe Quantitäten Luft am Glase und den Metallteilen, aber die Versuche haben gezeigt, dass bei einer über die erreichte Grenze fortgesetzten Evacuirung die elektrostatischen Wirkungen so sehr an Intensität zunehmen, dass ihnen die Pendelblättchen sofort zum Opfer fallen.

2. Nähert man einen elektrisirten Körper dem Knopfe des Elektroskops, so werden die Blättchen stark abgestossen und zwar mit der gleichnamigen Elektricität; entfernt man den Körper, so fallen sie augenblicklich in die senkrechte Lage zurück, berühren die Lamelle und werden darauf von dieser abgestossen, wobei nun ihre Ladung die entgegengesetzte ist. Den Vorgang kann man sich wohl folgendermaassen denken: War z. B. der genäherte Körper negativ elektrisch, so bewirkte er eine Ansammlung der positiven Elektricität im Knopfe, der negativen in der Lamelle und den Blättchen. Letztere strahlt ziemlich schnell durchs Vacuum auf die innere Glaswand aus und die Lamelle erweist sich daher nach Entfernung des Körpers als schwach positiv elektrisch. Der Versuch gelingt ebenso, wenn der ganze Apparat in eine isolirende Flüssigkeit, etwa Steinöl, versenkt ist.

4. Dass die gewöhnlichen Elektroskopversuche mit dem Apparat gelingen, bedarf nach Obigem kaum der Erwähnung, er ist auch in hohem Grade empfindlich, jedoch wirkt das Auftreten von Ladungen auf den Glaswandungen sehr störend. Ist die äussere Wandung nicht ganz trocken, so ist es kaum zu vermeiden, dass nicht auf ihr eine starke ungleichnamige Ladung auftritt. Diese kann sich dann stundenlang halten.

Nähert man den elektrisirten Körper dem Knopfe, während die Aussenwandung zur Erde abgeleitet ist, so laden sich die Blättchen durch Influenz; berührt man nun den Knopf, so tritt durch das Freiwerden der gleichnamigen Elektricität eine so starke Ladung der Blättchen auf, dass sie meist unter einem Winkel von 180° divergiren.

5. Erregt man in der Nähe des Apparates elektrische Schwingungen, so gerathen die Blättchen in lebhafte Vibration. Gehen die Schwingungen von einem Inductorium oder einer

Teslaspule aus, so tritt trotz der Vibration eine allmähliche Dauerladung ein. Im ersten Falle ist die Ladung wechselweise positiv oder negativ, je nach Richtung der Oeffnungsströme; bei Anwendung der Teslaspule ist die Ladung negativ, falls die Entfernung vom Transformatorpole recht gering ist, unter den angewandten Versuchsbedingungen nicht über 4 cm. In grösserer Entfernung wird der Apparat stets positiv geladen, was mit mehreren neuerdings publicirten Beobachtungen [1]) in Uebereinstimmung steht.

6. Beobachtet man den Apparat im völlig verdunkelten Zimmer, so zeigt sich, während sich in ihm starke elektrostatische Wirkungen äussern, *keine Spur von sichtbarem Licht.* Die Strahlung der Elektricität ins Vacuum ist also eine dunkle und es lässt sich wohl schliessen, dass auch bei Anwendung höherer Spannungen und eines entsprechend höheren Vacuums Lichterscheinungen, welche somit an das Vorhandensein ponderabler Materie gebunden zu sein scheinen, nicht zu Stande kommen können.

Aus den Beobachtungen am beschriebenen Apparat ergiebt sich auch die Erklärung einer früheren Wahrnehmung. [2]) Das kräftige Pendeln eines Platindrahtes bei jenem Versuche lässt sich nun wohl verstehen, nachdem sich gezeigt, dass in einem hohen Vacuum die elektrostatischen Wirkungen ganz besonders intensiv auftreten. Der Draht hatte durch Einwirkung des Transformatorpoles negative Elektricität gegen die Glaswandungen hin ausgestrahlt und auch sich selbst negativ geladen. Bei der Entladung strahlte die negative Elektricität des Drahtes allmählich in die äussere Luft. Da nun die Ladung jedesmal nur 1—2 Secunden, die Entladung dagegen bis zu einer halben Minute andauerte, so folgt hieraus, dass das Vacuum in sehr viel höherem Grade durchstrahlbar ist, als die Luft.

---

1) Vgl. E. H. Cook, Phil. Mag. 47. p. 40 1899.

2) H. Pflaum, Corresp.-Bl. d. Rig. Nat.-Ver. 41. p. 113—114. 1898.

(Eingegangen 14. December 1899.)

8. *Ueber die experimentelle Grundlage der Exner'schen Theorie der Luftelektricität;* *von G. Schwalbe.*

Vor mehreren Jahren hatte ich im Laboratorium für Physik der landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin Gelegenheit, eine Untersuchung über das elektrische Verhalten der von elektrisirten Flüssigkeiten aufsteigenden Dämpfe anzustellen.[1]) Ich hatte in dieser Arbeit die gesamte Literatur über diesen Gegenstand zusammengestellt und sodann die Resultate eigener Versuche mitgeteilt, welche in Uebereinstimmung mit früheren Autoren, namentlich mit Blake, zu dem Ergebnis führten, dass die Dämpfe elektrisirter Flüssigkeiten keinerlei Elektricität mit sich führen, dass also die experimentelle Grundlage der Exner'schen Theorie, welche aus dem Ueberführen der elektrischen Ladung der Erde durch die verdampfenden Wassermengen in die Luft, die Erscheinungen der Luftelektricität erklären will, nicht erwiesen ist. Insbesondere ist darauf Gewicht zu legen, dass bei Controlversuchen ein Substanzverlust eines elektrisirten Systemes die Ladung desselben verminderte, falls in der That, wie dies bei zerstäubendem Kieselsäurepulver der Fall ist, die sich entfernende Substanz Elektricität mit sich führte.

Der Umstand, dass sich eine merkliche Abnahme der elektrischen Ladung im vorliegenden Falle nicht nachweisen lässt, deutet also darauf hin, dass die Dämpfe nicht als Träger der Elektricität angesehen werden können. Neuerdings hat nun Pellat[2]) Versuche angestellt, welche zu einem abweichenden Ergebnis führten. Die Versuche Pellat's sind folgende: Einer flachen (5 mm tiefen), gut isolirten Schale wurde bei sonst gleichen Nebenumständen — einmal leer, das andere Mal mit Wasser gefüllt — eine bestimmte Ladung ertheilt. An einem Quadrantenelektrometer wurde nun der Verlust an

1) G. Schwalbe, Wied. Ann. 58. p. 500. 1896.
2) H. Pellat, Journ. de physique (3) 8. p. 253. 1899.

Ladung in einer bestimmten Zeit gemessen. Pellat stellte vier Serien von Beobachtungen an, welche zu beweisen scheinen, dass thatsächlich der Elektricitätsverlust ein schnellerer ist, wenn das Gefäss mit Wasser gefüllt ist, als wenn es leer ist. Hieraus wird sodann gefolgert, dass der Wasserdampf im Stande ist, die Elektricität mitzuführen. Durch Controlversuche wurde gezeigt, dass der Unterschied nicht durch Verschlechterung der Isolation während des Versuches bedingt war. Die mitgeteilte Ladung war in allen Fällen negativ. Die Anfangsspannung betrug 116—155 Volt. Die Beobachtungen Pellat's ergaben:

Beobachtungsreihe	Anfangsspannung in Volt	Zeitraum zwischen Anfang und Ende des Versuches	Verlust mit Wasser am Elektrometer in Teilstrichen	Verlust ohne Wasser am Elektrometer in Teilstrichen
I	155	$1^h\ 25^m$	301,9	278,7
II	116	$1^h\ 39^1/_2{}^m$	145,0	135,5
III	116	$1^h\ 44^1/_2{}^m$	172,8	159,3
IV	116	$1^h\ 45^m$	182,9	170,4

Im wesentlichen unterscheidet sich diese Versuchsanordnung von der meinen dadurch, dass Pellat von sehr viel höheren Anfangsspannungen ausgeht und dass er stets dieselbe Art der Ladung anwendet. Eine inzwischen von Trabert[1]) erschienene Mitteilung macht es indessen wahrscheinlich, dass auch unter diesen Umständen die Dämpfe unelektrisch sind, indem er auf theoretischem Wege einen gewissen Wahrscheinlichkeitsbeweis dafür erbringt, dass die auf diese Weise in die Luft gelangenden Elektricitätsmengen verschwindend klein sein müssen. Es schien mir daher lohnend, diese Frage noch einmal experimentell aufzunehmen und sie auch für höhere Spannungen und für positive und negative Ladungen gesondert zu untersuchen. Die Methode war im wesentlichen dieselbe, wie bei den früheren Versuchen. Es wurde die Abnahme der positiven und negativen Spannung einer isolirt aufgestellten Schale gemessen, je nachdem sie mit heissem Wasser gefüllt oder leer war. Die Ladung mit positiver Elektricität geschah

1) Trabert, Meteorolog. Zeitschr. Heft 8. 1899.

mittels einer Porcellanstange, die durch Reibung sehr hohe Spannungen anzunehmen vermochte; die Ladung mit negativer Elektricität in entsprechender Weise durch eine Siegellackstange. Als Messinstrument diente ein Exner'sches Elektroskop, welches für diesen Zweck besonders geaicht wurde. Die Aichung geschah mittels einer Batterie von 20 Platin-Zinkelementen unter Zuhülfenahme eines Condensators. Die Spannung jedes Elementes betrug 1,06 Volt. Der Condensator wirkte in der Weise, dass der abgelesene Ausschlag der zehnfachen elektromotorischen Kraft der eingeschalteten Elemente entsprach.

Was nun die Messungen anbelangt, so mögen dieselben hier mitgeteilt werden. Die Divergenzen wurden von Minute zu Minute beobachtet; doch sollen an dieser Stelle nur die nach 20 Min. beobachteten Endspannungen, auf welche es wesentlich ankommt, Platz finden. Die Anfangsspannung betrug stets 177 Volt. Bei den Versuchen mit heissem Wasser betrug die Anfangstemperatur des Wassers stets 100° C., die Endtemperaturen sind in der folgenden Tabelle unter *t* mitgeteilt. Dieselben sind aus dem Grunde etwas verschieden, weil es nicht immer sogleich gelang, die erforderliche Anfangsspannung von 177 Volt zu erzielen.

Die beobachteten Endspannungen sind nun folgende:

	Beobachtungsreihe	Endspannung in Volt	Mittel in Volt	*t*° C.
Negative Ladung, leere Schale	1	151	146	
" " " "	2	141		
Potitive Ladung, " "	1	147	142½	
" " " "	2	138		
Posit. Lad. m. verdampf. Wasser	1	138	139½	40,8
" " " " "	2	141		29,2
Negat. " " " "	1	143	144	33,5
" " " " "	2	145		31,0

Die Mittelwerte für jede einzelne Gruppe sind in dieser Zusammenstellung bereits gebildet. Vereinigt man alle Versuche mit positiver und mit negativer Elektricität einerseits, mit leerer und mit gefüllter Schale andererseits zu Mittelwerten, so ergiebt sich als Endspannung:

I.	Bei positiver Ladung:	141	Volt
	Bei negativer Ladung:	145	„
II.	Bei gefüllter Schale:	142	„
	Bei leerer Schale:	144	„

Aus diesen Versuchen geht zunächst hervor, dass die Art der Ladung keinen Einfluss auf die Geschwindigkeit der Entladung ausübt, da der Unterschied von 3 Volt im Mittelwert nur auf Rechnung der Beobachtungsfehler gesetzt werden muss und im einzelnen das Verhalten auch umgekehrt wie in den Mittelwerten sein kann.

Was sodann den Einfluss der Verdampfung anbelangt, so zeigen sich bei allen Beobachtungsreihen in den Endspannungen fast genau dieselben Werte. Dieselben schwanken bei leerer Schale zwischen 151 und 138 Volt, bei gefüllter Schale zwischen 145 und 138 Volt, also innerhalb derselben Grenzen. Da das Elektrometer, wie durch Vorversuche festgestellt wurde, von solcher Empfindlichkeit ist, dass sich Unterschiede von 5 Volt mit Sicherheit durch die Ablesung feststellen lassen, da ferner die Unterschiede in den Endspannungen bei gefüllter und bei leerer Schale nicht nur diesen Betrag im Mittel nicht überschreiten, indem der Unterschied nur 2 Volt beträgt, sondern im einzelnen sogar die Entladung bei gefüllter Schale etwas langsamer sein kann, als bei leerer (vgl. die beiden Beobachtungsreihen 2 bei positiver Ladung), so kann von einer schnelleren Entladung bei verdampfendem Wasser, wie es die Exner'sche Theorie erfordern würde, nicht die Rede sein. Zugleich aber zeigen diese Ausführungen, dass die Empfindlichkeit des Messinstrumentes ausreicht, um obige Behauptung zu begründen, denn nehmen wir selbst an, dass die beobachtete Maximalendspannung von 145 Volt bei gefüllter Schale wegen der Instrumentalunsicherheit um 5 Volt zu hoch wäre, so würde der sich sodann ergebende Wert noch immer innerhalb der Grenzen liegen, die auch bei leerer Schale beobachtet werden, sodass man zu demselben Schlusse gelangen würde. Dass ferner der gewählte Zeitraum von 20 Minuten ausreicht, geht aus meiner früheren, bereits erwähnten Arbeit hervor, wonach thatsächliche Unterschiede in der Geschwindigkeit der Entladung nach 10 Minuten Beobachtungsdauer bereits deutlich hervortreten, ferner daraus,

dass die Entladung im Anfange schneller vor sich geht, als später.

Das abgeleitete Resultat stimmt mit dem von Pellat nicht überein, dagegen ist es im Einklange mit meinen früheren Versuchen, sowie den Versuchen Blake's. Ferner spricht, wie schon erwähnt, die theoretische Schlussfolgerung Trabert's sehr zu Gunsten dieses Ergebnisses, sodass ihm jedenfalls eine grosse Wahrscheinlichkeit innewohnt.

Dass man aber leicht zu ähnlichen Ergebnissen, wie Pellat gelangen kann, wenn man nicht alle Vorsichtsmaassregeln beobachtet, habe ich selbst bei früheren Vorversuchen erfahren. Ist nämlich die Schale nicht ganz rein, befinden sich vielmehr lockere und leicht elektrisirbare Teilchen an derselben, so werden dieselben durch den starken beim Verdampfen entstehenden Luftstrom mitgerissen und die Verdampfung muss nach dem im Anfang Gesagten schneller vor sich gehen.

Die vorstehende Untersuchung wurde wiederum im physikalischen Laboratorium der landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin ausgeführt. Die Anregung zu derselben wurde mir durch Hrn. Professor Börnstein zu Teil, der derselben stets lebhaftes Interesse entgegenbrachte. Ich möchte nicht verfehlen, ihm an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 7. December 1899.)

9. *Ueber Ausstrahlung statischer Elektricität aus Spitzen*[1]; *von H. Sieveking.*

Hr. Himstedt hat bei Versuchen mit Hochfrequenzströmen[2]) beobachtet, dass die Mengen positiver bez. negativer Elektricität, welche aus einer Spitze ausstrahlen, in den verschiedenen Gasen sehr verschieden sind. Es lag deshalb die Frage nahe, zu untersuchen, ob ähnliche polare Unterschiede auch bei der Ausstrahlung statischer Elektricität auftreten können.

Ueber die Spitzenausstrahlung liegen schon eine grosse Reihe von Versuchen[3]) vor, die sich jedoch meist mit Entscheidung anderer Fragen beschäftigen, hauptsächlich mit der des Minimumpontentiales, auf dessen Bedeutung zuerst Hr. Röntgen[4]) aufmerksam gemacht hat.

Mit den ausgestrahlten Mengen beschäftigt sich eine Arbeit des Hrn. Warburg[5]), welche erst erschienen ist, als diese Versuche schon zum Teil ausgeführt waren. Auf diese Arbeit werde ich später zurückkommen müssen.

Die Aufgabe der folgenden Untersuchung lässt sich dahin formuliren: Es sollen die Mengen + und − Elektricität bestimmt werden, welche in gemessenen Zeiten von einer auf gemessenes Potential geladenen Spitze gegen eine in gemessener Entfernung ihr gegenüberstehende Scheibe bez. die Oberfläche

---

1) Auszug aus der Inaugural-Dissertation.

2) F. Himstedt, Wied. Ann. **52**. p. 473. 1894.

3) J. Precht, Wied. Ann. **49**. p. 150. 1893. Hier finden sich genaue Literaturangaben über die älteren Versuche. K. Wesendonck, Wied. Ann. **30**. p. 1. 1887; **39**. p. 577. 1890.

4) W. C. Röntgen, Entladungen der Elektricität in Isolatoren. Göttinger Nachr. p. 396. 1878.

5) E. Warburg, Wied. Ann. **67**. p. 42. 1899.

einer die Spitze umschliessenden Kugel in verschiedenen Gasen ausgestrahlt werden.

Dazu benutzte ich folgende Versuchsanordnung (vgl. Fig. 1):

1. Eine Wimshurst'sche Elektrisirmaschine (*WM*) von 21 cm Scheibendurchmesser wird durch einen kleinen Elektromotor in mässig schnelle dauernde Rotation versetzt. Der eine Pol der Maschine ist zur Erde abgeleitet, der andere mit einer Batterie (*B*) von grösserer Capacität (7 Leydener Flaschen von 50 cm Höhe) verbunden. Die äussere Belegung der Batterie liegt an Erde, von der inneren Belegung führt ein Draht zu einem Siemens'schen elektrostatischen Voltmeter (*V*, Messbereich bis 10000 Volt) und von dort zu der ausstrahlenden Spitze (*Sp*); dieselbe wird gebildet durch ein Stückchen feinen

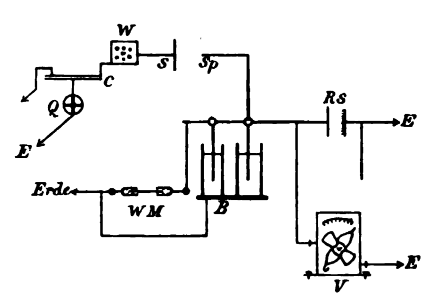


Fig. 1.

WM Wimshurst-Maschine, *B* Leydener Batterie, *Sp* ausstrahlende Spitze, *S* Scheibe, *W* Wippe, *C* Condensator, *Q* Quadrantenelektrometer, *RS* Regulirspitzen, *V* Siemens'sches Elektrometer.

Platindrahtes von $^1/_{10}$ mm Dicke und 3 mm Länge, das in einen Messingstab eingelötet ist. Der Spitze gegenüber steht in variablem Abstand eine polirte Messingscheibe (*S*) von 12 cm Durchmesser, die durch einen auf der Rückseite angelöteten Draht mit einem Elliot'schen Glimmercondensator (*C*) von $^1/_2$ Mikrofarad Capacität in Verbindung steht.

Die Spannung, die dem Condensator durch die von der Spitze zur Scheibe übergehende Elektricität erteilt wurde, wird gemessen mit einem Thomson'schen Quadrantenelektrometer.

Die Spannung der strahlenden Spitze, sowie die Strahlungsdauer wurden so bemessen, dass der mit der Scheibe verbundene Condensator sich nicht auf mehr als 40 Volt lud.

Die Verminderung der Potentialdifferenz zwischen Spitze und Scheibe während der Strahlung braucht dann gegenüber dem hohen Potential der Spitze nicht in Rechnung gezogen werden.

Eine bei elektrostatischen Messinstrumenten immer wünschenswerte Controlirung der Angaben des Voltmeters erfolgte durch Vergleichung mit einem Heydweiller'schen[1]) Spiegelelektrometer für hohe Spannungen.

Letzteres wurde geaicht mit Hülfe einer Batterie von 400 Kupfer-Zink-$MgSO_4$-Elementen. Bei der Herstellung derselben wurde die grösste Sorgfalt auf vollständige Isolation verwendet; die Batterie bestand aus 4 Kästen zu je 100 Elementen; die einzelnen Zellen bestanden aus Reagensgläsern, gefüllt mit einer Zehntel-Normallösung von Magnesiumsulfat; in dieselben tauchten Kupfer- und Zinkstreifen von etwa $^1/_2$ mm dickem Blech. Die Lötstellen waren lackirt und auf jedes Gläschen einige Tropfen Vaselineöl gegossen; die Gläser standen in einer 3 cm hohen Paraffinschicht. Eine solche Batterie hat den Vorzug, sehr lange Zeit hindurch constante Spannung zu zeigen. Jeder Kurzschluss ist sorgfältig zu vermeiden, da sich die Zellen hiervon nur sehr langsam erholen. Die elektromotorische Kraft eines solchen Elementes beträgt 1,08 Volt.

Bei den Versuchen sollte die in einer gemessenen Zeit von der auf gemessenes Potential geladenen Spitze gegen die in gemessener Entfernung ihr gegenübergestellte Scheibe übergestrahlte Elektricitätsmenge bestimmt werden. Man musste deshalb imstande sein, den Uebergang der Elektricität durch Einschiebung eines zur Erde abgeleiteten Drahtnetzes aufzuheben, oder durch eine vom Sitze des Beobachters aus regulirbare Wippe, die unter Aufhebung der Verbindung Scheibe—Condensator, gleichzeitig erstere mit der Erde, letzteren mit dem Quadrantenelektrometer verband.

Es empfiehlt sich nicht, die Strahlung der Spitze zu unterbrechen, da in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen von Hrn. Precht[2]) sich das Entladungspotential nicht unab-

---

1) A. Heydweiller, Sonderabdruck aus der Zeitschr. f. Instrumentenk. November 1892.

2) J. Precht, Wied. Ann. **49**. p. 159. 1893.

hängig davon zeigt, ob vorher ein Ausströmen aus der Spitze stattgefunden hat oder nicht. Erst nach Verlauf einiger Zeit wird die Strahlung regelmässig. Ich zog es daher vor, die Spitze dauernd strahlen zu lassen.

Ein constantes Spitzenpotential lässt sich in der Weise erzielen, dass, nachdem die mit der Spitze verbundene Flaschenbatterie auf das gewünschte Potential geladen ist, durch vorsichtiges Drehen der Elektrisirmaschine stets soviel Elektricität nachgeliefert wird, wie zur Deckung der Verluste erforderlich ist. Sehr viel bequemer und dabei, man kann sagen absolut sicher, lässt sich dies so erreichen, dass man die Maschine durch den Motor in constante schnelle Rotation versetzt und dadurch die Batterie auf ein höheres als das gewünschte Potential ladet. Durch ein System von Hülfsspitzen, die zur Erde abgeleitet sind, wird der Ueberschuss abgesaugt.

Die Hülfsspitzen sind aus demselben Material wie die strahlende Spitze und kammartig an einen Messingstab angelötet; dieselben können einer mit der Batterie verbundenen Scheibe beliebig genähert werden und reguliren so die Spannung.

Ein zwischen Maschine und Flaschenbatterie eingeschalteter Widerstand begünstigte eine constante Einstellung des Elektrometers; dasselbe zeigte je nach dem Stande der Regulirspitzen und der Geschwindigkeit der Maschine Spannungen von 1500—9000 Volt.

2. Hr. Warburg[1]) hat aus Versuchen, bei denen das Spitzenpotential zwischen $\pm$ 4800 und $\pm$ 12000 lag, eine empirische Formel für die ausgestrahlte Elektricitätsmenge abgeleitet. Nach derselben soll

$$E = C V (V - M)$$

sein. Die Resultate meiner Versuche, bei denen Spitzenpotentiale zwischen 5000 und 9000 Volt zur Anwendung gekommen sind, stimmen mit seiner Formel gut überein. Dagegen lassen die Versuche mit kleinerem Spitzenpotential erkennen, dass

1) E. Warburg, Wied. Ann. 67. p. 72. 1899.

für solches die Formel nicht mehr anwendbar ist. Die Resultate dieser Versuche[1]) lassen sich vielmehr sehr gut darstellen nach der Formel

$$E = a\,(V - b),$$

wo a und b nur von den Versuchsbedingungen, d. h. von der Natur der Spitze und dem Abstand der Scheibe von der Spitze abhängen. Dabei hat b dieselbe einfache physikalische Bedeutung wie M in der Formel des Hrn. Warburg. Es ist nämlich das Potential, bei dem noch gerade eine Strahlung stattfindet (Minimumpotential des Hrn. Röntgen.[2])

Bezeichnen wir dasselbe mit M, so ist also auch

$$E = a\,(V - M).$$

Ich lasse zwei Beispiele folgen, zuerst ein solches für Ausstrahlung mit Spitzenpotentialen über 5000 Volt, dann ein solches für kleinere Potentiale und stelle daneben einmal die nach der Formel

$$E = a\,(V - b)$$

berechneten Werte, dann die nach der Formel des Hrn. Warburg sich ergebenden:

I.

d = 10 cm. M.-P. = − 2600 Volt.

$V/100$	gefunden	berechnet nach Warburg $C.V(V - \text{M.-P.}).10^{-6}$	berechnet $a(V - \text{M.-P.}).10^{-3}$
−90	17,5	17,3	13,4
−80	13,2	13,0	11,3
−70	9,2	9,2	9,2
−60	6,5	6,1	7,1
−50	4	3,6	5,0

1) Ausführliche Tabellen finden sich in der Inaugural-Dissertation. Freiburg i. B. 1899.

2) W. C. Röntgen, Entladung der Elektricität in Isolatoren. Göttinger Nachr. p. 396. 1878.

II.

$d = 6$ cm. M.-P. $= -3050$ Volt.

$V/100$	gefunden	berechnet nach Warburg $C.V(V-$M.-P.$).10^{-6}$	berechnet $\alpha(V-$M.-P.$).10^{-3}$
−32	0,8	0,6	0,9
−34	2	1,5	2,1
−36	3,2	2,5	3,3
−38	4,4	3,6	4,5
−40	5,7	4,8	5,7
−42	6,8	6	6,9
−44	8	7,4	8,1
−46	9,2	8,9	9,3
−48	10,7	10,5	10,5
−50	11,8	12,2	11,7
−52	13,5	14	12,9
−54	15,3	15,9	14,1
−56	18	17,9	15,3
−58	19,6	20	16,5
−60	22	22,1	17,7
−62	24	24,4	18,9

Die Untersuchungen wurden in analoger Weise für positive Elektricität angestellt.

3. **Das Minimumpotential.** Zur Bestimmung des Minimumpotentials wurde in der oben beschriebenen Versuchsanordnung das Siemens'sche Elektrometer durch das Heydweiller'sche ersetzt, da dasselbe kleinere Unterschiede genauer zu messen gestattete.

Die Hülfsspitzen wurden entfernt und die Maschine mit der Hand gedreht unter steter Beobachtung der Elektrometernadel. Ein Hülfsbeobachter behielt die Nadel des Quadrantenelektrometers im Auge. Sobald dieselbe begann, gleichmässig zu wandern, wurde die Spannung abgelesen.

Das zum Uebergang erforderliche Minimumpotential nimmt mit der Entfernung zu und zwar ist bei kleinen Abständen die Zunahme stärker. Bei Abständen grösser als 5 cm ist die Zunahme eine sehr langsame. Die Abhängigkeit des Minimumpotentials von der Entfernung wurde auch bei einer kleineren Scheibe von 2 cm Durchmesser constatirt.

Ausserdem ist das Minimumpotential natürlich abhängig n der Natur der Spitze.

4. Ein Vergleich der Beobachtungen bei negativer und sitiver Elektricität ergiebt, dass in allen Fällen die erstere i niedrigerem Potential auszustrahlen beginnt und bei eichem Potential stets in grösserer Menge übergestrahlt rd als die positive Elektricität. Dies findet sich in Ueber- nstimmung mit den Beobachtungen des Hrn. Precht. Stellt an die Beziehungen zwischen den übergestrahlten Mengen ıd dem Abstand zwischen Scheibe und Spitze graphisch dar bscisse ausgestrahlte Menge, Ordinate Abstand Spitze— cheibe), so erhält man ein System von parabolisch gekrümmten urven; dieselben sind bei negativen Spitzenpotentialen flacher s bei positiven, da bei ersteren die übergestrahlten Elektri- tätsmengen rascher mit abnehmender Entfernung wachsen gl. Curven Figg. 2—5).

5. Es wurden alsdann Versuche angestellt, bei denen eine itze aus demselben Material wie die bisher verwendete ge- aucht wurde, statt der Scheibe dagegen Hohlkugeln aus essingblech; es wurde ein Satz von 10 Kugeln hergestellt; grösste hatte einen Durchmesser von 12 cm, die kleinste n 3 cm. Mittels eines seitlichen, 2 cm langen Ansatzes ssen sich die Kugeln auf ein graduirtes Glasrohr auf- hieben, in dem, durch Paraffin isolirt, die Zuleitung zur itze verlief. Die Spitze befand sich stets im Mittelpunkt r Kugel.

Das Beobachtungsintervall ist kleiner als bei Anwendung ıer Scheibe, da Condensator und Quadrantenelektrometer cht auf höher als 40 Volt geladen werden sollten und diese 'enze bei Anwendung der Kugeln schon früh erreicht wird.

Auch bei diesen Versuchen[1]) zeigt sich, dass die nega- e Elektricität durchweg leichter und in grösserer Menge sgestrahlt wird als die positive.

Die Uebereinstimmung zwischen den beobachteten und n nach der Formel $E = a(V - b)$ berechneten Werten ist r — Elektricität in dem Intervall von 2000—3200, für einige r Reihen bis 3600 eine gute, für + Elektricität in dem

1) Vgl. Tabellen in der Dissertation.

Intervall von 2600—4400 Volt. Ob auch hier für höhere Potentiale die Formel des Hrn. **Warburg** gilt, konnte nicht untersucht werden, da die von den Kugeln angenommene Ladung sonst zu gross geworden wäre.

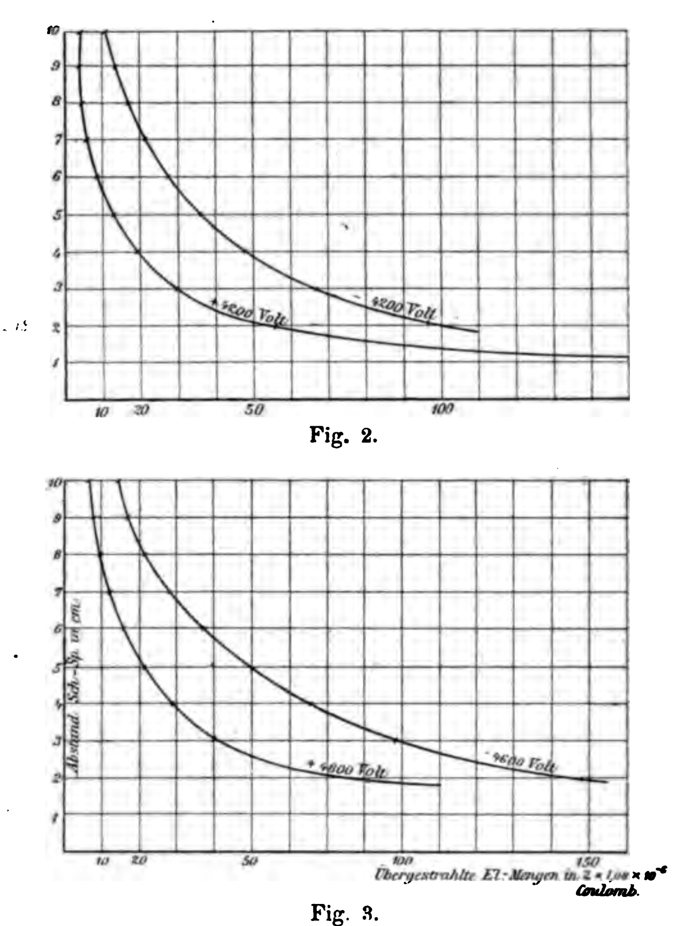


Fig. 2.

Fig. 3.

5. Hr. **Himstedt** hat gefunden, dass bei Ausstrahlung aus der Spitze eines Teslapoles in einem mit Luft gefüllten, nach aussen gänzlich abgeschlossenen Raum die in einer bestimmten Zeit erhaltene Ladung der der Spitze gegenüberstehenden Scheibe bei fortgesetzter Ausstrahlung kleiner und kleiner wird, sowie, dass in dem längere Zeit durchstrahlten

ftraum sich NO_2 bildet, in welchem am Teslapol + und Elektricität in gleichen Verhältnissen ausstrahlen, sodass Scheibe keine Ladung erhält. Um zu untersuchen, ob ch bei Strahlung statischer Elektricität eine Abnahme statt-

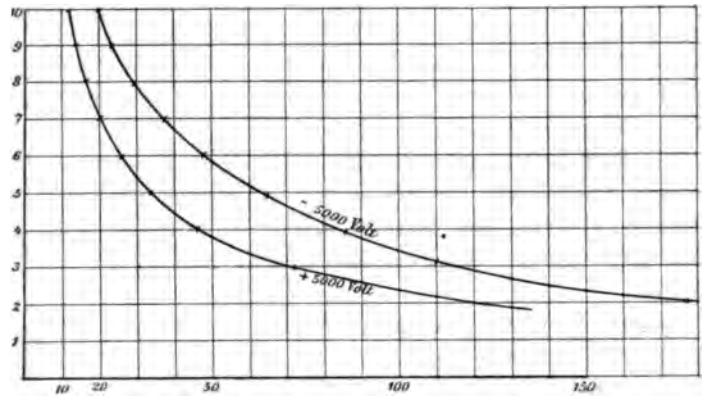


Fig. 4.

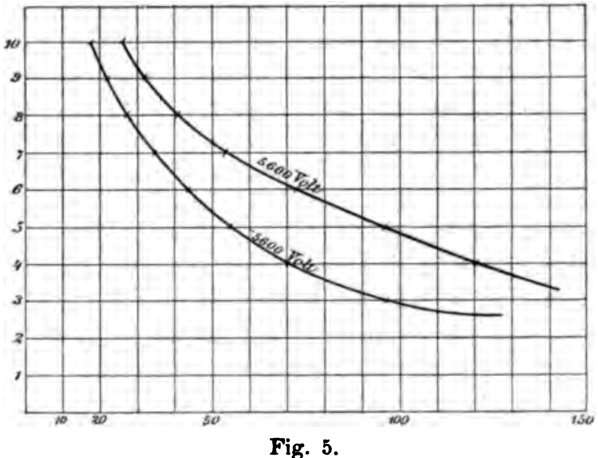


Fig. 5.

det, schloss ich die in einer Kugel enthaltene Luft nach ssen ab; es liess sich nach $^1/_2$ stündiger Strahlung jedoch ch keine Veränderung der Luft constatiren, wenigstens was ren Verhalten gegen die Strahlung betrifft.

Ebenso scheint ein Durchgang der einen Elektricität Luft nicht in der Art zu beeinflussen, dass ein kurz

darauf erfolgender Durchgang der anderen dadurch beeinträchtigt wird.

6. Um das durch die strahlende Spitze erzeugte Kraftfeld an verschiedenen Stellen zu untersuchen, wurden die Hohlkugeln durch zwei genau aufeinander passende Halbkugeln ersetzt, die durch eine möglichst dünne Luftschicht voneinander isolirt waren. Während der Strahlungsdauer wurde je eine Halbkugel zur Erde abgeleitet, während die der anderen erteilte Ladung gemessen wurde.

Als Mittelwert aus vielen Beobachtungen ergiebt sich bei negativer Elektricität für die untere Halbkugel 63 Proc., für die obere 37 Proc. der totalen, gemeinschaftlichen angenommenen Ladung, bei positiver Elektricität bez. 67,5 Proc. und 32,5 Proc.

Demnach scheint die positive Elektricität eine geringere Zerstreuung zu zeigen als die negative und für erstere sich ein ausgeprägteres Maximum der Strahlung in der Richtung der Spitzenaxe zu ergeben. Es bildet dies einen Gegensatz zu den von Hrn. Himstedt beobachteten Erscheinungen am Teslapole. Liess ich die Spitze gegen die untere Halbkugel strahlen, während die bisher in diesem Falle zur Erde abgeleitete obere Halbkugel ganz entfernt war, so nahm die andere eine wesentlich stärkere Ladung an, und zwar bei positiver Elektricität 90 Proc., bei negativer Elektricität 70 Proc. der von der ganzen Kugel angenommenen Ladung.

Dass die Ladung der Halbkugel einen im Verhältnis zur Ladung der Vollkugel so hohen Wert annimmt, ist so zu erklären, dass eine Anzahl von Kraftlinien, die bei Anwesenheit mehrerer Leiter im Felde sich auf dieselben verteilen, bei Gegenwart eines einzigen zu demselben hingezogen werden.

7. Ist nur ein einziger Leiter im Kraftfelde, so ist der Uebergang der Elektricität zu demselben nur wenig abhängig von seiner Stellung zur Spitzenaxe. Ich brachte eine Scheibe von 11 cm Durchmesser in 10 cm Abstand in den Strahlungsbereich der Spitze und zwar zuerst senkrecht zur Axe der Spitze. Die Scheibe wurde dann bei constantem Abstand von der Spitze gedreht; erst bei einer Stellung, in der die Normale auf der Scheibe mit der Axe der Spitze einen Winkel von 45° bildete, beobachtete ich eine Abnahme der Strahlung um

10 Proc. Eine Maximalströmung der Elektricität in der Verlängerungsrichtung der Spitze ist zwar stets zu constatiren, aber dieselbe ist nur gering; dies zeigte sich auch bei Versuchen, in denen die Spitze nicht mehr vertical zur Trennungsfläche der Halbkugeln, sondern unter einem Winkel von 45° zu derselben eingeführt wurde.

8. Zur weiteren Untersuchung der Frage, ob die positive Elektricität eine grössere Bevorzugung der Ausstrahlung in der Richtung der Spitzenaxe zeigt als die negative, wurde folgender Versuch gemacht. Aus einer Kugel ($r = 5,5$ cm) wurde ein Segment von 45° Oeffnungswinkel herausgeschnitten und untersucht, welche Ladung dasselbe annahm, wenn der übrige Teil der Kugel zur Erde abgeleitet war; die Spitze wurde in drei verschiedenen Stellungen in die Kugel eingeführt durch die drei aus Figur 6 ersichtlichen Ansätze *a*, *b* und *c*.

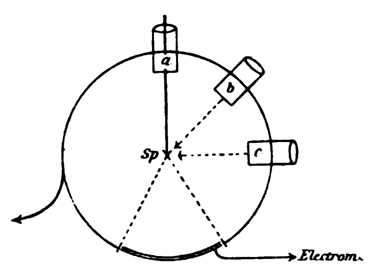


Fig. 6.

Die Beobachtungen ergaben, dass für + Elektricität die Abnahme der Ladung bedeutender ist als für — Elektricität, wenn die Spitze von *a* nach *b* und schliesslich nach *c* gebracht wurde; die einzelnen Beobachtungen zeigen indessen keine sehr gute ziffernmässige Uebereinstimmung, und zwar rührt dies daher, dass es bei der feuchtwarmen Luft in den Monaten Juni und Juli überhaupt nicht mehr möglich war, zuverlässige quantitative Messungen auszuführen. Qualitativ war aber zu erkennen, dass die — Elektricität mehr zerstreut, die + Elektricität mehr in der Axenrichtung zusammengehalten wird.

9. Strahlung in verschiedenen Gasen bei normalem Druck. Die strahlende Spitze ist durch Paraffin isolirt, mittels eines Schliffstückes luftdicht in eine Glasflasche von 4—5 l Inhalt eingeführt. Ein Quecksilberhorizont auf dem Boden der Flasche[1]) vertritt die bisher gebrauchte Scheibe.

1) Eine ausführliche Beschreibung des Apparates, sowie eine Angabe des Darstellungs- und Reinigungsverfahrens der angewandten Gase findet sich in der Dissertation.

Zur Füllung der Flasche benutzte ich getrocknete Luft, Kohlendioxyd, Sauerstoff und Stickstoff. Die Versuche wurden denen in freier Luft analog ausgeführt, mit dem Unterschied, dass die Regulirspitzen (vgl. p. 302) fortgelassen wurden. Soll die Untersuchung der Strahlung in irgend einem Gase vorgenommen werden, so müssen alle anderen in einem zweiten Medium befindlichen Spitzen vermieden werden. Es zeigte sich dies gleich bei den ersten Versuchen mit O_2 und CO_2. Bei Anwendung der Hülfsspitzen bekam ich in diesen Gasen solche Unregelmässigkeiten, dass ich auf diese Regulirung verzichten musste.

Beobachtet wurde in dem Spannungsintervall von 3000 bis 9000 Volt.

Es wurde stets mit den hohen Spannungen begonnen, bis zu den niedrigen herabgegangen und die Beobachtungen aufwärts wiederholt. Die Differenzen zwischen zwei so ermittelten Werten sind durchweg zu vernachlässigen.

Es zeigte sich, dass in sämmtlichen untersuchten Gasen die negative Elektricität in grösserer Menge übertritt als die positive. Die Unterschiede der absoluten Mengen, die sich in Luft und Stickstoff ergeben, sind sehr gering; erstere ergiebt etwas mehr bei — Elektricität, letzterer bei + Elektricität.

Bildet man für die untersuchten Gase den Quotienten $-E/+E$, so erhält man im Mittel

für O_2 1,4   für Luft 2,5
„ N_2 1,7   „ CO_2 4,7.

Es zeigt also O_2 eine deutliche Bevorzugung von + Elektricität, CO_2 eine solche von — Elektricität.

Bei seinen Versuchen über die Spitzenausstrahlung am Teslapole hat Hr. Himstedt die Gase in eine entsprechende Reihe geordnet und findet in Sauerstoff und Luft die + Ausstrahlung, in Stickstoff und Kohlendioxyd die — Ausstrahlung überwiegend.

Das ausgeprägt entgegengesetzte Verhalten von O_2 und CO_2 tritt also in beiden Fällen auf, wo hingegen hier bei der Ausstrahlung statischer Elektricität der Stickstoff keine Bevorzugung der — Elektricität zeigt.

10. Ich fasse die Ergebnisse der Untersuchung kurz zusammen:

a) Der Beginn des Ausstrahlens aus einer Spitze erfolgt für negative Elektricität *stets* bei niedrigerem Potential als für positive.

b) Unter gleichen Bedingungen ist die bei *negativer* Ladung der Spitze ausgestrahlte Elektricitätsmenge *stets grösser* als bei *positiver*.[1])

c) Die übergestrahlte Menge lässt sich als Function des Potentials der Spitze darstellen nach der Formel $E = a(V - b)$; hierin ist b identisch mit dem *Minimumpotential*; die Formel hat Gültigkeit für Potentiale, die zwischen dem Minimumpotential und 5000 Volt liegen. Für höhere Spannungen findet sich die von Hrn. Warburg angegebene Formel:

$$E = C V(V - M)$$

bestätigt.

d) Das Minimumpotential ist *abhängig* von der Entfernung; bei kleineren Abständen wächst es rasch; bei grösseren Abständen wird es annähernd *constant*.

e) Die positive Elektricität zeigt eine stärker ausgeprägte Strahlung in der Axe der Spitze als die negative.

f) Die untersuchten Gase lassen sich hinsichtlich ihrer Fähigkeit, die Ausstrahlung *negativer* Elektricität zu begünstigen, in eine Reihe ordnen, in der *Sauerstoff* und *Kohlensäure* den ersten bez. letzten Platz einnehmen, gerade so wie bei der Ausstrahlung aus einem Teslapole.

Vorliegende Arbeit wurde auf Anregung von Hrn. Prof. Dr. Himstedt unternommen und im Physikalischen Institut der Universität ausgeführt; es sei mir erlaubt, auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer für seine Unterstützung meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

Freiburg i. Br., Juni 1899.

1) Die unter a) angeführte Thatsache ist wohl zuerst von Hrn. W. C. Röntgen festgestellt, später von den Herren K. Wesendonck, J. Precht und anderen bestätigt worden. Der Letztgenannte macht dabei auch auf Satz 2 aufmerksam mit den Worten: „Da für negative Elektricität im allgemeinen das Anfangspotential kleiner ist, so ist bei gleicher Spannung die entladene Menge negativer Elektricität grösser.“ Vgl. J. Precht, Wied. Ann. 49. p. 180. 1893.

(Eingegangen 14. October 1899.)

10. *Ueber das Problem eines elektrisch erwärmten Leiters; von H. Diesselhorst.*

In seinen kürzlich mitgeteilten Untersuchungen[1]) über die stationäre Temperaturverteilung in einem Leiter, in welchem ein elektrischer Strom Joule'sche Wärme erzeugt, hat Hr. Kohlrausch eine sehr einfache und allgemeine Beziehung zwischen der Temperatur und dem Potential an einer beliebigen Stelle des Leiters mitgeteilt. Hr. Voigt[2]) hat inzwischen diese Untersuchungen ausgedehnt, indem er den Einfluss der Thomsonwärme in Rechnung zog, und ist dabei auch auf die Frage nach der Eindeutigkeit der Lösung näher eingegangen. Er beweist dieselbe für sein Problem unter Annahme constanter Leitvermögen.

Im Folgenden sei unter Beschränkung auf das einfachere Kohlrausch'sche Problem, aber unter Zulassung einer beliebigen Veränderlichkeit der Leitvermögen mit der Temperatur ein Beweis gegeben, dass den zu Grunde liegenden Differentialgleichungen und Grenzbedingungen nur eine Lösung genügt. Zugleich sei auf ein sich leicht darbietendes Verfahren hingewiesen, durch welches die allgemeine Integration der Gleichungen auf eine bekannte einfachere Aufgabe zurückgeführt werden kann. Endlich mögen noch einige Bemerkungen über den von Hrn. Voigt schon hinzugenommenen Thomsoneffect Platz finden.

Bedeutet u die Temperatur, v das Potential, λ das Leitvermögen für Wärme, $\varkappa$ das für Elektricität, so ist die Aufgabe von Kohlrausch definirt durch die beiden Differentialgleichungen, welche die Constanz der Strömung für Wärme und Elektricität im Inneren des Leiters ausdrücken:

---

1) F. Kohlrausch, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 27. Juli 1899; Ann. d. Phys. 1. p. 132. 1900.

2) W. Voigt, Gött. Nachr. 1899. p. 228.

$$\varkappa\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right]+\frac{\partial\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\lambda\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial\left(\varkappa\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\varkappa\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\varkappa\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\partial z}=0 \tag{2}$$

und durch die Bedingungen, dass an zwei als „Elektroden“ bezeichneten abgegrenzten Teilen der Oberfläche die Functionen u und v constante Werte $u_1\, v_1$ bez. $u_2\, v_2$ annehmen, während an den übrigen Teilen der Oberfläche die Ableitungen nach der Normale

$$\frac{\partial u}{\partial n} \quad \text{und} \quad \frac{\partial v}{\partial n}$$

verschwinden. λ und $\varkappa$ sind gegebene eindeutige, stetige und stets positive Functionen von u.

Wenn $\varkappa$ constant ist, so geht die Gleichung (2) über in die Gleichung von Laplace, von welcher in der Potentialtheorie mit Hülfe des Green'schen Satzes bewiesen wird, dass sie bei gegebenen Grenzwerten für v oder $\partial v/\partial n$ nicht mehr als eine Lösung besitzt. Dieser Beweis gilt auch für eine Gleichung von der Form (2), wenn darin $\varkappa$ eine gegebene Function der Coordinaten darstellt. Es sei hier kurz angedeutet, dass man in dem Green'schen Satze

$$\int\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}+u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right\}d\tau$$
$$=-\int u\frac{\partial v}{dn}d\sigma,$$

wo $d\tau$ das Raumelement, $d\sigma$ das Oberflächenelement bedeutet, nur u durch $\varkappa u$ zu ersetzen und dann $u=v$ zu machen braucht, um in der resultirenden Beziehung

$$\int\left\{\varkappa\left(\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right)\right.$$
$$\left.+v\left(\frac{\partial\left(\varkappa\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\varkappa\frac{\partial v}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\varkappa\frac{\partial v}{\partial z}\right)}{\partial z}\right)\right\}d\tau=-\int\varkappa v\frac{\partial v}{\partial n}d\sigma$$

den Hülfssatz zu erhalten, welcher die für die Laplace'sche Gleichung benutzte Methode unverändert anzuwenden erlaubt,

wenn man noch hinzunimmt, dass $\varkappa$ keinem Zeichenwechsel unterliegt. Es gilt also der in England unter dem Namen „Lord Kelvin's extension of Green's theorem" bekannte Satz[1]):

„Wenn $\varkappa$ eine gegebene eindeutige, stetige und ihr Vorzeichen nicht wechselnde Function der Coordinaten darstellt, so hat die Gleichung (2) nicht mehr als *eine* Lösung v, welche der Grenzbedingung genügt, dass v oder $\partial v / \partial n$ an der Oberfläche in beliebig vorgeschriebene Werte stetig übergehen."

Von diesem Satze werden wir im Folgenden Gebrauch machen. Ohne weiteres ist er nicht anwendbar, weil $\varkappa$ als Function der Temperatur und nicht des Ortes gegeben ist. Wir formen nun die Gleichung (1) um, indem wir Gleichung (2) mit v multiplicirt hinzuaddiren. Setzt man dann

$$\varkappa\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + v\,\frac{\partial\left(\varkappa\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\varkappa\, v\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} \text{ etc.,}$$

so ergiebt sich

$$\text{(1a)}\quad \frac{\partial\left(\varkappa\, v\,\frac{\partial v}{\partial x} + \lambda\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\varkappa\, v\,\frac{\partial v}{\partial y} + \lambda\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\varkappa\, v\,\frac{\partial v}{\partial z} + \lambda\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z} = 0.$$

Wir führen jetzt für u eine neue Variable Θ ein, welche mit u in der Beziehung steht:

$$\text{(3)}\qquad \Theta = \tfrac{1}{2} v^2 + \int\limits_c^u \frac{\lambda}{\varkappa}\, d u\,,$$

wo c irgend eine Constante bedeutet. Da $\lambda / \varkappa$ stets positiv ist und nicht unendlich wird, so ist sowohl Θ eine eindeutige, stetige Function von u, als u eine ebensolche von Θ. An Stelle der Gleichung (1a) tritt die neue Gleichung für Θ:

$$\text{(4)}\qquad \frac{\partial\left(\varkappa\,\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\varkappa\,\frac{\partial \Theta}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\varkappa\,\frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)}{\partial z} = 0,$$

welche mit der Gleichung (2) für v der Form nach übereinstimmt. Die Grenzbedingungen für Θ ergeben sich mittels der Definition (3) aus denen für u und v. Da

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} = v\,\frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\lambda}{\varkappa}\,\frac{\partial u}{\partial n},$$

1) W. Thomson u. P. G. Tait, Nat. Philosophy, Chapter I, App. A.

so wird an allen Stellen der Oberfläche, wo

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

ist, auch

$$\frac{\partial \Theta}{\partial n} = 0.$$

Auf den beiden Elektroden, wo u und v constante Werte $u_1\, v_1$ bez. $u_2\, v_2$ annehmen, erhält auch Θ constante Werte

$$\Theta_1 = \tfrac{1}{2} v_1^2 + \int\limits_c^{u_1} \frac{\lambda}{\varkappa}\, d u \quad \text{und} \quad \Theta_2 = \tfrac{1}{2} v_2^2 + \int\limits_c^{u_2} \frac{\lambda}{\varkappa}\, d u .$$

Die lineare Function von Θ:

$$\Phi = \frac{\Theta - \Theta_1}{\Theta_2 - \Theta_1} (v_2 - v_1) + v_1 \tag{5}$$

genügt dann ebenfalls derselben Differentialgleichung, wie Θ und v, und denselben Grenzbedingungen, wie v, indem $\Phi_1 = v_1$ und $\Phi_2 = v_2$ wird.

Denken wir uns nun irgend einen der etwa möglichen stationären Zustände vorhanden, so ist für diese Verteilung u und damit $\varkappa$ eine eindeutige, stetige Function des Ortes, also nach dem vorausgeschickten Hülfssatz die Function Φ mit der zur selben Verteilung gehörenden Function v identisch. Es ist also nach (5) Θ eine lineare Function von v, etwa $\Theta = A v + B$, und dann nach (3):

$$\int\limits_c^{u} \frac{\lambda}{\varkappa}\, d u = - \tfrac{1}{2} v^2 + A v + B . \tag{6}$$

Diese Beziehung, die das Integral von Kohlrausch darstellt, gilt also für jeden möglichen Zustand. Es lässt sich jetzt aber leicht zeigen, dass nur ein einziger Zustand möglich ist. Vermöge der Beziehung (6) ist nämlich u und damit auch $\varkappa$ eine eindeutige, stetige Function von v. Setzt man dann

$$V = \int\limits_{v_0}^{v} \varkappa\, d v , \tag{7}$$

so stehen V und v, weil $\varkappa$ stets positiv ist, in umkehrbar eindeutiger und stetiger Beziehung. Durch die Substitution geht Gleichung (2) über in die Form

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{8}$$

von der bekannt ist, dass sie in Verbindung mit den aus (7) sich ergebenden Grenzbedingungen eine eindeutige Lösung besitzt.

Der Satz, dass die Function V ihren grössten und kleinsten Wert auf der Begrenzung hat, überträgt sich auch auf die Function v, da dieselbe ständig mit V wächst.

Eine Fläche im Leiter, welche bei constantem Leitvermögen Niveaufläche sein würde, bleibt es auch bei einem von der Temperatur abhängigen Leitvermögen.

Zurückführung des Problems auf die Integration der Laplace'schen Gleichung.

Durch die Substitution (7) ist zugleich der Weg zur Integration der Gleichung (2) gegeben. Man erhält nämlich für V an den Elektroden constante Grenzwerte V_1 und V_2 und an den übrigen Stellen der Oberfläche

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0.$$

Sobald also Gleichung (8) unter diesen Grenzbedingungen für eine specielle Form des Leiters integrirt ist, kann man durch Umkehrung von (7) auch v als Function der Coordinaten darstellen. u erhält man dann aus (6). Wir wollen noch die Beziehung zwischen u und V direct aufstellen, indem wir zur Vereinfachung (6) in der Form schreiben:

$$2 \int\limits_u^{u_0} \frac{\lambda}{\varkappa} d u = (v - v_0)^2, \tag{9}$$

wo die Constanten u_0 und v_0 sich aus denen der Gleichung (6) oder direct aus den Grenzbedingungen eindeutig und reell ergeben. u_0 stellt ein Maximum an der Stelle $v = v_0$ dar. Drückt man v_0 durch die Grenzwerte $u_1\, v_1$ und $u_2\, v_2$ an den Elektroden aus:

$$v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2} - \frac{1}{v_1 - v_2} \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{\lambda}{\varkappa} d u,$$

so erkennt man leicht, dass das der Beziehung (9) zukommende Temperaturmaximum in dem Leiter liegt, d. h. dass $v_2 - v_0$ und $v_0 - v_1$ einerlei Vorzeichen haben, sobald $(v_1 - v_2)^2$ grösser ist, als der absolute Wert des Integrals

$$2\int_{u_1}^{u_2} \frac{\lambda}{\varkappa}\, d u\,.$$

Um nun u als Function von V zu erhalten, bilden wir aus (9) durch Differentiation

$$\frac{\lambda}{\varkappa}\frac{d u}{d v} = v_0 - v = \pm \sqrt{2\int_u^{u_0} \frac{\lambda}{\varkappa}\, d u}$$

und durch Einsetzen von $\varkappa\, d v$ in (7)

$$V = \int_{u_0}^{u} \frac{\lambda\, d u}{\pm \sqrt{2\int_u^{u_0} \frac{\lambda}{\varkappa}\, d u}}\,. \tag{10}$$

Die Umkehrung dieses Integrals muss nach obigem eine eindeutige Function von V sein.

Zur wirklichen Ausrechnung müssen λ und $\varkappa$ in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur bekannt sein.

Wir wollen als einfachstes Beispiel annehmen, was bei den meisten reinen Metallen in gewöhnlichen Temperaturen nahe erfüllt zu sein scheint, dass λ constant und $\varkappa$ umgekehrt proportional der absoluten Temperatur ist. Indem wir u nach der absoluten Scala messen, setzen wir $(\lambda/\varkappa) = p^2 u$.[1]) Man erhält dann aus (9):

$$p^2 (u_0^2 - u^2) = (v - v_0)^2,$$

also

$$u = + \sqrt{u_0^2 - \left(\frac{v - v_0}{p}\right)^2}\,.$$

Setzt man dann $\varkappa = (\lambda / p^2 u)$ in (7) ein, so ergiebt die Integration:

1) Misst man das Potential in Volt und Wärmemengen in dem Aequivalent der Wattsecunde, so erhält p etwa den Wert 0,000147.

$$V = \frac{\lambda}{p} \arcsin \frac{v - v_0}{p\,u_0}.$$

Da

$$\frac{v - v_0}{p\,u_0} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{u}{u_0}\right)^2}$$

und stets $u \leqq u_0$ ist, so wird der absolute Wert von $(v - v_0)/p\,u_0$ nicht grösser als 1. Die vorkommenden Winkel beschränken sich auf den ersten und vierten Quadranten.

Durch Umkehren erhält man, indem wir gleich den entsprechenden Ausdruck für die Temperatur hinzunehmen:

$$\frac{v - v_0}{p} = u_0 \sin \frac{p\,V}{\lambda},$$

$$u = u_0 \cos \frac{p\,V}{\lambda}.$$

Dabei sind u_0 und v_0 folgendermaassen durch $u_1\,v_1$ und $u_2\,v_2$ bestimmt:

$$u_0^2 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{4\,p^2} + p^2 K^2,$$

$$v_0 = \frac{v_1 + v_2}{2} + p^2 K,$$

wo

$$K = \frac{1}{2}\,\frac{u_1^2 - u_2^2}{v_1 - v_2}$$

gesetzt ist.

V ist definirt durch Differentialgleichung (8). Die Werte V_1 und V_2 an den Elektroden berechnen sich aus den Gleichungen

$$\operatorname{tg} \frac{p\,V_1}{\lambda} = \frac{v_1 - v_0}{p\,u_1}, \qquad \operatorname{tg} \frac{p\,V_2}{\lambda} = \frac{v_2 - v_0}{p\,u_2}.$$

In einem cylindrischen Stabe mit Elektroden senkrecht zur Axe ist V als das Integral der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

proportional der Längendifferenz. Sind also die Einheiten und Nullpunkte entsprechend gewählt, so wird die Temperatur gleich dem Cosinus und das Potential gleich dem Sinus des Abstandes von der Stelle des Temperaturmaximums.

Einfluss des Thomsoneffectes.

Bezeichnet man mit σ die Wärmemenge, welche ausser der Joule'schen Wärme erzeugt wird, wenn die Einheit der Elektricitätsmenge zu einer um 1° kälteren Stelle des Leiters fliesst, also die Grösse, welche W. Thomson die specifische Wärme der Elektricität genannt hat, so tritt zu der linken Seite der Gleichung (1) noch das Glied

$$\sigma\varkappa\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

σ ist irgend eine Function der Temperatur und kann sowohl positive als negative Werte annehmen.

Wenn man jetzt Gleichung (2) mit $(v+\int\sigma\,d\,u)$ multiplicirt und zu der durch das obige Glied vervollständigten ersten hinzu addirt, so erhält man die neue Gleichung

$$\sum\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa v\frac{\partial v}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+\varkappa\int\sigma\,d\,u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0.$$

Man erkennt leicht, dass auch jetzt eine Lösung existirt, in der u nur von v abhängt.

Unter dieser Annahme wird nämlich auch $\int\sigma\,d\,u$ eine Function von v und man erhält durch die Substitution

$$\Theta=\tfrac{1}{2}v^2+\int\frac{\lambda}{\varkappa}\,d\,u+\int d\,v\int\sigma\,d\,u$$

für Θ wieder die Differentialgleichung (4), sowie constante Grenzwerte Θ_1 und Θ_2 an den Elektroden und $(\partial\,\Theta/\partial\,n)=0$ an der übrigen Oberfläche. Es ist also wiederum Θ eine lineare Function von v und die Lösung wird dargestellt durch die Gleichung

$$(11)\qquad\int\frac{\lambda}{\varkappa}\,d\,u=-\tfrac{1}{2}v^2+A\,v+B-\int d\,v\int\sigma\,d\,u.$$

Hieraus erhält man die Differentialgleichung

$$(12)\qquad\frac{\lambda}{\varkappa}\frac{d\,u}{d\,v}=-v+A-\int\sigma\,d\,u,$$

welche Hr. Voigt aufgestellt und für den Fall, dass

$$\sigma\quad\text{und}\quad\frac{d\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right)}{d\,u}=a$$

constant sind, durch folgendes Integral gelöst hat:

$$(13)\quad \begin{cases} C - \log\left(\frac{\lambda}{\varkappa}\right) = \frac{1}{2}\log(1 - \sigma\,\omega + a\,\omega^2) \\ + \frac{\sigma}{\sqrt{4\,a - \sigma^2}} \operatorname{arctg} \frac{2\,a\,\omega - \sigma}{\sqrt{4\,a - \sigma^2}}, \end{cases}$$

wo

$$\omega = \frac{\varkappa}{\lambda}(v - A + \sigma\,u)$$

gesetzt ist.

Wir wollen die Behandlung eines zweiten Falles hinzufügen, indem wir annehmen, dass $(\sigma \, . \, \varkappa/\lambda) = \tau$ constant sei. Diese Bedingung, die natürlich überhaupt keine Beschränkung darstellt, sobald es sich um Näherungsformeln für kleine Temperaturintervalle handelt, ist erfüllt, wenn wir mit Lorenz[1]) $\lambda/\varkappa$ und mit Tait[2]) σ der absoluten Temperatur proportional setzen. Das letztere scheint nach den Versuchen Battelli's[3]) gerade für die Metalle erlaubt zu sein, für welche auch die Lorenz'sche Beziehung mit grosser Näherung gilt. Unter dieser Voraussetzung, dass also

$$\frac{\sigma\,\varkappa}{\lambda} = \tau = \text{const.},$$

können wir die Integration ausführen, ohne über $\lambda/\varkappa$ eine specielle Annahme zu machen. Man erhält nämlich aus (12)

$$\frac{\lambda}{\varkappa}\frac{d\,u}{d\,v} = -\,v + A - \tau\int\frac{\lambda}{\varkappa}\,d\,u$$

und daraus durch die Substitution

$$\omega = v - A + \tau\int\frac{\lambda}{\varkappa}\,d\,u$$

$$\frac{d\,\omega}{d\,v} = 1 - \tau\,\omega\,.$$

Die Integration ist jetzt ausführbar und liefert

$$(14)\qquad \int\frac{\lambda}{\varkappa}\,d\,u = \frac{A}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} - \frac{v}{\tau} - A'\,e^{-\tau\,v},$$

oder unter Einführung anderer Constanten u_0 und C

$$\int\limits_{u_0}^{u}\frac{\lambda}{\varkappa}\,d\,u = -\,\frac{e^{-\tau\,v} - 1 + \tau\,v}{\tau^2} + C\cdot\frac{e^{-\tau\,v} - 1}{\tau},$$

1) L. Lorenz, Wied. Ann. **13.** p. 599. 1881.
2) P. G. Tait, Proc. Roy. Soc. of Ed. **7.** p. 308. 1870/71.
3) A. Battelli, Atti di Torino **22.** p. 48 und 539. 1886/87.

in welcher Form eine Reihenentwickelung nach Potenzen von τ als erstes Glied den Kohlrausch'schen Ausdruck liefert. Die Reihe lautet:

$$\int\limits_{u_0}^{u} \frac{\lambda}{\varkappa}\, d u = - \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} (-1)^{\nu} \left(\frac{v^{\nu+2}}{(\nu+2)!} + C \cdot \frac{v^{\nu+1}}{(\nu+1)!} \right) \cdot \tau^{\nu}.$$

u_0 ist die Temperatur an der Stelle $v = 0$ und C ist gleich dem Wert $-\lambda/\varkappa \,.\, d u / d v$ an derselben Stelle.

Rechnet man also das Potential von der Stelle des Temperaturmaximums aus, so wird $C = 0$.

Unter Beschränkung auf die erste Potenz $v\tau$ erhält man dann die Näherung

$$\int\limits_{u_0}^{u} \frac{\lambda}{\varkappa}\, d u = - \tfrac{1}{2} v^2 (1 - \tfrac{1}{3} v \tau), \tag{15}$$

wo also u_0 die Maximaltemperatur bedeutet, während das zugehörige Potential gleich Null gesetzt ist. Der Einfluss des Thomsoneffectes wächst mit v, d. h. mit der Entfernung von der Stelle des Maximums. Nach den Zahlen Battelli's erreicht τ bei einigen Metallen (Antimon, Wismutlegirung), wenn man v nach Volt rechnet, die Grösse 1, sodass für $v = 0{,}03$ Volt die Temperaturdifferenz $(u_0 - u)$ durch Thomsonwärme um ein Procent beeinflusst wird. Dem Wert $v = 0{,}03$ Volt entspricht etwa eine Temperaturdifferenz $u_0 - u = 60$ bis 70°, wenn die Elektroden auf Zimmertemperatur gehalten werden.

Ebenfalls unter der Voraussetzung, dass $v\tau$ eine kleine Grösse ist, stimmt das Mittel der Temperaturen u' und u'' an den Stellen $+v$ und $-v$ mit derjenigen Temperatur überein, welche ohne Thomsoneffect an diesen Stellen sein würde. Denn setzt man $u' = u + \varepsilon$ und $u'' = u - \varepsilon$, wo also $u = \frac{1}{2}(u' + u'')$, so erhält man

$$\int\limits_{u_0}^{u'} \frac{\lambda}{\varkappa}\, d u + \int\limits_{u_0}^{u''} \frac{\lambda}{\varkappa}\, d u = 2 \int\limits_{u_0}^{u} \frac{\lambda}{\varkappa}\, d u + \int\limits_{u}^{u+\varepsilon} \frac{\lambda}{\varkappa}\, d u + \int\limits_{u}^{u-\varepsilon} \frac{\lambda}{\varkappa}\, d u = - v^2$$

und, da $\lambda/\varkappa$ in dem kleinen Intervall von $(u - \varepsilon)$ bis $(u + \varepsilon)$ als constant angesehen werden kann

$$\int_{u}^{u+\varepsilon} \frac{\lambda}{\varkappa} d u + \int_{u}^{u-\varepsilon} \frac{\lambda}{\varkappa} d u = 0 .$$

Dieser Satz lässt sich auch so aussprechen, dass durch den Thomsoneffect die Grösse des Temperaturmaximums nicht geändert wird, wenn die Elektroden auf gleicher Temperatur gehalten werden. Dagegen tritt eine Verschiebung des Maximums ein in der Richtung, nach welcher der Strom die Wärme mitführt. Bezeichnet $\pm v_0$ das Potential der Elektroden im idealen Fall ohne Thomsonwärme, dagegen $+ v_1$ und $- v_2$ die Potentialwerte, auf welchen man die Elektroden halten muss, um bei Einwirkung des Thomsoneffectes dieselbe Maximaltemperatur u_0 bei derselben Elektrodentemperatur u zu erzielen, so muss nach (15) sein

$$v_1^2 (1 - \tfrac{1}{3} v_1 \tau) = v_0^2 \quad \text{und} \quad v_2^2 (1 + \tfrac{1}{3} v_2 \tau) = v_0^2 .$$

In den Correctionsgliedern darf

$$v_1 = v_2 = v_0 \quad \text{und} \quad \sqrt{1 \pm \tfrac{1}{3} v_0 \tau} = 1 \pm \tfrac{1}{6} v_0 \tau$$

gesetzt werden, sodass man erhält

$$v_1 = v_0 (1 + \tfrac{1}{6} v_0 \tau) \quad \text{und} \quad v_2 = v_0 (1 - \tfrac{1}{6} v_0 \tau) .$$

Die Grösse der Verschiebung beträgt also $v_0 \cdot \frac{1}{6} v_0 \tau$, während das Gesamtpotentialgefälle $v_1 + v_2 = 2 v_0$ dasselbe bleibt.

Während der Fall mit gleichen Elektrodentemperaturen, der zur Bestimmung von $\lambda / \varkappa$ benutzt werden kann, durch den Thomsoneffect nicht wesentlich beeinträchtigt wird, ist der andere Fall beträchtlich ungleicher Elektrodentemperaturen gerade zur Bestimmung des Thomsoneffectes geeignet. Hier wird durch Umkehren der Stromrichtung die im Leiter entwickelte Wärmemenge und damit die Temperatur einer mittleren Stelle infolge des Thomsoneffectes geändert, sodass man die Grösse des letzteren aus der Aenderung berechnen kann. Auf diese Methode weist auch Hr. Voigt[1]) hin. Für den Fall eines linearen Leiters sind über den Gegenstand von Hrn. Straneo[2]) und wohl zuerst von Verdet[3]) Rechnungen aus-

1) W. Voigt, l. c.

2) P. Straneo, Atti dei Lincei Roma 7. 1. Sem. p. 346. 1898.

3) É. Verdet, Théor. méc. de la chaleur 2. p. 200. 1872.

geführt, die aber complicirtere Formeln liefern, weil sie nicht auf der einfachen Beziehung zwischen Temperatur und Potential beruhen.

Um eine brauchbare Formel zu erhalten, gehen wir aus von Gleichung (14). Eliminirt man die Constanten A und A' durch Einführen der Werte $u_1\,v_1$ und $u_2\,v_2$ an den Elektroden, so nimmt die Gleichung folgende Form an:

$$\frac{\displaystyle\int_{u_1}^{u}\frac{\lambda}{x}\,d\,u + \frac{v - v_1}{\tau}}{\displaystyle\int_{u_2}^{u}\frac{\lambda}{x}\,d\,u + \frac{v - v_2}{\tau}} = \frac{e^{-\tau v_1} - e^{-\tau v}}{e^{-\tau v_2} - e^{-\tau v}} = \frac{e^{\tau(v - v_1)} - 1}{e^{\tau(v - v_2)} - 1}.$$

Nach einem bekannten Satz über Proportionen erhält man hieraus, indem zugleich zur Abkürzung $v - v_1 = V_1$ und $v_2 - v = V_2$ gesetzt wird,

$$\frac{\displaystyle\int_{u_1}^{u}\frac{\lambda}{x}\,d\,u + \int_{u_2}^{u}\frac{\lambda}{x}\,d\,u + \frac{V_1 - V_2}{\tau}}{\displaystyle\int_{u_1}^{u_2}\frac{\lambda}{x}\,d\,u + \frac{V_1 + V_2}{\tau}} = \frac{e^{\tau V_1} + e^{-\tau V_2} - 2}{e^{\tau V_1} - e^{-\tau V_2}}.$$

Wir wollen die Rechnung, um die Verhältnisse zu übersehen, nur unter der Voraussetzung durchführen, dass $V_1 = V_2 = V$ ist. Die rechte Seite obiger Gleichung ist dann eine ungerade Function von $\tau\,V$ und reducirt sich daher bei der Reihenentwickelung, wenn man die dritte und höhere Potenzen von $\tau\,V$ vernachlässigt, auf den einfachen Ausdruck $\frac{1}{2}\,\tau\,V$. Durch Ausmultipliciren erhält man

$$\int_{u_1}^{u}\frac{\lambda}{x}\,d\,u + \int_{u_2}^{u}\frac{\lambda}{x}\,d\,u = V^2 + \tfrac{1}{2}\,\tau\,V\int_{u_1}^{u_2}\frac{\lambda}{x}\,d\,u\,.$$

Nach dem Commutiren der Stromrichtung sei bei denselben Elektrodentemperaturen und derselben Potentialdifferenz die Temperatur in der Mitte gleich u'. Dann hat man, da V das Zeichen wechselt,

$$\int_{u_1}^{u'} \frac{\lambda}{x}\,du + \int_{u_2}^{u'} \frac{\lambda}{x}\,du = V^2 - \tfrac{1}{2}\tau\,V \cdot \int_{u_1}^{u_2} \frac{\lambda}{x}\,du\,.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Subtrahiren

$$2\int_{u'}^{u} \frac{\lambda}{x}\,du = \tau\,.\,V\int_{u_1}^{u_2} \frac{\lambda}{x}\,du\,.$$

Wenn man annehmen darf, dass λ / x in den beiden Intervallen u' bis u und u_1 bis u_2 denselben Mittelwert besitzt, nimmt die Formel die einfache Gestalt an

$$(16) \qquad 2\,(u - u') = \tau\,.\,V(u_2 - u_1)\,.$$

Da nach Battelli τ meist zwischen 0,1 und 1 liegen wird (v in Volt gerechnet), so erhält man z. B. für $u_1 = 0^{\circ}$ und $u_2 = 100^{\circ}$ C. mit einer Potentialdifferenz zwischen den Elektroden $2\,V = 0{,}02$ Volt beim Commutiren der Stromrichtung für $u - u'$ eine Temperaturänderung, deren Grösse zwischen $0{,}05^{\circ}$ und $0{,}5^{\circ}$ liegt, während die infolge Joule'scher Wärme eintretende Temperaturerhöhung der Mitte etwa 6—7° beträgt. In höheren Temperaturen wird dies Verhältnis günstiger.

Zum Schlusse seien noch Formeln angegeben, welche zur wirklichen Berechnung dienen können. Es wird nämlich im allgemeinen schon wegen der ungleichen Elektrodentemperaturen nicht genau $V_1 = V_2$ sein, und nach dem Commutiren wird man etwas andere Temperaturen und Potentiale haben, die wir mit gestrichenen Buchstaben bezeichnen wollen. Dabei sei in V_1' und V_2' das Vorzeichen umgekehrt, um dieselben wieder wie V_1 und V_2 als positive Grössen zu haben. Der Einfluss dieser kleinen Aenderungen wird leicht sehr viel beträchtlicher sein, als der des zu messenden Thomsoneffectes selbst.

Es ist nun die Kenntnis von λ / x in dem in Betracht kommenden Temperaturintervall erforderlich. Man bilde dann, von einem beliebigen Anfangspunkt u_0 ausgehend, die Integralfunction

$$U = \int_{u_0}^{u} \frac{\lambda}{x}\,du$$

und setze

$$V = \tfrac{1}{4}(V_1 + V_2 + V_1' + V_2'); \quad \delta = \tfrac{1}{6}(V_2 - V_1 + V_2' - V_1'),$$

$$\Delta = \frac{V^2}{V_1 V_2}(2\,U - U_1 - U_2); \quad \Delta' = \frac{V^2}{V_1' V_2'}(2\,U' - U_1' - U_2'),$$

$$D = \tfrac{1}{2}(U_2 + U_2') - \tfrac{1}{2}(U_1 + U_1').$$

Darnach lässt sich τ berechnen aus der Formel

$$\Delta - \Delta' = (D + \delta\,V)\,V\tau. \tag{17}$$

Δ und Δ' stellen die auf gleiches Potential reducirten Temperaturabweichungen der Mitte vom geradlinigen Verlauf dar, D das Gesamtintervall. δ bedeutet eine Correction, welche durch die Ungleichheit von V_1 und V_2 bedingt ist.

Man erkennt hiernach leicht die Verwandtschaft der complicirten Formel (17) mit der einfacheren (16).

Charlottenburg, December 1899.

(Eingegangen 27. December 1899.)

11. *Ueber Wellenstromerreger;*
von C. Heinke.

Die folgende Arbeit soll als Ergänzung zu früheren Aufsätzen über Wellenströme [1]) die von den Betriebsverhältnissen abhängige Wirkungsweise der Wellenstromerreger [2]), in erster Linie derjenigen mit Elektrolyten, wie des „Wehneltunterbrechers", behandeln. Unter Anführung der wichtigeren Versuchsreihen nebst der aus ihnen abgeleiteten Werte soll versucht werden, die Erscheinungen auf andere, bereits als bekannt bez. aufgeklärt zu betrachtende elektrische Ausgleichvorgänge zurückzuführen oder in solche aufzulösen. Mit Rücksicht auf sofortige deutliche Erkennbarkeit der Grenze zwischen den unveränderlichen Messthatsachen und den auf Grund

1) C. Heinke, Elektrotechn. Zeitschr. **20.** p. 511. 1899; Wied. Ann. **69.** p. 612. 1899.

2) Unter „Wellenstromerreger" wären *im allgemeinen* Vorrichtungen zu verstehen, durch deren Einschaltung in den Stromkreis die elektrischen Ausgleichgrössen *periodische* Veränderlichkeit annehmen; hierdurch wird einerseits gegenüber den stationären Gleichstromverhältnissen ein Wechselglied mit allen Folgeerscheinungen eingeführt werden, andererseits gegenüber den symmetrischen Wechselstromverhältnissen eine Einseitigkeit oder Unsymmetrie bestehen bleiben bez. (bei Benutzung von Wechselstrom) erzeugt werden, welche den erzeugten Ausgleichvorgang (Wellenstrom) als Mischling charakterisirt, seine dahin gehende Auffassung und Behandlung für den Elektrophysiker nahelegt und namentlich in energetischer Beziehung als wünschenswert, wenn nicht notwendig erscheinen lässt (vgl. hierzu auch die Schlussbemerkung).

Die praktische Bedeutung der Wellenstromerreger und unter diesen im besonderen der sogen. Flüssigkeitsunterbrecher wird vorläufig in erster Linie in der bequemen Umwandlung (Transformirung) der verbreiteten und leichter beschaffbaren Gleichstromenergie in Wechselstromenergie bestehen in allen den Fällen, in welchen nur die letztere zur Wirksamkeit gelangt und in verhältnismässig kleinen Beträgen benötigt wird; sowie allgemein, wo eine bequeme Veränderung der secundlichen Periodenzahl des Wechselgliedes in weiten Grenzen erwünscht ist und höhere Spannungen direct ausgenutzt werden sollen.

einer bestimmten Deutung aus ihnen abgeleiteten Zahlenwerten, welche zum Teil die vorläufig ergänzende, aber vielleicht einer späteren Veränderung unterworfene Vorstellungsseite darstellen, wurden bei allen Versuchstabellen die beobachteten und die abgeleiteten Zahlenwerte durch einen Doppelstrich getrennt; die Messanordnung ist nochmals in Fig 1 angedeutet.

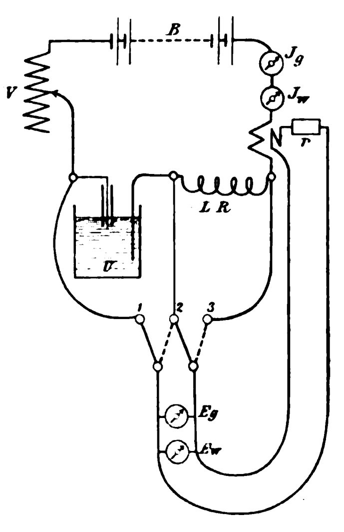


Fig. 1.

Diejenigen Stromkreisgrössen oder Leitungscoefficienten, welche neben den früher behandelten Ausgleichgrössen, wie Stromstärken und Spannungen, bei den Wellenstromerscheinungen (vgl. Aufsatz über Wellenströme) ins Spiel kommen, sind folgende: elektrischer Reibungswiderstand in verschiedener Form — teils als metallischer Leiterwiderstand, teils als elektrolytischer Ausbreitungswiderstand, für sich oder in Verbindung mit fictivem Polarisationswiderstand — ferner elektromagnetischer Trägheitswiderstand in Gestalt der in jedem Stromkreis und speciell im benutzten inductiven Widerstand vorhandenen Selbstinduction mit dem Coefficienten L, endlich dielektrischer (elastischer) Widerstand in Gestalt der Condensatorwirkung der gasigen Zwischenschicht [1]), wie sie am kleinsten Querschnitt

1) Zwischen der Niederschrift eines Teiles dieses Aufsatzes und der durch andere Arbeiten verhinderten Abschliessung erschienen eine ganze Reihe von Artikeln, welche die Erscheinungen am Wehneltunterbrecher behandeln und zur Aufklärung derselben nach verschiedenen Richtungen beigetragen haben, so namentlich A. Wehnelt, Wied. Ann. **68.** p. 259. 1899; H. Th. Simon, **68.** p. 273 u. p. 860. 1899; A. Voller u. B. Walter, Wied Ann. **68.** p. 526. 1899; E. Ruhmer, Elektrotechn. Zeitschr. **20.** p. 457. 1899. Die letztgenannte hat die Abhängigkeit der Erscheinung von der Erwärmung des Elektrolyten wohl im wesentlichen aufgedeckt.

Trotz der ziemlich allgemein geäusserten Annahme, dass keine Capacitätswirkung und kein elektrisches Resonanzphänomen mit im Spiele

des Elektrolyten (hier am Platin) sich ausbildet mit dem wirksamen Capacitätswert $C^{1,2}$. Besitzt der inductive Widerstand eine Secundärwickelung nach Art eines Wechselstromtransformators, so wird bei der elektromagnetischen Verkettung beider durch Wechselinduction die secundäre Belastung Aenderungen jener primären Leitungscoefficienten veranlassen können, doch ohne Einführung neuer Leitungscoefficienten, da die secundäre Belastung auch nur aus jenen drei Widerstandsarten bestehen kann. Die für den primären Ausgleich in Betracht kommenden resultirenden Werte von Reibungswiderstand R, Selbstinduction L und Capacität C erfahren hierdurch also nur eine quantitative Aenderung. Für den primären Ausgleichvorgang bedingend werden somit die Stromweg *und* Feld umfassenden Werte jener drei Leitungscoefficienten sein, doch wird die Combination bez. die Schaltungsweise der mit denselben behafteten Leiterstrecken von maassgebendem Einfluss für die Ausgleichsform sein und in Verbindung mit der im Primärkreis zunächst als ursprünglich vorhanden angenommenen Gleichspannung (elektromotorische Kraft) der Accumulatorenbatterie B den Verlauf des elektrischen Ausgleichvorganges bedingen. Die veränderten Verhältnisse beim Betrieb mit Wechselstrom wären gesondert zu erwähnen.

---

sei — Wehnelt hat die diesbezügliche anfängliche Vermutung später (vgl. Wied. Ann. 68. p. 259 unten und p. 271. 1899) ausdrücklich wieder aufgegeben — scheint dem Verfasser auf der einen Seite die gegenseitige Compensirung der beiden hohen, effectiv gemessenen Wechselspannungen nach aussen, die wiederholt beobachtete *Umkehr* der Stromrichtung, der labile Charakter der Erscheinung unter gewissen Bedingungen und anderes durchaus noch nicht hinreichend geklärt, auf der anderen die Möglichkeit einer Capacitätswirkung bez. Resonanz noch nicht endgültig widerlegt zu sein. Die Unterdrückung der beiden ersten Abschnitte dieser Arbeit mit dem darin gegebenen Beobachtungsmaterial nebst Auswertung desselben auch in Richtung der Annahme einer effectiven Capacitätswirkung schien aus diesem Grunde dem Verfasser doch nicht angezeigt zu sein. Ebenso wird der Versuch, die Erscheinungen unabhängig von der Selbstinduction zu machen, auf Grund der im Abschnitt III dieser Arbeit angeführten Beobachtungen wohl als vorläufig noch nicht gelungen zu betrachten sein, da das Fehlen der Selbstinduction, ebenso wie dort, wohl nur scheinbar gewesen sein dürfte.

I. Zur Wirkungsweise des elektrolytischen Wellenstromerregers.

In früheren Aufsätzen[1]) ist der Ausgleichvorgang auf Grund der galvanometrisch und effectiv gemessenen Spannungs- und Stromwerte in zwei Teile zerlegt, d. h. die vorhandene periodische Stromänderung ebenso wie die Spannungen durch äquivalente effective Werte von Gleichstrom und Wechselstrom ersetzt worden. Als eine Combination von Gleichstrom mit aufgelagertem Wechselstrom wurde diese elektrische Ausgleichsform mit dem Namen Wellenstrom belegt. Die eigentliche Bildung desselben, d. i. die Wirkungsweise des als Wellenstromerreger dienenden „elektrolytischen Unterbrechers" wurde aber noch nicht näher berührt.

Die bisherigen Ansichten über die Wirkungsweise gehen nicht unerheblich auseinander. Wehnelt und mit ihm wohl viele Andere nahm eine einfache Strom*unterbrechung* durch elektrolytisch in Gasform am Platinstift ausgeschiedene Zersetzungsproducte der Flüssigkeit an. Die wichtige Abänderung, welche unabhängig voneinander durch Wehnelt, Simon und L. Caldwell getroffen, aber namentlich von Simon[2]) praktisch weiter ausgebildet wurde, hat wohl festgestellt, dass die gasige Trennungsschicht auch durch Stromwärme gebildeter Wasserdampf sein kann, wenn nicht stets ist, doch nimmt auch Simon einfache Unterbrechung des Stromes an. D'Arsonval's Annahme der Wasserzersetzung durch das weissglühend werdende Ende des Platins sei nur kurz erwähnt. Der Verfasser hält es noch nicht für ausgemacht, dass durch die Gas- oder Dampfbildung für gewöhnlich eine völlige Strom*unterbrechung* eintritt. Eine hinreichend schnelle Strom*änderung*, welche sowohl kleiner als — nach Ausbildung des regelmässigen Wellenstromstadiums — auch grösser als der galvanische (Gleichstrom-)Wert sein kann, d. h. unter bestimmten Betriebsverhältnissen eine Strom*umkehr* herbeiführt, möchte er auf Grund seiner Messungen als wirkende Ursache der Erscheinungen betrachten, sodass die Unterbrechung nur einen Specialfall darstellen würde. Der Uebergang vom ersten oder Voltameterstadium zum

1) C. Heinke, Elekrotechn. Zeitschr. l. c. und Wied. Ann. l. c.

2) H. Th. Simon, Wied. Ann. 68. p. 860. 1899.

zweiten oder Wellenstromstadium ist durch die Ausgleichsgrössen der Tab. I charakterisirt. Die mit der im ersten Aufsatz angegebenen Messanordnung [1]) direct beobachteten Zahlen sind im oberen Teil folgender Tabelle angegeben.

Tabelle I.

Nr.	$E_g^{1,2}$ Volt	$E_w^{1,2}$ Volt	J_g Amp.	J_w Amp.	$P_w^{1,2}$ Watt
97a	6,3	6,0	9,15	9,1	55,8
97b	10,3	10,0	18,45	18,4	191,0
98a	um 13,5	13,3	22,6	22,7	285,0
98b	15,5	24,0	22,7	23,2	321,0
99	25,5	52,5	ca. 28,0	30,0	611,0

Nr.	$P_g^{1,2} = J_g \cdot E_g^{1,2}$ Voltampère	$R_g^{1,2} = \frac{E_g^{1,2}}{J_g^{1,2}}$ Ω_r	Bemerkungen
97a	57,5	0,688	Reine Gasentwickelung, Angaben der Instrumente noch ruhig.
97b	190	0,558	
98a	305	0,597	Angaben unruhig (kurz vor Entladung). Etwa bei $E_g^{1,2}$ = 14,5 Volt beginnen ganz vereinzelt die Entladungen.
98b	352	0,683	Etwa 100 Entladungen in 10 Secunden.
99	715	0,88	

Die Versuchsbedingungen waren hierbei folgende: Der mit dem positiven Pol verbundene 1,2 mm dicke Platindraht ragte etwa 38 mm aus dem Glasrohr, sodass seine wirksame Oberfläche oder der „active“ Querschnitt Q etwa 143 qmm betrug ($Pl + 38$, $Q = 143$). Die Deutung für das Einsetzen des Wellenstromstadiums, wobei nach Ansicht des Verfassers von dem stationären Gleichstromzustand und nicht von der beim

1) C. Heinke, Elektrotechn. Zeitschr. **20.** p. 511. **1899,** sowie Fig. 1 dieses Aufsatzes.

Einschalten des Stromes die Verhältnisse complicirenden und leicht Denkfehler veranlassenden Stromänderung auszugehen ist, wäre folgende: Bei zunehmender Steigerung von E_g bez. J_g (vgl. Nr. 97 a und b) wird schliesslich die Gasentwickelung so heftig, oder auch die am engsten Querschnitt durch Erwärmung eingeleitete Dampfbildung so merkbar, dass bei 98a bereits eine Variation des elektrolytisch wirksamen Querschnittes Q eintritt, weil das Gas nicht rasch genug abgeführt bez. condensirt werden kann. (Da die Uebertragung der Betrachtung auf die von Simon abgeänderte Form des „Unterbrechers" keine Schwierigkeiten macht und die wesentliche Eigenschaft die Entstehung einer teilweisen, zeitweilig nicht leitenden Scheidewand [dielektrischen Zwischenschicht] an dem activen Querschnitt ist, so möge das folgende nur auf den „Unterbrecher" mit Platin Bezogene auch jenen mit umfassen und die Bezeichnung Gas gleichzeitig den Wasserdampf mit einschliessen.) Schematisch gezeichnet zerfällt der Querschnitt Q in zwei Teile, wovon zeitweilig der eine durch eine Schicht des entwickelten Gases von der Flüssigkeit getrennt ist (in Fig. 2 punktirt angedeutet), während der andere mit ihr in Berührung steht. Erreicht die *vorüber*gehende und rasch wechselnde Gasbedeckung, verbunden mit einer vorübergehenden Abnahme der wirksamen Oberfläche bez. Vergrösserung des Ausbreitungswiderstandes $R_g^{1,2}$ für den Gleichstrom eine solche Grösse, dass die hiermit verbundene Stromstärkeänderung $-dJ/dt$ ein hinreichendes Anwachsen der Selbstinductionsspannung $-(dJ/dt).L$ veranlasst, so sind die Vorbedingungen zu einer Gasentladung aus folgendem Grunde gegeben. Die Spannung auf beiden Seiten der Gasschicht wird bei jener Stromschwankung $-dJ/dt$ aus zwei Gründen anwachsen: einmal, weil der Ausbreitungswiderstand $R_g^{1,2}$ vergrössert wird, während der übrige Ohm'sche Stromkreiswiderstand, z. B. der Vorschaltwiderstand, constant bleibt, wodurch eine grössere Concentration der Gleichspannung am Platinstift eintritt, ein zweites Mal, weil der im inductiven Widerstand (zwischen 2, 3) mit dem Selbstinductionscoefficienten L geweckte Spannungsstoss $-(dJ/dt).L$ in Richtung der abneh-

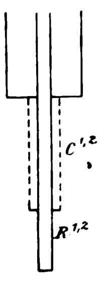


Fig. 2.

menden Stromstärke wirkt, d. h. in derselben Richtung; hierdurch wird zunächst eine Ladung der als Capacität $C^{1,2}$ wirkenden Gasschicht zwischen Platinstift und Flüssigkeit eintreten und falls die Spannung hoch genug ansteigt, eine disruptive Gasentladung, wozu bei dünner Gasschicht eine verhältnismässig kleine Spannung gehört. Die hierdurch veranlasste einmalige elektrische Schwingung wird bei passendem Verhältnis von Capacität $C^{1,2}$ und Selbstinduction $L^{2,3}$ (vgl. Fig. 3) in einen dauernden, als elektrische Resonanz bezeichneten Schwingungszustand übergehen können, wenn die Erneuerung und Grösse der Gasschicht den erforderlichen Ladestromrhythmus ermöglicht, wodurch der dem Gleichstromniveau J_g aufgelagerte Wechselstrom $J_\sim$, sowie alle Begleiterscheinungen der zugehörigen Spannungsverhältnisse und der energetischen Verhältnisse bedingt werden.[1]) Ein regelmässigerer Wellenstrom wird natürlich erst bei einer hinreichenden Anzahl Entladungen in der Secunde eintreten, während bei einer sehr geringen Zahl, z. B. noch oben bei Nr. 98b, die Stromstösse unregelmässig gestaltet sein dürften. Ein Unterschied der hier vorliegenden Resonanzerscheinungen gegenüber jenen Resonanzerscheinungen bei reinem Wechselstrom mit bestimmter, durch die Tourenzahl der Dynamo bedingten Wechselzahl z, sowie bestimmter Capacität, besteht nur insofern, als die Wechselstromresonanz mit den nahezu starren Werten von L, C und p, bez. Wechselzahl z, sehr viel labiler und auf ganz enge Versuchsgrenzen beschränkt ist, weil die Schwingungsgleichung

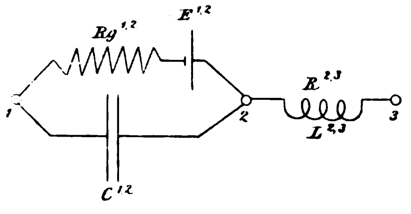


Fig. 3.

$$1 - p^2 C L = 0$$

bez.

$$z = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{1}{C . L}}$$

und für den Specialfall der Sinusschwingungen

1) Vgl. hierzu den Aufsatz über elektrische Resonanz bei Wechselstrom Elektrotechn. Zeitschr. **18.** p. 60. 1897, sowie den **Aufsatz über** Wellenströme, Elektrotechn. Zeitschr. **20.** p. 511 ff. 1899.

$$z = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{C.L}}$$

erfüllt sein muss. Der elektrolytische Wellenstromerreger besitzt eine viel grössere Anpassungsfähigkeit, da bei ihm der eine Wert, nämlich z, gleichsam elastisch ist — bis zu einem gewissen Grade auch $C^{1,2}$ —, sodass er sich innerhalb weiter Betriebsgrenzen gewissermaassen selbstthätig auf die entsprechende Wellenzahl oder Entladungszahl

$$n = \frac{z}{2},$$

einzustellen vermag, welche die Schwingungsgleichung

$$n = \frac{1}{2c}\sqrt{\frac{1}{C.L}}$$

erfüllt. Ein Ausser-Tritt-Fallen, wie es z. B. beim Abschnappen, d. h. Uebergang in das dritte Stadium der Fall ist (das Voltameterstadium wurde hierbei als das erste, das Wellenstromstadium als das zweite angenommen [1]), wird also viel länger hintangehalten werden, als in jenem Fall, sodass die ganze Resonanzerscheinung wegen ihrer selbstthätigen Anpassungsfähigkeit einen viel stabileren Charakter trägt. Jenes dritte Stadium mit der leuchtenden Gashülle um den Platinstift, welches dem vierten oder Glühstadium vorausgeht, aber bei passenden Spannungs- und Oberflächenverhältnissen beliebig lange erhalten werden kann, dürfte als ein *vollständiger* Ueberzug der Platinoberfläche mit Wasserdampf anzusehen sein, das Leuchten als eine glimmlichtartige Entladung (stationäre Gasentladung) durch diese Wasserdampfhülle hindurch. Der stationäre Zustand würde hierbei auf folgende Art erhalten werden: Der dauernd auf mehr als 100°, aber weniger als Glühtemperatur erwärmte Platinstift deckt seinen wegen der „Leidenfrost“artig wirkenden Dampfhülle geringen Wärmeverlust gerade mit Hülfe der Stromwärme der Gleichstromentladung durch die Dampfhülle hindurch, welche ihrerseits als Elektrode dient und je nach dem Pol Sauerstoff bez. Wasserstoff ausscheidet und abgleiten lässt.[1]) Wird die Span-

1) Vgl. hierzu C. Heinke, Elektrotechn. Zeitschr. 20. p. 512. 1899 unter III.

nung weiter gesteigert und damit die Stromstärke, so bringt die vergrösserte Wärmezufuhr bei der nicht entsprechend wachsenden Wärmeabfuhr das Platin zum Glühen.

Ohne secundäre Belastung und unter Weglassung aller Messinstrumente würde nach der obigen Auffassung die Wellenstromerreger-Schaltung durch Fig. 3 schematisirt dargestellt werden können, wobei die Wirkungsweise der letzteren durch *Parallel*schaltung eines zwischen gewissen Grenzen variablen Widerstandes $R_g^{1,2}$ und einer Capacität $C^{1,2}$ angedeutet ist. Hierbei würde der *Mittelwert* von $R_g^{1,2}$ das Gleichstromniveau J_g bedingen, während der aufgelagerte Wechselstrom $J_\sim$ zur Einführung eines *wirksamen Mittel*wertes von $C^{1,2}$ in Verbindung mit der Perioden- oder Wellenzahl ($n = z/2$) und der äquivalenten Wechselspannung $E_\sim^{1,2}$ führen würde; man hätte $J_\sim = E_C^{1,2} . p . C^{1,2}$ und $E_C^{1,2} = E_\sim^{1,2} \sin \varphi_1$ zu setzen; $p = 2\,c\,n$ würde für Sinuswellen den Wert $2\,\pi\,n$ annehmen, sonst aber einen anderen von der Wellenspannungscurve abhängigen Zahlenfactor c enthalten. Wie die Messungen zeigen, wäre $\sin \varphi_1$ meist sehr nahe der Einheit (vgl. unten). Variabel muss $C^{1,2}$ aus dem Grunde sein, weil erstens die Grösse der Gasschicht wechselt und zweitens im Moment der Entladung der Capacitätswert $C^{1,2}$ durch Uebergang in Leitung sehr stark zunimmt und für den abstrahirten Grenzfall der widerstandslosen Leiterstrecke sich momentan dem wirksamen Capacitätswert ∞ nähern würde. Infolge der wechselnden Verhältnisse, d. h. der Variabilität des Capacitätswertes, welche die veränderliche, bei der Entladung vorübergehend durchbrochene Gasschicht besitzen muss, kann man nur durch Einführung eines äquivalenten oder auch effectiven Mittelwertes für $C^{1,2}$ auskommen, welcher mit der durch die periodische Variabilität erzeugten Wechselstromcomponente die Resonanzphänomene veranlasst. Was den Wert $R_g^{1,2}$ anlangt, so wird derselbe bei hinreichender Grösse der anderen Elektrode und der Flüssigkeitssäule im Gefäss praktisch nur durch den Ausbreitungswiderstand vom activen Querschnitt Q — hier der kleinen Elektrode — in die Flüssigkeit bedingt sein und naturgemäss mit veränderlicher Gasbedeckung jener variiren, ausserdem ebenso wie $C^{1,2}$ von der Grösse des activen Querschnittes Q abhängen. Setzt man den Mittelwert von $R_g^{1,2} = E_g^{1,2} / J_g$, so ist das zwar nicht der reine Ausbreitungswiderstand, da

$$\frac{E_g^{1,2}}{J_g} = \frac{E_P^{1,2}}{J_g} + \frac{E_R^{1,2}}{J_g},$$

d. h. $E_g^{1,2}$ sich aus der Polarisationsspannung $E_P^{1,2}$ an den beiden Elektroden gegen Flüssigkeit und jener den Ausbreitungswiderstand überwindenden Spannungscomponente $E_R^{1,2}$ zusammensetzt. Der Nettowert von $R_g^{1,2}$ wäre sonach eigentlich $(E_g^{1,2} - E_P^{1,2}) : J_g$. Da aber einmal bei höherem Wert von $E_g^{1,2}$ der an sich etwas unsichere, aber jedenfalls unter 3 Volt liegende Wert[1]) von $E_P^{1,2}$ immer weniger ins Gewicht fällt, sowie seine Umrechnung in fictive Ohm bez. der Ausdruck von $R_g^{1,2} = E_g^{1,2} / J_g$ in reducirten Ohm (Ω_r) den Vorteil gewährt, einen bequemen äquivalenten Widerstand für J_g zu liefern, so ist $R_g^{1,2}$ stets als Quotient von $E_g^{1,2}$ und J_g ausgedrückt und diese meist auch sehr nahe den reinen Ausbreitungswiderstand der scheinbaren Gleichstromcomponente darstellenden Werte in den Tabellen in Ω_r angeführt. Aus Tab. I ist ersichtlich, dass dieser Wert $R_g^{1,2}$ bei Annäherung an das Wellenstromstadium zunimmt — die anfängliche kleine Abnahme bei niederen Werten von $E_g^{1,2}$ würde sich bei vorherigem Abzug von $E_P^{1,2}$ verkleinern und ist vermutlich durch die Temperaturzunahme des Elektrolyten veranlasst. Mit weiterer Entwickelung des Wellenstromstadiums wächst, trotz des mit der Temperatur zunehmenden Leitvermögens des Elektrolyten, $R_g^{1,2}$ stetig.[2]) Noch deutlicher als die Tab. I zeigen dies die Werte aus den Versuchsnummern 31—36 der unten folgenden Tab. II. Ausserdem wäre noch ein zusammenfassender Ausbreitungswiderstand $R_w^{1,2} = P_w / J_w^2$ zu bilden, welcher einen reducirten Reibungswiderstand für alle im Wellenstromerreger, d. i. zwischen den Punkten 1 und 2 in nicht elektrische Energie, vor allem Wärme, umgewandelte elektrische Leistung ($P_w^{1,2}$) darbieten würde.

1) Am natürlichsten wäre es wohl für $E_P^{1,2}$ die Gegenspannung beim sog. „maximalen Zersetzungspunkt“ (vgl. Le Blanc, Lehrbuch der Elektrochemie, Leipzig, Leiner. p. 200) einzusetzen, welche rund 1,70 Volt bei Säuren beträgt.

2) Dies dürfte der Grund für die Einschränkung der Gültigkeit von Simon's Formel auf bestimmte Betriebsgrenzen sein (vgl. Wied. Ann. 68. p. 289. 1899). Die daselbst gemachte Annahme der Constanz von R wird unterhalb einer gewissen Spannungsgrenze immer weniger zutreffen.

Nach der hier entwickelten Auffassung der Wirkungsweise des Wellenstromerregers durch Parallelschaltung eines variablen Widerstandes mit dem effectiven äquivalenten Mittelwert $R_g^{1,2}$ und einer variablen Capacität mit dem effectiven Mittelwert $C^{1,2}$, wobei ersterer das Gleichstromniveau, letzterer den aufgelagerten Wechselstrom bedingt, würde die im vorigen Aufsatz abgeleitete Gleichung für die Wellenstromstärke[1])

$$(J_w)^2 = (J_g)^2 + (J_\sim)^2$$

auch geschrieben werden können

$$J_w^2 = \left(E_g^{1,2} \cdot \frac{1}{R_g^{1,2}}\right)^2 + (E_C \cdot p \, . \, C^{1,2})^2 .$$

II. Zusammenhang der Ausgleichgrössen und Einfluss des Polaritätswechsels.

Aus dem Vorausgehenden ergiebt sich bereits, dass eine gesonderte Betrachtung des Einflusses eines Leitungscoefficienten im vorliegenden Fall nicht gut durchführbar ist, namentlich wegen des innigen Zusammenhanges der durch den activen Querschnitt Q beeinflussten Grössen $C^{1,2}$ und $R_g^{1,2}$ mit dem Selbstinductionscoefficienten L und dem Werte $p = d\,J : (J \, . \, d\,t) = 2\,c\,n$, wenn n die secundliche Entladungs- oder Wellenzahl angiebt und c den Zahlenfactor, der für Sinuswellen den Wert π annehmen würde. Veränderung des Wertes L für ein bestimmtes Q innerhalb der Betriebsgrenzen hat, wie man ohne weiteres an der Tonhöhe sofort erkannte, einen Einfluss auf den Wert n in der Weise, dass Erhöhung von L eine Erniedrigung von n und umgekehrt herbeiführt. Der eigentliche Zusammenhang, welcher, nach Ansicht des Verfassers, in der für die elektrische Resonanz gültigen Schwingungsformel liegt, scheint aber bisher nicht genügende Beachtuug gefunden zu haben. Wie die Messungen ergeben, stellen sich infolge der Anpassungsfähigkeit des Wellenstromerregers innerhalb der Betriebsgrenzen die variablen Werte von p und $C^{1,2}$ stets so ein, dass für die gegebenen Versuchsbedingungen die Resonanzbedingung möglichst nahe erfüllt wird, d. h. die Gleichung

$$1 - p^2 \; C \, . \, L = 0 \quad \text{bez.} \quad C \, . \, L = (1/p)^2 .$$

besteht.

1) C. Heinke, Wied. Ann. 69. p. 617. 1899.

Hierin bezeichnet C den resultirenden oder auch äquivalenten Capacitätswert des Wellenstromerregers — man ist versucht, diese vielleicht mit einer Art Polarisationscapacität zusammenhängende Capacitäts*wirkung* des Wellenstromerregers wegen ihres Unterschiedes gegenüber einer elektrostatischen Capacität als elektrodynamische Capacität zu bezeichnen, insofern ihre effectiven Werte (vgl. unter $C^{1,2}$ in den Tabellen) mit Rücksicht auf den Querschnitt Q zu den gewohnten Dimensionen der elektrostatischen Condensatoren in einem ähnlichen Verhältnis stehen wie die statischen und dynamischen Einheiten. —

Für die von L abhängige Aenderung von p ist jedoch zu berücksichtigen, dass auch bei constantem Q der Wert von $C^{1,2}$ nicht constant bleibt, sondern seinerseits von p und den Resonanzverhältnissen abhängt, d. h. innerhalb ziemlich weiter Grenzen sich anpassen kann. Diese Grenzen sind, wie es scheint, von den Werten $\cos \varphi_1$ und $\cos \varphi_2$, d. h. den energetischen Verhältnissen abhängig (vgl. unter IV.) Werden die Anpassungsgrenzen überschritten, so wird damit auch der Stabilitätsbereich des Wellenstromstadiums überschritten und es tritt das erwähnte Abschnappen oder Ausser-Tritt-Fallen ein, d. h. der Uebergang in das dritte Stadium oder auf der anderen Seite in das erste oder Voltameterstadium. Hieraus erklärt sich für grosses L die obere Grenze von Q für das Einsetzen des Wellenstromstadiums, ebenso wie die untere Grenze für kleines L.

Für einen bestimmten Wert von Q und L wirkt die Aenderung von $E_g^{1,2}$ innerhalb der Grenzen des Wellenstromstadiums auf die secundliche Entladungszahl (Tonhöhe), sowie Tonstärke, welche der unmittelbaren Wahrnehmung nach beide mit wachsender Spannung zunehmen, bis das Abschnappen in das dritte Stadium stattfindet. Die Messinstrumente liefern die Aenderungen im Ausgleichvorgang. Als Beispiel ist in Tab. II eine Versuchsreihe (Nr. 31 bis 36) angeführt bei einer wirksamen Länge des Platinstiftes von 20 mm ($Pl + 20$; Q etwa 80 qmm) und der Niederspannungswickelung eines Igeltransformators mit einem Widerstand (warm) von etwa 0,06 Ω und einem mit den hier benutzten Stromstärken J_w ein wenig veränderlichen, aber bekannten und unter $L^{2,3}$ in Millihenry

Tabelle II.

Nr.	Pl	$L^{2,3}$ Mh	E_g Volt	E_w Volt	J_g Amp.	J_w Amp.	P_w Watt	P_g $= E_g \cdot J_g$	$P_\sim$ Watt	J A
31	+ 20 mm	—	17	—	20,5	20,5	352	349	—	[illegible]
	mit ca.	—	15,7	—	20,5	20,5	323	322	—	[illegible]
	80 qmm	—	1,3	—	20,3	20,3	24,8	26	—	[illegible]
32	+ 20 mm	—	20,5	—	20,7	21	410	425	− 15	[illegible]
	mit ca.	—	19,5	—	20,7	21	364	406	− 32	[illegible]
	80 qmm	—	1,4	—	20,6	21	32,5	[28]	+ 5	[illegible]
33	+ 20 mm	—	22	—	20,2	20,7	400	445	− 45	4
	mit ca.	—	20,5	—	20,0	20,6	354	410	− 56	4
	80 qmm	—	1,4	—	20,0	20,6	40	28	+ 12	4
34	+ 20 mm	19,9	29,5	—	20,6	21,8	520	608	− 88	7
	mit ca.	—	27,5	76	20,6	21,8	453	566	−113	7
	80 qmm	—	1,4	71,2	20,7	21,9	71,7	[30]	+ 42	7
35	+ 20 mm	19,8	46,8	[135,2]	20,6	23,3	859	965	−106	10
	mit ca.	—	46	127,2	20,0	22,6	691	920	−229	10
	80 qmm	—	1,3	—	19,5	22,0	188	[26]	+162	10
36	+ 20 mm	19,6	57,2	—	19,3	22,4	1048	1100	− 52	11
	mit ca.	—	55,5	163,8	20,0	23,7	890	1110	−220	12
	80 qmm	—	1,3	148	19,3	22,6	169	[26]	+143	11

(Mh) oder 10^6 cm angeführten Selbstinductionscoefficienten.[1]) Hier wie bei allen folgenden Zahlentabellen sind links vom Doppelstrich die beobachteten, wo nötig mit den Instrumentencorrectionen versehenen Werte, rechts davon die daraus abgeleiteten Werte angeführt. Hier, wie in allen folgenden Versuchsnummern mit je drei zusammengehörigen Messreihen bezieht sich die erste Zahlenreihe jeder Versuchsnummer auf die Werte zwischen den Punkten 1 und 3, die zweite auf diejenigen zwischen 1 und 2, d. i. an dem Wellenstromerreger allein, und die dritte auf diejenigen zwischen 2 und 3, d. i. an dem inductiven Widerstand allein.

Rechts vom Doppelstrich sind ausser den schon früher

1) Vgl. hierzu C. Heinke, Elektrotechn. Zeitschr. **18.** p. 62. 1897, Fig. 12.

Tabelle II.

t	$P_{,} = E_{\sim} . J_{\sim}$	$\cos \varphi$	φ	$E_C^{1,2}$ und $E_L^{2,3}$ Volt	$p = \frac{E_L^{2,3}}{J_{\sim} . L^{2,3}}$	$C^{1,2} = \frac{J_{\sim}}{p . E_C^{1,2}}$ Mf.	$R_g^{1,2}$ Ω_r	$R_w^{1,2}$ Ω_r
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	0,766	0,768
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—[1])	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	0,943	0,825
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	1,025	0,835
	—	—	—	—	—	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
,0	506	−0,224	−77° —′	69,1	—	207	1,333	0,954
1,2	507	+0,083	+85 15	71,0	500	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
8]	1338	−0,171	−80 10	[124]	—	134	2,30	1,35
7,2	1300	+0,124	+82 50	126,1	617	—	—	—
	—	—	—	—	—	—	—	—
4	1958	−0,112	−83 35	153	—	132	2,78	1,585
8	1750	+0,082	+85 18	147,5	625	—	—	—

behandelten Werten der scheinbaren Gleichstromleistung $P_g = E_g . J_g$ in Voltampère, der äquivalenten effectiven Wechselstromstärke $J_{\sim} = \sqrt{J_w^2 - J_g^2}$ in Ampère, der effectiven Wechselspannung $E_{\sim} = \sqrt{E_w^2 - E_g^2}$ in Volt, der scheinbaren Wechselstromleistung $J_{\sim} . E_{\sim}$ und der äquivalenten Phasenverschiebung zwischen $J_{\sim}$ und $E_{\sim}$ nämlich

$$\cos \varphi = \frac{P_{\sim}}{E_{\sim} . J_{\sim}}$$

bez. dem Winkel φ in Graden noch folgende Werte berechnet: Unter $P_{\sim}$ die Wechselstromleistung in Watt, wobei in den Zahlentabellen dieses Aufsatzes das Vorzeichen stets vom Standpunkt der die primäre Energiequelle darstellenden Accumulatorenbatterie gewählt ist. Die Wechselstromleistung ist

1) Beginn der Entladungen (etwa 10 in der Secunde).

Tabelle III.

Einfluss des Wechsels der Polarität am Platin.

Nr.	Pl mm	Q qmm	E_g Volt	E_w Volt	J_g Amp.	J_w Amp.	P_w Watt	$P_g = E_g . J_g$	$P_{\sim}$ Watt	J A[illegible]
			49,5	51	2,78	2,93	135	137,5	− 3	0,[illegible]
11	+0	ca. 3	34,5	95	2,78	2,93	83	96	−13	0,[illegible]
			13,8	95? [85]	2,65	2,8	43	36,6	+ 6	0,[illegible]
			49,5	53	2,20	2,32	126,3	117	− 9	0,7[illegible]
12	−0	ca. 3	38,0	78,3	2,15	2,31	80,2	81,7	− 2?	0,8[illegible]
			11,5	66,2	2,18	2,31	30,3	25	+ 5	0,7[illegible]
			62,6	62,6	4,8	5,0	292	300	− 8	1,4
41	ca. +5	ca. 22	38,5	127	4,8	5,0	146	185	−39	1,4[illegible]
			24,5	123,5	4,7	4,9	131	115	+16	1,[illegible]
			62,7	—	4,3	4,5	260	270	−10	1,33
42	−5	ca. 22	40,2	97,6	4,3	4,5	138	173	−35	1,33
			22,3	88,7	4,2	4,4	110	94	+16	1,31
			61,7	63,1	4,85	5,20	300	300	—	1,88
115	ca. +7	ca. 30	38,0	122,7	4,75	5,05	150	180	−30	1,72
			25,5	118,7	4,80	5,15	131	122	+ 9	1,8[illegible]
			62,3	62,8	4,35	4,70	260	271	−11	1,78
116	−7	ca. 30	41,8	83	4,05	4,35	132	166	−34	1,50
			22,0	72	4,15	4,55	119	91	+28	1,86
			61,5	61,5	7,8?	7,9	474	480	− 6	1,25
44	ca. +15	ca. 60	18	75,5	7,7	7,8	104	138,5	−34,5	1,25
			44	84,7	7,7	7,8	363	339	+24	1,25
			61,5	62,1	7,6	7,8	457	467	−10	1,67
43	−15	ca. 60	21	58	7,5	7,7	115	157,5	−42,5	1,74
			40,5	66	7,5	7,7	335	304	+31	1,74

sonach als zusätzlich zu bez. abzüglich von der scheinbaren Gleichstromleistung der primären Energiequelle behandelt und deshalb als Differenz der effectiven Wellenstromleistung P_w und der scheinbaren Gleichstromleistung P_g zu

$$\pm P_{\sim} = P_w - P_g$$

Tabelle III.

Einfluss des Wechsels der Polarität am Platin.

t	$P_e = E_\sim . J_\sim$	$\cos\varphi$	φ	$E_C^{1,2}$ und $E_L^{2,3}$ Volt	$p = \frac{E_L^{2,3}}{J_\sim . L^{2,3}}$	$C^{1,2} = \frac{J_\sim}{p . E_C^{1,2}}$ Mf.	$R_g^{1,2}$ Ω_r	$R_w^{1,2}$ Ω_r
,2	—	—	—	—	—	—	—	—
,5	83	– 0,157	–81°	88,5	—	9,8	—	—
?	[76]	+[0,078]	+85 30′	[83,8]	[1065]	—	12,4	9,65
]								
,8	13,9	– 0,647	–49 40	—	—	—	—	—
,4	58	–[0,2]?	[–78 30]	[67,0]	—	[13,1]	—	—
	50	+ 0,10	+84	64,7	965	—	17,7	15,0
-	—	—	—	—	—	—	—	—
,2	170	– 0,23	–76 40	118	—	11,9	—	—
,0	168	+ 0,095	+84 30	120,4	995	—	8,02	5,84
-	—	—	—	—	—	—	—	—
,9	117,5	– 0,298	–72 40	85,8	—	20,8	—	—
,8	112,3	+ 0,145	+81 40	85,0	745	—	9,35	6,80
-	—	—	—	—	—	—	—	—
,7	201	– 0,149	–81 30	115,4	—	20,8	—	—
,0	216	+ 0,042	+87 30	115,2	715	—	8,0	5,89
-	—	—	—	—	—	—	—	—
,2	114,7	– 0,279	–73 50	69,3	—	55,5	—	—
,6	127,5	+ 0,22	+77 20	67,0	413	—	10,1	6,98
-	—	—	—	—	—	—	—	—
,3	91,7	– 0,376	–67 50	68,0	—	28,7	—	—
2,5	90,7	+ 0,265	+74 20	70,0	642 ?	—	2,34	1,71
-	—	—	—	—	—	—	—	—
5	95,8	– 0,443	–63 40	49,3	—	109	—	—
2,2	90,8	+ 0,342	+70	49,2	324	—	2,8	1,94

gebildet. Die zusätzliche Leistung $P_\sim^{2,3}$ (im inductiven Widerstand bez. Transformator) erscheint hiernach als positiv, hingegen die nicht erforderliche Leistung $P_\sim^{1,2}$ im Wellenstromerzeuger (Minderleistung) als negativ (vgl. die hierzu passende diagrammatische Darstellung in Fig. 4 b); dementsprechend sind

auch die Vorzeichen von $\cos\varphi$ bez. φ gewählt. Weiterhin wurde berechnet, soweit angängig

$$p = \frac{E_{\sim}^{2,3} \cdot \sin\varphi_2}{J_{\sim} \cdot L^{2,3}} = c \cdot z\,,$$

ferner der mittlere wirksame Capacitätswert

$$C^{1,2} = \frac{J_{\sim}}{p \cdot E_{\sim}^{1,2} \sin\varphi_1}$$

in Mikrofarad (Mf.), endlich der mittlere Ausbreitungswiderstand (einschliesslich Polarisation)

$$R_g^{1,2} = \frac{E_g^{1,2}}{J_g}$$

in reducirten Ohm (Ω_r), sowie

$$R_w^{1,2} = \frac{P_w}{(J_w)^2}\,.$$

Die relative Zunahme der Wechselstromwerte sowie auch von p, d. h. das stärkere Hervortreten des Schwingungscharakters des Ausgleichvorganges bei steigender Spannung ist deutlich ersichtlich; auch weist die Zunahme von $R_g^{1,2}$ auf eine zunehmende mittlere Gasbedeckung der Platinelektrode hin. Bemerkenswert ist die praktische Constanz von J_g (vgl. hierzu in der Schlussbemerkung über „Sättigungsstrom"). Bei Nr. 35 durchbrauste ein kräftiger Orgelton den Raum. Bei Nr. 36 trat nach der Ablesung der ersten Zahlenreihe durch Abfallen der Platinspitze eine Unterbrechung ein; die beiden letzten Zahlenreihen wurden nach Wiederherstellung beobachtet. Zu bemerken ist noch, dass ein längerer Betrieb mit grösseren Platinoberflächen ($O = 80$ qmm und darüber) die Flüssigkeit schliesslich zum Sieden brachte, wodurch unter Sinken der Stromstärke, ähnlich wie bei Nr. 85 (vgl. Tab. VI, sowie Nr. 75 in Tab. V) schliesslich die Stabilitätsgrenze des Wellenstromstadiums erreicht wurde und ein Abschnappen in das dritte Stadium eintrat. Diese an dem innerhalb derselben Versuchsnummer eintretenden starken Sinken der Werte von J kenntlichen Grenzbeobachtungen sind naturgemäss etwas weniger zuverlässig.

Der Einfluss des Polaritätswechsels bei Benutzung einer Platinelektrode steht mit der oben erwähnten Variabilität, sowohl von p als auch von $C^{1,2}$, in engem Zusammenhang.

Dieser Einfluss des Polaritätswechsels kann auch als Beweis gelten, dass wenigstens im letzteren Fall nicht nur die durch Wärmewirkung am Platin herbeigeführte Dampfbildung den Ausgleichvorgang allein bedingt, sondern dass auch die Art und Menge des ausgeschiedenen Gases offenbar auf den Wert von $C^{1,2}$, sowie auch von $R_g^{1,2}$ erheblichen Einfluss hat, woraus sich alsdann auch derjenige auf die Tonhöhe bez. den Wert p erklärt. Zur Erläuterung sind in der vorstehenden Tab. III einige Messreihen angeführt, von denen immer zwei mit gleichem Q zusammengehören, z. B. 11 und 12 etc. Bei diesen wurde, mit Ausnahme des Wechsels der Polarität am Platin, alles übrige constant gelassen. Die nahe an der Stabilitätsgrenze belegenen Messreihen, z. B. Nr. 43 und 44 (vgl. hierzu die Grösse von $\cos \varphi_1$ und $\cos \varphi_2$ in Verbindung mit Abschnitt IV) sind vermutlich weniger zuverlässig, auch wegen der hier gerade in einem weniger günstigen Messbereich belegenen Ablesung von J_w.

Alle Werte dieser Tabelle wurden mit einer eisenfreien Spule mit dem Selbstinductionscoefficienten $L = 0{,}0872$ Henry und einem je nach der Erwärmung etwas zunehmenden Widerstand, der sich aus E_g / J_g ergiebt und zwischen 5 und 6 Ω beträgt, erhalten; die deshalb relativ kleinen Werte von $P_\sim$ sind wenig zuverlässig, doch der Vollständigkeit halber beigefügt.

Alle Messresultate sowohl der vorausgegangenen als der folgenden Tabellen lassen ohne Ausnahme erkennen, dass die Wechselspannungen $E_\sim^{1,2}$ und $E_\sim^{2,3}$ bereits sehr nahe gleich und selten weniger als 170° gegeneinander verschoben sind; noch näher der Gleichheit kommen bei Ausscheidung der arbeitsleistenden Componenten die um 180° versetzten, d. h. entgegengesetzt gerichteten Spannungscomponenten

$$E_\sim^{1,2} \sin \varphi_1 = E_C \quad \text{und} \quad E_\sim^{2,3} \sin \varphi_2 = E_L,$$

d. i. die reine Ladungsspannung und die reine Selbstinductionsspannung, wie das vom Standpunkt des Wellenstromerregers gezeichnete Diagramm in Fig. 4 a andeutet, dessen Spannungen als Gegenspannungen durch das Vorzeichen gekennzeichnet sind. Vom Standpunkt der die primäre Leistung abgebenden Batterie wären alle Spannungspfeile um 180° zu versetzen

(vgl. Fig. 4 b), wodurch auch die aus $E_{\sim}^{1,2}$ und $E_{\sim}^{2,3}$ resultirende Spannung $E_{\sim}^{1,3}$ oft sehr nahe in Richtung von $J_{\sim}$ fällt und sich alsdann dem Wert $E_{\sim}^{1,2} . \cos\varphi_1 + E_{\sim}^{2,3} . \cos\varphi_2$ nähert; unter Berücksichtigung des Vorzeichens von φ_2 ergiebt sich der Differenzwert der beiden in Richtung von $J_{\sim}$ fallenden Com-

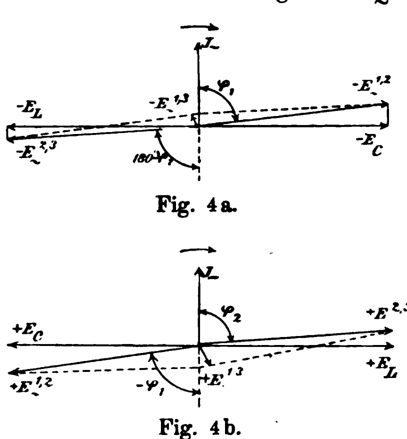


Fig. 4a.

Fig. 4b.

ponenten und die umgekehrte, d. h. $J_{\sim}$ entgegengesetzte Richtung. Die Gleichheit von E_C und E_L ist das Charakteristicum für völlige Wechselstromresonanz, d. h. genaue Erfüllung der Resonanzgleichung $1 - p^2 C L = 0$, wie sich leicht durch Zerlegung derselben in $p L = 1 / p C$ und beiderseitiger Multiplication mit $J_{\sim}$ ergiebt, da $J_{\sim} . p . L = (J_{\sim} / p C)$ die in Factoren aufgelösten Werte für

$$E_L = E_C$$

sind.

Die Prüfung der Versuchsbedingungen nach der Resonanzformel auf Grund des bekannten Wertes von L und des aus den Messwerten berechneten von $C^{1,2}$ führt daher stets ziemlich genau auf den Wert von p, wie er sich aus den Beobachtungszahlen rechnet, z. B. für Nr. 34 aus Tab. II folgt

$$\left(\frac{1}{p}\right)^2 = C . L = (207 . 10^{-6}) (19.9 . 10^{-3})$$

$$= 4{,}12 . 10^{-6}$$

$$\frac{1}{p} = 2{,}03 . 10^{-3}$$

$$p = 493.$$

Die kleinen noch bestehenden Abweichungen haben wohl auptsächlich ihren Grund in dem Umstand, dass die Form er Strom- und Spannungscurve nicht die gleiche ist. mithin ei der Verschiedenheit des Zahlenfactors c auch etwas ver- ;hiedene Werte von p für die Stromcurve und p^1 für die Span- ungscurve bedingt. Da nun der erstere Wert (p) für die elbstinductionsspannung E_L, hingegen der letztere (p^1) für ie Ladespannung E_C in Betracht kommt, so sind bei der ier erfolgten Gleichsetzung von p und p^1 bez. Benutzung ines einheitlichen p kleine Abweichungen zu erwarten.

[I. Die Erscheinungen bei sehr starker Verminderung von L.

Die Feststellung, inwieweit das Vorhandensein von Selbst- ıduction im Stromkreis für Eintritt des Wellenstromstadiums nbedingt erforderlich ist, besitzt ein gewisses Interesse. Zu iesem Zweck wurde der inductive Widerstand ausgeschaltet, ɔdass Punkt 2 und 3 zusammenfiel. Bei stufenweiser Ver- rösserung der wirksamen Länge des Platinstiftes ging bis ur Länge von mehreren Millimetern bei steigender Spannung ie Erscheinung der Erwartung entsprechend jederzeit vom 'oltameterstadium direct in das dritte Stadium des leuch- enden Gasüberzuges, bez. bei noch weiterer Steigerung in as vierte oder Glühstadium über, ohne Auftreten von Wellen- trom. Um so überraschender war es jedoch, als bei grösseren ,ängen des Platinstiftes, d. h. höheren Werten von Q bei eiden Polaritäten, eine offenbare Wellenstromerscheinung, 'enn auch von wesentlich anderem Charakter als früher und ielfach sehr labil und nach kurzer Zeit abschnappend, ein- rat. Zur Herbeiführung dieser Erscheinung war namentlich lötzliches Einschalten der vollen verfügbaren Spannung günstig, ie zunehmende Erwärmung ungünstig, sodass sie alsdann mmer labiler wurde und nur durch weitere Vergrösserung on Q häufig noch erzwingbar war. Bemerkenswert ist, dass ei Platin negativ die Erscheinung früher einsetzte, bei kalter 'lüssigkeit bereits von etwa $Pl-10$ mm ($Q = 40$ qmm) aufwärts, ei Platin positiv später und zwar von etwa $P + 17$ mm ufwärts. Gleichzeitig ergab sich die Wellenspannung $E_w^{1,2}$

am Wellenstromerreger, der einen verhältnismässig hohen Ton nach Art des Kochgeräusches hören liess, wesentlich höher als die zugeführte Gleichstromspannung $E_g^{1,2}$. Falls die bisher festgehaltene Auffassung richtig sein sollte, müsste dies einer Resonanzwirkung zuzuschreiben sein und die Annahme einer praktisch ausreichenden Abwesenheit von L nicht erfüllt sein. Die Vermutung, dass die geringe Selbstinduction der noch eingeschalteten festen Wattmeterspule die Ursache bildete, erwies sich nur zum Teil als richtig, da bei wechselweisem Ein- und Ausschalten derselben die Erscheinung zwar beeinflusst wurde und in letzterem Fall noch labiler wurde, aber doch nicht ganz verschwand. Da die Zuleitung von der Batterie durch eine ziemlich lange Leitung erfolgte (abgesehen von den Leitungen der Messanordnung einerseits, den Zellenschalterleitungen von den Sammelschienen bis zur Batterie andererseits, etwa 84 m einfache Länge mit meistens etwa 45 cm Abstand), so konnte deren Selbstinduction noch die Erscheinung veranlassen. In diesem Falle musste aber die complementäre Resonanz von etwa gleicher Grösse wie am Wellenstromerreger zwischen den Leitungsenden vorhanden sein. Diese auf Grund der früheren Messergebnisse als notwendig anzusehende Annahme konnte als experimentum crucis dienen. Zu diesem Zweck wurde folgende Messung ausgeführt: Eine nach den Enden der Batterie — genau genommen waren es die Sammelschienen — A und B führende unabhängige Hülfsleitung wurde, wie in Fig. 5 angedeutet, benutzt, um neben der Spannung zwischen 1 und 2 auch noch diejenige zwischen A und 1 bez. B und 2 zu messen. Zur Messung von $E_w^{1,2}$ diente ein Thomson-Multicellularvoltmeter, von $E_g^{1,2}$ ein Weston-Gleichstromvoltmeter. Zur Messung der Spannungen in den Zuleitungen teils bei eingeschalteter, teils bei ausgeschalteter fester Wattmeterspule — es wurde jedoch stets nur die dünndrähtige Spule mit der weitaus grössten Zahl von Windungen ausgeschaltet, während die dickdrähtige mit den sehr wenigen Windungen eingeschaltet blieb — dienten

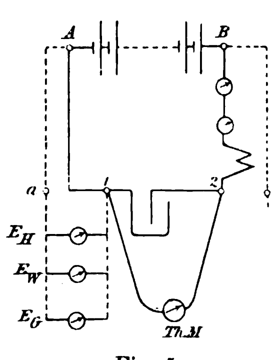


Fig. 5.

meist drei parallel geschaltete Voltmeter, ein kurzdrähtiges Hitzdrahtinstrument E_H von Hartmann und Braun, ein Weston-Wechselstromvoltmeter E_W, falls nötig mit bifilarem Vorschaltwiderstand, und ein Weston-Gleichstromvoltmeter E_G.

Die zum Teil unten in Tab. IV angeführten Messresultate lieferten nicht nur die Bestätigung der Annahme, sondern gestatteten auch den angenäherten Wert von zu bestimmen; ferner durch Division mit 2π, in anbetracht der hier sehr raschen Entladungen wohl angenähert zutreffend, den Wert von n, der secundlichen Wellenzahl (Entladungszahl), sowie mit Hülfe dieses Wertes p die einzelnen sehr kleinen Werte von L. Die Art der Ermittelung von p, welche neu sein und deshalb ein gewisses Interesse besitzen dürfte, sei hier angegeben: Die Angaben der beiden parallel geschalteten Wechselstromvoltmeter E_H und E_W, welche sonst kaum merklich voneinander abwichen, gingen hier weit auseinander; so zeigte z. B. bei Nr. 110a $E_H^{2,b} = 32{,}0$ Volt, $E_W^{2,b} = 22{,}6$ Volt. Da diese Differenz nur von der Selbstinduction des Weston-Wechselstromvoltmeters herrühren konnte und nach einer früheren Angabe des Vertreters der Weston Co. der Selbstinductionscoefficient des benutzten Instrumentes etwa $L_W = 40$ Millihenry betrug[1]), so konnte dies zur Bestimmung von p benutzt werden, da bei dem kurzdrähtigen E_H der Wert von L_H wohl ohne grösseren Fehler vernachlässigt werden kann, d. h. E_H die richtige Wellenspannung $E_w^{2,B}$ misst. $E_g^{2,b}$ betrug bei dem mehrfach zu 0,28 Ω ermittelten Widerstand der Strecke $2.B$ einschliesslich dünner Wattmeterspule und zu 0,23 Ω ausschliesslich derselben nur 2,18 Volt, sodass praktisch $E_\sim^{2,b} = E_w^{2,b}$, da $\sqrt{(E_w^{2,b})^2 - (E_g^{2,b})^2} = 31{,}94$ Volt. Die Angaben beider Voltmeter gaben ein Maass für die hindurchfliessenden Stromstärken; die letzteren als fast reiner Wechselstrom stehen im umgekehrten Verhältnis der Wechselstromwiderstände. Bei E_H ist Wechselstromwiderstand W und Ohm'scher oder elek-

1) Der absolute Wert von L_W ist im vorliegenden Falle nicht ganz sicher, da erst bei den Instrumenten neuerer Construction dieselben genauer bestimmt wurden und eine nachträgliche Feststellung des L_W am vorliegenden geschlossenen Instrumente nicht angängig war, doch handelt es sich hier in erster Linie um den Gedankengang.

trischer Reibungswiderstand R praktisch gleich, bei E_W nicht; sonach kann man für das Westonvoltmeter setzen

$$\frac{32}{22,6} = \frac{W}{R} = m = 1,415.$$

Hierbei ist einschliesslich 300 Ω bifilaren Vorschaltwiderstandes

$$R = 522,2\ \Omega$$

und

$$W = \sqrt{R^2 + (p\ L)^2} = \sqrt{(522,2)^2 + (p\,.\,0,040)^2}.$$

Allgemein kann man setzen $W = m\,.\,R$, wenn m das Verhältnis der Spannungsangaben, also

$$R^2 + p^2 L^2 = m^2 R^2$$

oder

$$p = \frac{R}{L}\sqrt{m^2 - 1}\,.$$

Im vorliegenden Falle wäre sonach für Einsetzung von $L_W = 0,040$ Henry

$$p = \frac{522,2}{0,040}\sqrt{2 - 1} = 13055$$

und, bei Voraussetzung einer im vorliegenden Falle hinreichend vorhandenen Annäherung des Zahlenfactors c an den Wert π, angenähert

$$n = 2130.$$

Aus dem so gefundenen Wert von p würde bei der vorhandenen Verschiebung der äquivalenten Wechselstromstärke $J_{\sim} = 8,85$ Ampère gegenüber $E^{2,b}_{\sim}$ von nahezu 90^0 folgen

$$L_{2,B} = \frac{31,9}{13055\,.\,8,87} = 0,276 \text{ Millihenry}$$

einschliesslich Wattmeterspule. Aehnlich ergab die Strecke $2, B$ ohne Wattmeterspule $E_H = 19$ Volt, während der Zeiger von E_W zwischen 12,9 und 14,1 hin- und herpendelte. Für den Mittelwert 13,5 wäre, allerdings im vorliegenden Falle etwas weniger zuverlässig,

$$m = 1,409$$

und

$$L'_{2,B} = \frac{19}{12925\,.\,8,87} = 0,166 \text{ Millihenry},$$

was für die dünne Wattmeterspule eine Differenz von 0,110 Millihenry ergeben würde. Es muss zugegeben werden, dass die Zuverlässigkeit dieser umwegreichen Bestimmung etwas zweifelhaft erscheint, doch sei erwähnt, dass ein verhängnisvoller, etwa die Grössenordnung beeinflussender Fehler nicht vorliegen kann, da der so als Differenz ermittelte Selbstinductionscoefficient ganz annehmbar mit einer früheren Secohmmeterbestimmung übereinstimmt. Jene auf das ganze Wattmeter, dünne und dicke Wickelung in Serie, bezügliche Messung [1]) ergab 0,134 bez. 0,135 Millihenry, sodass der obige Wert für die dünne Spule allein doch recht angenähert stimmen dürfte und damit auch die bestimmten Zwischenwerte, vor allem p.

Die starken Stromänderungen bei den in der Tab. IV angeführten Messreihen rühren von der Labilität und der zunehmenden Erwärmung her, wodurch das Abschnappen immer früher erfolgte. So war bei Nr. 111 — bei Beginn einer Messreihe mit anfangs kalter Flüssigkeit — ein leidlich stationärer Betrieb mit $Pl + 18$ mm möglich, doch musste schon bei 112 auf etwa $Pl + 30$ mm vergrössert werden, um einen für die Ablesung hinreichend langen Betrieb zu ermöglichen und zwar bei stetig sinkender Stromstärke. Die zu $E_0 = 63,7$ Volt gemessene offene Batteriespannung wurde zur Ermittelung von $E_g^{1,2} = E_0 - J_g . R^z$ benutzt, worin der Zuleitungswiderstand R^z mit Wattmeterspule $0,40\,\Omega$, ohne $0,35\,\Omega$ beträgt; die Spannungswerte der Zuleitung wurden (bei α mit, bei β ohne dünne Wattmeterspule) unter E^z angeführt. Nr. 110—112 bezieht sich auf die Wattmeterseite 2, B, Nr. 113 auf die andere Seite 1, A. Wegen der labilen Verhältnisse passen die Werte teilweise nicht ganz zusammen, lassen aber die Uebereinstimmung mit der entwickelten Auffassung hinreichend erkennen. Unter Nr. 55—57 sind noch die früher mit negativem Platin gemessenen Werte zum Vergleich beigefügt und, unter Benutzung der Resonanzformel (vgl. unter II.), sowie des zu etwa 0,440 Millihenry ermittelten Gesamtwertes des Selbstinductionscoefficienten beider Zuleitungsstränge, einschliesslich Wattmeterspule, die angenäherten Werte von p und $C^{1,2}$ berechnet.

---

1) C. Heinke, Inaugural-Dissertation München. Messung Nr. 31 und 32.

Tabelle IV.

Nr.	Pl	$E_g^{1,2}$ Volt	$E_w^{1,2}$ Volt	E_g^Z Volt	E_w^Z Volt	J_g Amp.	J_w Amp.	$J_\sim$ Amp.	$E_\sim^{1,2}$ Volt	$E_\sim^Z$ Volt	p	$C^{1,2}$ Mf	L^Z Mh
110 α	+30 mm mit	62,0	(80)	[2,2]	32	7,8	11,8	8,87	50,6	31,9	13055	13,3	0,276
110 β	ca. 110 qmm	62,0	(80)	[1,8]	19	—	—	—	—	19	—	—	0,166
111 α	+18 mm mit	[56,3]	93	5,5	44	18,5	24	15,6	74,0	43,7	10130	20,8	—
111 β	ca. 65 qmm	[58,1]	90	3,3	28	16	21	13,6	68,8	27,8	12300	16,1	—
112 α	+30 mm mit	[54,1]	93,5	6,3	45	24	30	18,0	77,3	44,7	9000	25,9	—
112 β	ca. 110 qmm	[58,4]	91	3,4	29	15	21	14,7	69,8	28,8	11800	17,9	—
113 α	+30 mm mit	[59]	91	1,65	28,5	13,5	18,0	11,8	68,3	28,4	—	—	—
113 β	ca. 110 qmm	[59]	95	1,65	20	13,5	18,0	11,8	74,5	20	—	—	—
56	− 35 mm	59,5	68,2	—	—	11,1	14,7	9,65	33,3	—	7850	37	[0,440]
55	− 20 mm	61,5	67,4	—	—	5,9	8,0	5,4	27,6	—	11600	16,9	[0,440]
57	− 10 mm	62,0	65,4	—	—	2,6	4,5	3,67	20,8	—	12390	14,8	[0,440]

Dass die gemessenen Wellenspannungen der beiden Zu-
tungen zusammen eine etwas kleinere Wechselspannung
ɔen als diejenige am Wellenstromerreger, erklärt sich aus
ɔn Umstande, dass nicht die ganze Zuleitung, sondern nur
r grösste Teil der Messung zugänglich gemacht werden
nnte, da die im vorliegenden Fall ziemlich langen Zellen-
ıalterleitungen zwischen Sammelschienen und Batterie ausser-
lb des Messbereiches blieben.

Die Messresultate scheinen zu beweisen, dass auch dort,
› scheinbar ohne Selbstinduction im Stromkreis gearbeitet
rd, doch die kleinen Selbstinductionswerte der Zuleitung und
r Messanordnung häufig für eine Ermöglichung des Wellen-
:omstadiums ausreichen werden.

(Schluss im nächsten Heft.)

(Eingegangen 8. October 1899.)

12. *Das Reflexionsvermögen von Metallen und belegten Glasspiegeln*[1]; *von E. Hagen und H. Rubens.*

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Zur Ermittelung des Reflexionsvermögens spiegelnder Substanzen hat man bisher zwei Wege eingeschlagen, von welchen man den einen als den directen, den anderen als den indirecten bezeichnen kann. Bei dem ersteren ist das Verhältnis der Intensitäten zu bestimmen, welche die von einer Lichtquelle ausgehenden Strahlen unmittelbar vor und nach der Reflexion von dem zu untersuchenden Spiegel besitzen.

Eine derartige Untersuchung ist zuerst von de la Provostaye und P. Desains[2]) für die von einer *Wärmequelle* ausgehende *Gesamt*strahlung mit Hülfe der Thermosäule ausgeführt und hierbei die Abhängigkeit des Reflexionsvermögens vom Incidenzwinkel der auffallenden Strahlen festgestellt worden. Später hat Sir John Conroy[3]) ähnliche Beobachtungen für unzerlegtes weisses Licht nach einer photometrischen Methode angestellt, und Lord Rayleigh[4]) ebenfalls ein photometrisches Verfahren angewandt, um das Reflexionsvermögen verschiedener Körper für kleine Incidenzwinkel zu ermitteln. In den dann folgenden Untersuchungen von Rubens[5]), Langley[6]), Nichols[7]) und Trowbridge[8]) wurde wiederum die Intensität der directen

---

1) Erweiterter Abdruck aus der Zeitschr. f. Instrumentenk. **19.** p. 293. 1899; eine kurze Mitteilung der wesentlichsten Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung findet sich in den Verhandl. d. physikal. Gesellsch. zu Berlin **17.** p. 143. 1898.

2) de la Provostaye u. P. Desains, Ann. de chim. et de phys. (3) **30.** p. 276. 1850.

3) John Conroy, Proc. Roy. Soc. **35.** p. 26. 1883.

4) Lord Rayleigh, Proc. Roy. Soc. **41.** p. 274. 1886.

5) H. Rubens, Wied. Ann. **37.** p. 249. 1889.

6) S. P. Langley, Phil. Mag. **27.** p. 10. 1889.

7) E. L. Nichols, Wied. Ann. **60.** p. 401. 1897.

8) J. Trowbridge, Wied. Ann. **65.** p. 595. 1898.

und reflectirten Strahlung durch Beobachtung ihrer *Wärmewirkung* gemessen; diese Arbeiten bezeichnen aber insofern einen wesentlichen Fortschritt, als bei ihnen das Reflexionsvermögen in seiner *Abhängigkeit von der Wellenlänge* der auffallenden Strahlen für das sichtbare Gebiet und einen Teil des *ultraroten* Spectrums beobachtet wurde.

Demgegenüber gründet sich das oben erwähnte indirecte Verfahren zur Bestimmung des Reflexionsvermögens auf die Ermittelung zweier optischer Constanten, meist des Hauptazimutes und Haupteinfallswinkels. Mit Hülfe einer der bekannten metalloptischen Theorien, welche in ihren Voraussetzungen zwar verschieden sind, aber in den hier in Betracht kommenden Gleichungen nahezu vollkommen übereinstimmen[1]), lassen sich dann hieraus die übrigen optischen Constanten, insbesondere der Brechungsindex und Extinctionscoefficient, sowie das Reflexionsvermögen für alle Incidenzen berechnen. Derartige Messungen sind von Jamin[2]), Haughton[3]), Quincke[4]) und Drude[5]) ausgeführt worden. Die Resultate dieser Beobachter sind, sofern sie das Reflexionsvermögen betreffen, mit den Ergebnissen der erstgenannten (directen) Methode so weit in Uebereinstimmung, dass die immerhin beträchtlichen Abweichungen durch Beobachtungsfehler und Verschiedenheit des Materiales erklärt werden können.

Uebersieht man hiernach das gesamte bisher vorliegende Beobachtungsmaterial, so erkennt man, dass die Abhängigkeit des Reflexionsvermögens von dem Incidenzwinkel für ultrarote und sichtbare Strahlen, sowie dass die Aenderung des Reflexionsvermögens mit der Wellenlänge für ultrarote Strahlen hinreichend bekannt ist. Dagegen bestehen an anderen Stellen erhebliche Lücken. So sind die Beobachtungen von Rubens, Langley und Nichols, von welchen allein directe Messungen[6]) des Reflexionsvermögens für homogenes Licht im sichtbaren

---

1) Vgl. D. Shea, Wied. Ann. **47.** p. 177. 1892.

2) J. Jamin, Ann. de chim. et de phys. (3) **22.** p. 311. 1848.

3) S. Haughton, Phil. Trans. **1.** p. 122. 1863.

4) G. Quincke, Pogg. Ann. Jubelbd. p. 336. 1874.

5) P. Drude, Wied. Ann. **39.** p. 481. 1890.

6) Von H. Rubens für Gold, Silber, Kupfer, Eisen und Nickel; von S. P. Langley u. E. L. Nichols für Silber, l. c.

Spectrum vorliegen, wegen der relativ geringen Wärmeenergie der Lichtstrahlen in diesem Spectralgebiet weniger zuverlässig als im ultraroten Spectrum. Ferner ist über das Reflexionsvermögen der gebräuchlichen Spiegelmetalle und Spiegelbelegungen im sichtbaren Spectrum noch wenig bekannt. Endlich fehlen entsprechende quantitative Untersuchungen in dem ultravioletten Spectralgebiet noch gänzlich.[1])

Wir haben uns deshalb die Aufgabe gestellt, das Reflexionsvermögen einer Reihe von *Metallen, Spiegelmetallen und belegten Glasspiegeln für die verschiedenen Wellenlängen photometrisch* zu bestimmen und die Methode so zu gestalten, dass sie in ihren wesentlichen Teilen auch für *ultraviolette* Strahlen anwendbar bleibt. Aus diesem Grunde sind alle Linsen und Prismen der benutzten Apparate aus Quarz, alle achromatischen Objective aus Combinationen von Quarz und Flussspat hergestellt.

Die angewendete Methode erlaubt es, das Reflexionsvermögen für *nahezu senkrecht*[2]) auffallende Strahlen zu bestimmen, und vermeidet dadurch die Verwickelungen, welche bei schräger Incidenz durch das Auftreten der Polarisation entstehen.

Die Untersuchung selbst liegt zur Zeit für *den sichtbaren Teil des Spectrums* ($\lambda = 450$ bis $700\,\mu\mu$) abgeschlossen vor.

Methode.

Das Princip der Methode ist folgendes. Vor dem zu untersuchenden Hohlspiegel[3]) wird im Abstande seines Krümmungsmittelpunktes und etwas *oberhalb*[4]) von diesem eine kleine Lichtquelle (glühender Platinblechstreifen) aufgestellt. Der Spiegel wird infolge davon *unterhalb* der Lichtquelle ein gleich grosses, reelles Bild derselben entwerfen. Vergleicht man nun das Lichtstärkenverhältnis der Lichtquelle und ihres soeben erwähnten Bildes mittels eines Spectralphotometers miteinander, so muss man dadurch unmittelbar das Reflexionsvermögen

1) Auch L. Mach u. V. Schumann's Untersuchung ist wesentlich qualitativer Art (Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **108.** (IIa) p. 136. 1899.

2) Im Mittel: $^1/_4{}^0$.

3) Seine Hauptaxe liege horizontal.

4) Dies ist notwendig, da anderenfalls die von der Lichtquelle aufsteigende erhitzte Luft den Strahlenverlauf stören würde.

des untersuchten Spiegels für die betreffende Wellenlänge erhalten.

Als *Spectralphotometer* diente hierbei ein Spectrometer, dessen Collimator mit einem Vierordt'schen Doppelspalt versehen und vor dessen Beobachtungsrohr ein Biprisma in der zuerst von Frey und Kries[1]) beschriebenen und von A. König[2]) bei seinem Spectralphotometer benutzten Weise vorgesetzt wurde. Das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohres war durch einen mit zwei horizontal und zwei vertical verschiebbaren Backen versehenen Spalt ersetzt. Der auf diese Art zu einem für die vorliegende Untersuchung geeigneten Spectralphotometer umgestaltete Apparat gestattete, die Lichtstärkenvergleichungen nach der Maxwell'schen[3]) Methode der Ocularspaltbeobachtung auszuführen.

Versuchsanordnung und Strahlengang.

Die Versuchsanordnung geht aus Fig. 1 hervor. In derselben bedeuten die zwischen *V* und *O* gezeichneten Teile das Spectralphotometer, *V* den Vierordt'schen Doppelspalt, *P* das

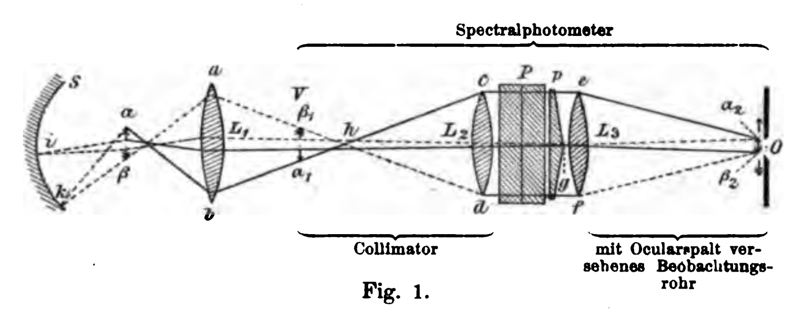


Fig. 1.

dispergirende Quarzprisma (Kante vertical), L_2 und L_3 die Objective des Collimators und des Beobachtungsrohres, *O* den Ocularspalt und *p* ein Biprisma mit sehr spitzen brechenden Winkeln, dessen Kanten senkrecht zu der Ebene der Zeichnung stehen.

1) M. v. Frey u. J. v. Kries, Arch. f. Anat. u. Physiol., Physiol. Abth. p. 336. 1881.

2) A. König, Verhandl. d. physik. Gesellsch. zu Berlin 4. p. 50. 1885; Wied. Ann. 53. p. 785. 1894.

3) J. Clerk Maxwell, Phil. Trans. 150. p. 57. 1860.

Weiter bedeute der kleine *einmal* gestrichelte Pfeil α die im Abstande des Krümmungsradius des zu untersuchenden Hohlspiegels S und etwas oberhalb der Hauptaxe desselben aufgestellte Lichtquelle, von der angenommen werden soll, dass sie nach allen Seiten hin *gleich viel Lichl ausstrahlt.* Der *zweimal* gestrichelte Pfeil β sei das bei der gedachten Aufstellung in die Verlängerung von α fallende, vom Spiegel gelieferte Bild, und L_1 sei die Projectionslinse, welche von der Lichtquelle α und ihrem reellen Bild β die Bilder α_1 und β_1 auf dem zum Spectralphotometer gehörenden Vierordt'schen Doppelspalt entwirft. Der Abstand des letzteren von der Lichtquelle α ist dabei den wirklichen Versuchsverhältnissen entsprechend so gewählt, dass er gleich der vierfachen Brennweite von L_1 ist. Infolge davon haben die Bilder α_1 und β_1 dieselbe Grösse wie die Lichtquelle α. Das Gleiche ist bezüglich der Grösse der bei $\alpha_2 \beta_2$ liegenden Bilder der Fall, da die Objective des Collimators und Beobachtungsrohres gleiche Brennweite haben.

Die Abbildung der als *klein* angenommenen Lichtquelle α durch den Hohlspiegel S erfolgt hiernach unter den denkbar günstigsten Bedingungen, da Gegenstand und Bild sich nahe der Hauptaxe des Spiegels und im Abstande seines Krümmungsmittelpunktes von ihm befinden. Es ist dies für die Genauigkeit der Methode von Wichtigkeit.

Im Interesse der Einfachheit der weiteren Beschreibung soll fernerhin die der *Projectionslinse* L_1 zugewandte Seite von α als die *Vorderseite* der Lichtquelle und die dem *Spiegel* zugewandte als *Rückseite* bezeichnet werden. Ferner wollen wir die von der Vorderseite von α aus- und nach der Projectionslinse hingehenden Strahlen als die *directen*, die von der Rückseite von α ausgehenden, den Spiegel treffenden und erst dann durch die Linse L_1 gehenden Strahlen als die *gespiegelten* bezeichnen. Erstere sind in der Figur durch ausgezogene, die letzteren durch punktirte Linien dargestellt. Die mit einem *einfachen* Pfeil bezeichneten Bilder α_1 und α_2 sind Bilder der *Vorderseite*, die mit einem *doppelten* Pfeil bezeichneten Bilder β, β_1, β_2 sind Bilder der *Rückseite* der Lichtquelle α.

Der in der Figur gezeichnete Strahlengang weicht von der gewöhnlichen Art der Darstellung insofern ab, als er *nicht*

dazu bestimmt ist, den Ort der verschiedenen Bilder constructiv zu liefern. Die gezeichneten Strahlen sollen vielmehr lediglich zur Beantwortung der Frage nach dem Ursprung derjenigen Strahlen dienen, von denen das bei O durch den Ocularspalt[1]) des Beobachtungsrohres[2]) blickende Auge die *obere* bez. *untere* Hälfte des Biprismas erleuchtet sieht.

Denkt man sich hierzu das Biprisma p in Fig. 1 zunächst fort, so werden die von α_1 und β_1 ausgegangenen Strahlen durch das Objectiv L_3 des Beobachtungsrohres zu zwei neuen reellen Bildern in der Ocularspaltebene vereinigt werden. Stellt man dann das Biprisma in den Strahlengang hinein, so erhält man dadurch, dass die *obere* Hälfte des Biprismas die soeben erwähnten zwei Bilder etwas *abwärts*, und ihre untere Hälfte sie *aufwärts* verschiebt, nunmehr statt des bisherigen *einen* Paares von Bildern jetzt *zwei* Paare. Von denselben werden sich die beiden mittleren teilweise oder ganz und zwar in der Art decken, dass ein *aufrecht* stehendes Bild der „Vorderseite" der Lichtquelle α auf ein *verkehrt* liegendes Bild ihrer Rückseite fällt.[3]) In der Figur ist nun der Fall dargestellt, dass man durch passende Wahl des Zwischenraumes zwischen den auf dem Vierordt'schen Spalt entworfenen Bildern α_1 und β_1 oder, was dasselbe ist, des Abstandes des unteren Fusspunktes der Lichtquelle α von der Spiegel- und Collimatoraxe das untere Bild (β_2) des oberen Bildpaares mit dem oberen Bild (α_2) des unteren Bildpaares zur vollständigen gegenseitigen Deckung gebracht hat.

Betrachten wir nun zunächst dasjenige Strahlenbüschel, welches von der *oberen* Hälfte des Biprismas ausgeht und zwischen den ausgezogenen Linien $e\,\alpha_2$ und $g\,\beta_2$ liegt. Alle diese Strahlen kommen von dem Bilde α_1 her, während die vom Bilde β_1 aus auf die *obere* Hälfte des Biprismas fallenden,

1) Das Auge ist hierbei möglichst nahe an den Ocularspalt zu bringen.

2) Also *ohne* Ocular.

3) Dieser Umstand lässt sich nicht vermeiden und bedingt, dass man für α nur solche Lichtquellen verwenden darf, die auf ihrer ganzen Höhe eine möglichst gleiche Lichtstärke besitzen, sowie dass man die Verticalbacken des Maxwell'schen Ocularspaltes so zu stellen hat, wie es auf p. 365 (Z. 18 bis 14 v. u.) angegeben ist.

in der Fig. 1 nicht dargestellten Strahlen sich zu dem unterhalb β_2 gezeichneten Bilde vereinigen.

Demgegenüber umfasst das von der *unteren* Hälfte des Biprismas nach $\alpha_2 \beta_2$ gerichtete, durch die gestrichelten Linien $g\,\alpha_2$ und $f\beta_2$ gekennzeichnete Strahlenbündel *nur* solche Strahlen, welche von dem Bilde β_1 des Vierordt'schen Doppelspaltes ausgegangen sind, während die von dem Bilde α_1 ausgehenden und die *untere* Hälfte des Biprismas durchsetzenden, in der Figur nicht dargestellten Strahlen sich zu dem oberhalb α_2 gezeichneten Bilde vereinigen.

Mit anderen Worten: Blickt man, nachdem die oberhalb und unterhalb $\alpha_2 \beta_2$ liegenden beiden Bilder durch die am Ocularspalt angebrachten Verticalblenden abgeblendet sind, nach dem Biprisma hin, so erscheint dessen ganze obere Hälfte *nur* durch solche Strahlen erleuchtet, welche von der *Vorderseite* der Lichtquelle α ausgegangen sind, während die ganze *untere* Biprismahälfte *nur* durch solche Strahlen erleuchtet wird, welche von der *Rückseite* von α ausgegangen und dann vom Spiegel S reflectirt worden sind. Infolge davon ist es gleichgültig, ob die Kante des stumpfen Winkels des Biprismas in Höhe der Mitte des Objectivs L_3 und L_2 liegt oder nicht.

Die beiden photometrisch miteinander zu vergleichenden Felder liegen dem Vorstehenden zufolge unmittelbar nebeneinander und stossen in einer feinen, dunklen Trennungslinie aneinander, welche im Rot, sowie bei diffuser Beleuchtung der beiden Spalte für alle Farben dem Auge *ganz* verschwindet.

Aus der Betrachtung des Strahlenganges (Fig. 1) geht ferner hervor, dass die durch die *obere* (bez. *untere*) Hälfte des Biprismas hindurch zum Auge gelangenden Strahlen nur durch den *unteren* (bez. *oberen*) Teil der Projectionslinse L_1 gegangen sind. Dementsprechend kommt für den Versuch auch nur die untere Hälfte bez. der zwischen i und k liegende Teil des Spiegels in Betracht, während seine obere Hälfte füglich ganz fehlen könnte.

Endlich möge noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass man beim Hinblicken des Auges auf das Objectiv L_3 und das Biprisma p auch gleichzeitig die Flächen des dispergirenden Prismas P, die Achromate L_2 und L_1, sowie end-

lich den Spiegel S selbst mit allen ihren Einzelheiten und Fehlern aufeinander projicirt sieht. Etwaige Kratzen und Risse in den Oberflächen und Einschlüsse und Fremdkörper in dem Material der Linsen, Prismen etc. sind demnach hier *nicht* wie gewöhnlich nur Schönheitsfehler. Ob sie für das Resultat von Einfluss sind, kann man bezüglich der Projectionslinse L_1 leicht dadurch ermitteln, dass man die letztere um ihre optische Axe um 180° dreht und die zuvor im Spectralphotometer erhaltenen Einstellungen controllirt. Die Ungleichheiten aber, welche die oberen und unteren Hälften der zum *Spectralphotometer* selbst gehörenden optischen Teile besitzen, fallen bei der von uns benutzten Methode dadurch für das Resultat heraus, dass die Oeffnung des als „Vergleichsspalt" benutzten unteren Vierordt'schen Spaltes stets durch ein der Tarirmethode entsprechendes Verfahren ermittelt wurde. [1])

Apparate.

Als *Spectralphotometer* diente ein mit automatischer Minimumstellung des Prismas versehener Spectralapparat. Sein Collimator besitzt einen bilateral verschiebbaren Vierordt'schen Doppelspalt [2]), dessen Bewegungsschrauben $^1/_2$ mm Ganghöhe haben. Auf den Kopf des *Collimators* kann eine weite Lochblende mit centrisch darin ausgespanntem Pferdehaarkreuz nach Art eines Fernrohrdeckels aufgesetzt werden. Die Verbindungslinie des Schnittpunktes dieses Kreuzes mit dem Teil des Vierordt'schen Doppelspaltes, durch den die Trennungslinie der beiden Einzelspalte hindurchgeht, soll als Axe des Collimators gelten. In dem zum Spectralapparat gehörigen *Beobachtungsfernrohr* war die Fadenkreuzblende durch einen Maxwell'schen Ocularspalt ersetzt, welcher mit zwei, durch eine Schraube bilateral verschiebbaren *horizontalen* und zwei einzeln beweglichen *verticalen* Backen versehen ist. In den Stutzen des Ocularspaltes kann für die erforderlichen Justirungsarbeiten ein 15fach vergrösserndes Ocular eingesteckt werden.

1) Vgl. p. 365, letzter Absatz.

2) In sehr vollkommener Ausführung von Schmidt & Haensch in Berlin SO gefertigt.

Auf das Objectivende des Beobachtungsfernrohres ist, wie Fig. 2 zeigt, ein Klemmring aufgepasst, welcher einen um *a* drehbaren Arm *b* trägt, in den das Biprisma *p* eingesetzt ist. Das letztere hat brechende Winkel von 22 Minuten.



Fig. 2.

Die Objective des Beobachtungsrohres und des Collimators haben 365 mm Brennweite und 28 mm Oeffnung.

Als *Lichtquelle* diente bei sämtlichen Versuchen ein Platinstreifen von 40 mm Länge, 2 mm Breite [1]) und $^{1}/_{10}$ mm Dicke, derselbe war, um seiner ganzen Oberfläche ein möglichst gleichgrosses Emissionsvermögen zu erteilen, elektrolytisch mit einer etwa 2 μ dicken Schicht Platinmoor überzogen. Seine Aufstellung in dem zugehörigen „Platinglühapparat" ist aus Fig. 3 [2]) ersichtlich.

Die Säulchen, zwischen denen der Platinstreifen ausgespannt ist, sind so gesetzt, dass die verticale Axe, um welche der Oberteil des Platinglühapparates gedreht werden kann, durch den Platinstreifen hindurchgeht. Um den letzteren auch bei verschieden starkem Glühen stets gerade gespannt zu erhalten, ist die Klemmbacke des Säulchen *a* mit einem Federhaus versehen. Der unterhalb der Schieferplatte links sichtbare Arm *d*, welcher sich in entsprechende Kerben des Dreifusses einlegt, ermöglicht Drehungen des Oberteils des Apparates um genau 180° auszuführen.

1) Die Höhe des im Ocularspalt entstehenden Bildes $\alpha_2 \beta_2$ (Fig. 1) ist demnach erheblich geringer als der Durchmesser der Pupille des Auges.

2) In derselben ist die zum Vermeiden der Luftströmungen bestimmte Kappe fortgelassen.

Der in der Fig. 3 schräg nach oben gerichtete „Reiter“ *c* des einen Messingsäulchens wird bei der Aufstellung und Justirung der Apparate besprochen werden. Der zum Tragen der zu untersuchenden Spiegel bestimmte *Spiegelhalter* besitzt eine mikrometrische Feinstellung für Drehungen um eine verticale Axe, sowie eine Elevationsschraube, um mit ihrer Hülfe der Hauptaxe des Spiegels eine passende Neigung zur Horizontalen geben zu können.



Fig. 3.

Die zu den Versuchen verwendeten *Hohlspiegel*[1]) hatten durchgängig 300 mm Krümmungsradius und 40 mm Durchmesser.

Die *Projectionslinse* (L_1 in Fig. 1) hat 155 mm Brennweite und 30 mm Oeffnung. Sie besteht aus einer positiven Flussspat- und zwei negativen Quarzlinsen. Um ihre Aufstellung bequem justiren zu können, ist ihr Stativ mit Zahnstange und Trieb zum Hoch- und Niedrigstellen versehen.

Als optische Bank für den *Spiegelhalter*, den *Platinglühapparat* und den *Projectionslinsenträger* diente das Bett eines Drehbanksgestells, das mit drei entsprechenden Supports versehen war.[2])

Aufstellung und Justirung der Versuchsanordnung.

Bei der Aufstellung der verschiedenen, zu der Versuchsanordnung gehörenden Apparate wird von der des Spectrometers ausgegangen, sein Collimator und Beobachtungsfernrohr horizontal gestellt und das Biprisma (Fig. 2) zur Seite geklappt.

Sodann handelt es sich darum, den Platinstreifen in etwa 60 cm Abstand vom Collimatorspalt auf der optischen Bank so aufzustellen, dass 1. sein in der Verlängerung der Drehaxe des Platinglühapparates liegender Querschnitt in diejenige Vertical-

1) Ueber Planspiegel vgl. p. 368, unten.

2) Die Einzelheiten der Aufstellung der Apparate gehen aus der Fig. 3 der Zeitschr. f. Instrumentenk. **19.** p. 299. 1899 hervor.

ebene kommt, welche durch die Collimatoraxe definirt ist, sowie dass 2. seine untere Kante etwa $^1/_2$ mm oberhalb dieser Axe liegt.

Um die erstere Bedingung zu erfüllen, wird das Pferdehaarkreuz auf den Kopf des Collimators aufgesteckt und der in Fig. 3 dargestellte Reiter *c* über den Platinstreifen hinübergeklappt. Dieser auf der *festen* Klemmbacke des Säulchens *b* angebrachte Reiter besteht aus einem zwischen Spitzenschrauben drehbaren Arm, welcher an seinem freien Ende einen ∩-förmig gebogenen Blechstreifen trägt, dessen beide Arme mit einem schmalen Schlitz versehen sind, deren Verbindungslinie senkrecht zu der Längsrichtung des Platinstreifens liegt. Die Reitervorrichtung lässt sich bis zu der Unterkante des glühenden Platinstreifens herabklappen, ohne ihn jedoch selbst zu berühren, und ist in einem kleinen, oben am Säulchen *b* angebrachten Schlitten mittels einer Schraube ein wenig vor- und rückwärts zu verschieben, um bei herabgeklapptem Reiter von dem mittleren Stück des Platinstreifens gerade nur denjenigen Teil frei zu lassen, welcher in der Richtung der Drehaxe des glühenden Platinstreifens liegt.

Eine einfache Art, den Platinstreifen richtig zu orientiren, würde nun offenbar die sein, dass man in der Mitte des Spaltes des Spectrometers eine Blende mit feiner lochartiger Oeffnung anbrächte, den Collimator als Lochcamera benutzte und die Stellung des Platinglühapparates so lange veränderte, bis das Bild der erwähnten Stelle des Platinstreifens und die Mitte der Objectivlinse des Collimators sich decken.

Im vorliegenden Falle, wo, wie bereits erwähnt, das Beobachtungsrohr mit einem vertical und horizontal verschiebbaren Ocularspalt versehen ist, gestaltet sich die Justirung aber besonders bequem. Denn man braucht bloss den Ocularspalt bis auf eine etwa 1 mm grosse quadratische Oeffnung zu schliessen, das Ocular des Beobachtungsfernrohres herauszunehmen und erhält dann bei dem Hinblicken nach dem Objectiv genau das Gleiche, als wenn man vor der Mitte des Collimatorspaltes eine feine Lochblende angebracht und hierdurch den Collimator zu einer Lochcamera umgestaltet hätte.

Deckt sich nun der durch den Schlitz des Reiters markirte Teil des glühenden Platinstreifens mit dem vor dem Collimatorobjectiv ausgespannten Pferdehaarkreuz *auch dann*,

wenn der Platinglühapparat bei diesem Versuch um 180° gedreht wird, so ist die erste der beiden auf p. 361 unten erwähnten Bedingungen erfüllt. Anderenfalls wäre zunächst der Reiter durch seine Bewegungsschraube und sodann die Stellung des Platinglühapparates durch die Transportschraube des ihn tragenden Supports zu verbessern. Um dies auch für die zweite Bedingung zu erreichen, sind die Fussschrauben des Platinglühapparates entsprechend zu heben oder zu senken. Ein Vor- oder Zurückschieben des Platinglühapparates mit seinem Support auf der optischen Bank ermöglicht dann weiter eine Controlle, ob die optische Bank in der Richtung der Collimatoraxe steht. Ist dies der Fall, so wird der Platinglühapparat endgültig in 60 cm Abstand von dem Collimatorspalt gebracht.

Nunmehr folgt die Aufstellung des Hohlspiegels. Man bringt ihn in den Abstand seines Krümmungsradius vom Platinstreifen, und zwar so, dass die Spiegelmitte ungefähr in die Höhe der Axe des Collimators kommt und handhabt die Mikrometerschraube und die Elevationsschraube des Spiegelträgers, bis ein scharfes Bild des Platinstreifens und des dem Spiegel zugewandten Schlitzes des Reiters *c* dicht unter diesem selbst auf einer kleinen Mattglasscheibe, die man auf der Schieferplatte des Platinglühapparates aufstellt, entworfen wird. Man nimmt hierauf die Mattglasscheibe fort, blickt (ohne Ocular) durch die quadratisch gestellte enge Ocularspaltöffnung des Beobachtungsrohres hindurch und corrigirt danach die Spiegelstellung, bis das vom Spiegel entworfene reelle Bild des Reiterschlitzes ebenso weit unterhalb des vor das Collimatorobjectiv gesetzten Pferdehaarkreuzes liegt, wie der direct gesehene Platinstreifen über ihm.

Die darauf erfolgende Aufstellung der Projectionslinse, vermittelst deren der glühende Platinstreifen und sein vom Hohlspiegel entworfenes reelles Bild auf dem Vierordt'schen Doppelspalt abgebildet wird, hat keine Schwierigkeit. Ist die Aufstellung richtig ausgeführt, so muss der von dem Schlitz des Reiters unbedeckte Teil des Platinstreifens bei *beiden* auf den Doppelspalt projicirten Bildern genau übereinanderliegen und die Spaltmitte durch ihn hindurchgehen.

Es bleibt nun zunächst noch, die Richtigkeit der Abstände des Hohlspiegels und der Projectionslinse von dem

Platinstreifen zu controlliren. Es geschieht dies in einfacher Weise dadurch, dass man die Verticalblenden des *Ocularspaltes* weit auseinanderzieht, das Ocular einsetzt und nun durch das Beobachtungsfernrohr blickend prüft, ob die beiden auf dem Vierordt'schen Spalt entworfenen Bilder vollkommen scharf erscheinen und symmetrisch zur Trennungslinie[1]) des oberen und unteren Spaltes liegen. Gegebenen Falls ist zunächst der Abstand der Projectionslinse und sodann der des Spiegelträgers zu corrigiren. Der letztere Abstand ist übrigens leicht bis auf etwa $^1/_{12}$ Proc. seines Wertes richtig einzustellen; es hat dies mit besonderer Sorgfalt zu geschehen, da durch Controllversuche ermittelt wurde, dass bei einem um 1 Proc. unrichtig gewählten Abstand des Hohlspiegels vom Platinstreifen schon Fehler von ca. 5 Proc. des beobachteten Reflexionsvermögens die Folge sind.

Nunmehr wird das Biprisma vor das Objectiv des Beobachtungsfernrohres vorgeklappt. Man erhält dann im Ocular *vier* Bilder des Spaltes, von denen die beiden mittleren sich teilweise decken. Zeigen hierbei die Bilder *nicht* gleiche Färbung, so würde das heissen, dass die Kante des Biprismas nicht senkrecht auf dem Spalt und der Kante des dispergirenden Prismas steht. Ein ungemein schärferes Erkennungsmittel für die richtige Stellung des Biprismas, als sie durch die blosse Beobachtung der gleichen Färbung der Bilder ermöglicht wird, erhält man aber, wenn man vor den Spectrometerspalt eine Natriumflamme bringt und den Spalt so eng macht, dass die Natriumlinie ohne Biprisma betrachtet *doppelt* erscheint. Im allgemeinen wird dies wegen der nicht vollkommenen Deckung der Bilder dann nicht mehr der Fall sein, wenn das Biprisma wieder vorgeklappt wird, und um nun die Natriumlinie wieder doppelt zu sehen, wird es einer Berichtigung mittels der Schraube *c* (Fig. 2) bedürfen.

Ist die Deckung der durch das Prisma vereinigten, mittleren Bilder nur eine *teilweise*, so muss die Elevationsschraube des Spiegelhalters so lange ein- oder ausgeschraubt werden, bis eine absolute Deckung der Bilder erreicht ist.

1) Dieselbe ist durch einen horizontal darüber gespannten dünnen Draht kenntlich gemacht.

War eine solche Verstellung der Elevationsschraube nötig, so werden nun die beiden auf dem Vierordt'schen Doppelspalt entworfenen Bilder des „direct" gesehenen und „gespiegelten" Platinstreifens nicht mehr in genau gleichem Abstande von dem vor der horizontalen Trennungslinie der beiden Spalte ausgespannten dünnen Draht liegen, was sich mittels des Beobachtungsfernrohres unmittelbar erkennen und durch eine geringe Hebung oder Senkung der Projectionslinse beseitigen lässt.

Ausführung der Versuche.

Nachdem in vorstehender Weise sämtliche Teile des Apparates justirt waren, wurde vor der Untersuchung jedes einzelnen Spiegels zunächst die Stellung des Platinstreifens mittels des Reiters *c* geprüft, um sicher zu sein, dass thatsächlich nur solches Licht auf die beiden Hälften des Vierordt'schen Spaltes fiel, welches genau von der gleichen Stelle der *Vorder-* und *Rückseite* des glühenden Platinstreifens herrührte. Sodann wurde die Richtigstellung der Kante des Biprismas mittels Natriumlichtes controllirt, dem unteren Vierordt'schen Spalte eine bestimmte Breite, in der Regel 0,15 bis 0,2 mm, gegeben und der Ocularspalt etwa doppelt so breit gemacht. Die beiden verticalen Backen des letzteren wurden so weit zusammengeschoben, dass sie die in Fig. 1 oberhalb und unterhalb von $\alpha_2\beta_2$ gezeichneten Bilder vollständig abblendeten, aber *nicht* ganz bis an das mittlere Bild selbst hinanreichten. Das Beobachtungsrohr wurde nun nacheinander auf die Wellenlängen 450, 500, 550, 600, 650, 700 $\mu\mu$ eingestellt, die hierbei zur Helligkeitsgleichheit der beiden Photometerfelder erforderlichen Breiten des anderen Spaltes wurden aus je 10 Spalteinstellungen abgeleitet, und diese Versuche nach Drehung des Platinglühapparates um 180° wiederholt.

Endlich wurde vor und nach einer jeden solchen Beobachtungsreihe durch gleichfalls je 20 Einstellungen diejenige Trommelstellung des „beweglichen" (oberen) Spaltes ermittelt, bei welcher bei ungeänderter Breite des anderen Spaltes im Photometer Gleichheit der beiden Hälften des Gesichtsfeldes eintritt, wenn sowohl der obere wie untere Spalt gleich hell beleuchtet werden. Um letzteres zu erreichen, wurde in etwa 25 cm Abstand vor den Vierordt'schen Doppelspalt eine

Gipsscheibe schräg vorgesetzt, die durch eine lichtstarke Glühlampe gleichmässig beleuchtet wurde. Diese Versuche zur Ermittelung des Spaltöffnungsverhältnisses bei gleich starker Beleuchtung des oberen und unteren Spaltes werden natürlich nur dann ein auf die Versuche mit dem glühenden Platinstreifen anwendbares Resultat ergeben, wenn die Spaltlängen, welche in beiden Fällen von der Lichtquelle getroffen werden, gleich gross sind. Dieser Bedingung ist aber im vorliegenden Falle dadurch genügt, dass die Verticalblenden des Ocularspaltes von vornherein nur Strahlen von denjenigen Stücken der Vierordt'schen Spalte zum Auge gelangen lassen, auf welche bei den Reflexionsversuchen das Bild des direct gesehenen und gespiegelten Platinstreifens fällt.

Fügt man endlich zu den Mittelwerten der beobachteten Spalteinstellungen die durch besondere Versuche abgeleitete „Nullpunktscorrection" (bei unserem Apparat $+1{,}5\,p$) hinzu, so ergiebt das Verhältnis der für die einzelnen Wellenlängen einerseits und der für *gleich* starke Beleuchtung *beider* Spalte andererseits beobachteten (corrigirten) Trommelablesungen des oberen Spaltes unmittelbar das Reflexionsvermögen des betreffenden Spiegels für die verschiedenen Wellenlängen. Etwaige Ungleichheiten in der Temperaturverteilung oder im Ausstrahlungsvermögen der für die Versuche benutzten Stelle der Vorder- und Rückseite des Platinstreifens fallen hierbei heraus, da ein jeder Versuch nach Umdrehung des Platinglühapparates um 180^0 wiederholt wurde.

Die Ausführung der Versuche selbst hatte für die Wellenlängen 500—650 $\mu\mu$ keine Schwierigkeit, die erhaltenen Trommeleinstellungen stimmten, wie aus der nachstehend als Beispiel mitgeteilten Beobachtungsreihe eines Goldspiegels[1]) hervorgeht, recht gut überein. Bei 700 $\mu\mu$ Wellenlänge musste man, um die Lichtintensität zu vermehren, die Stromstärke des glühenden Platinstreifens, welche für die Versuche bei den anderen Wellenlängen etwa 13 Amp. betrug, auf 15 und für das äusserste Violett ($\lambda = 450\,\mu\mu$) auf 19 Amp. erhöhen. Beim Violett ist die Genauigkeit der Einstellungen erheblich geringer als bei den anderen benutzten Wellenlängen, da hier trotz der ge-

1) Vergoldeter Hohlspiegel aus Messing.

ringen Lichtintensität ein ungemein starkes Blenden des Auges eintritt. Ausserdem wird die Ausführung der Versuche noch dadurch erschwert, dass lebhafte Fluorescenz aller von den Strahlen durchsetzten Linsen und Prismen eintritt, und die in ihnen enthaltenen Luftbläschen und Fremdkörperchen die Gleichmässigkeit des Gesichtsfeldes in unangenehmer Weise stören. Endlich wirken in Violett auch die von den Linsenflächen gelieferten reellen Bildchen der Lichtquelle störend, können aber leicht durch einen kleinen vor das dispergirende Prisma seitlich vorgesetzten Schirm dem beobachtenden Auge verdeckt und unschädlich gemacht werden.

Die Versuchsergebnisse sind in weiten Grenzen von der gewählten Breite des Vergleichsspaltes unabhängig. Man erhält identische Resultate, mag man den unteren Spalt 20 oder 75 Trommelteile weit (entsprechend 0,1 bis $\sim$0,4 mm Breite) wählen. Indes wurde, um ein möglichst reines Spectrum für die Versuche zu benutzen, fast durchgängig eine Spaltbreite von etwa 0,15 mm für den unteren Spalt verwendet.

Nachstehende Tab. 1 giebt ein Beispiel einer Beobachtungsreihe und deren Berechnung.

Tabelle 1.

Goldspiegel (galvanisch vergoldeter Hohlspiegel aus Messing).
Spalt u[1]) auf Trommelteil 35 eingestellt.
Nullpunktscorrection des Spaltes $o = +1{,}5$ Tr.-T.
Einstellung des Spaltes o bei gleich hell beleuchtetem oberen und unteren Spalt

	vor Beginn		nach Schluss	
	der Beobachtungsreihe			
	I	II[2])	I	II
	32	32,4	31,4	32,9
	32,2	32	32,5	32
	32	31,8	32,2	32
	31,8	32	32	31,6
	31,8	32,5	32,2	32,3
Mittel	32,0	32,1	32,1	32,2

Gesamtmittel $b = 32{,}1$ Tr.-T.

1) o bedeutet den oberen, u den unteren Spalt.

2) I und II bedeuten die von dem Beobachter I bez. II gemachten Trommelablesungen des beweglichen Spaltes.

Tabelle 1 (Fortsetzung).

Einstellungen des Spaltes *o* bei den verschiedenen **Wellenlängen** λ.

$\lambda = 450\ \mu\mu$	I	II	I	II[1])
	88,5	91	90,5	88
	91,5	90	88	90
	88	88,5	87,5	91
	91,5	91	93	90,5
	91,7	88	88	88,5
Mittel	90,2	89,7	89,4	89,6

Gesamtmittel $a_{450} = 89{,}7$ Tr.-T.

$\lambda = 500\ \mu\mu$	I	II	I	II
	70,5	73	68,2	69
	71,3	71	68	67,5
	69	70	68	68,5
	70	70	68	69
	70,8	71	68,2	68,5
Mittel	70,3	71	68,1	68,5

Gesamtmittel $a_{500} = 69{,}5$ Tr.-T.

$\lambda = 550\ \mu\mu$	I	II	I	II
	43,6	44	44	43
	44,3	43	42	43,5
	44	44	43	43
	44,3	43	43	42,5
	43,4	43,5	43	43
Mittel	43,9	43,5	43	43

Gesamtmittel $a_{550} = 43{,}4$ Tr.-T.

etc.

Berechnung des Reflexionsvermögens ϱ:

λ	a	$\varrho = \frac{b + 1{,}5}{a + 1{,}5} \cdot 100$
450 $\mu\mu$	89,7	36,8 %
500	69,5	47,3
550	43,4	74,9

etc.

Da, wo *Hohl*spiegel nicht vorhanden waren, und es si um die Untersuchung gegebener Planspiegel handelte, wurd die Versuche mit solchen unter Zuhülfenahme einer im A

1) Die Zahlen der dritten und vierten Columne wurden nach U drehung des Platinglühapparates um 180° erhalten.

stande ihrer Brennweite von dem Platinstreifen aufgestellten, vor die betreffenden Spiegel vorgesetzten, achromatischen Linse ausgeführt. Eine nach p. 366 Abs. 2 durchgeführte Berechnung der beobachteten Spalteinstellungen ergiebt dann, da die gedachte Linse vorgesetzt ist, zunächst nur die „scheinbaren" Reflexionsvermögen (ϱ_l) des betreffenden Spiegels für die verschiedenen Wellenlängen. Offenbar braucht man aber nur durch eine Reihe voraufgehender Versuche für irgend ein Material, z. B. reines Silber, einerseits dessen wahres Reflexionsvermögen unter Benutzung eines Hohlspiegels und andererseits sein „scheinbares" Reflexionsvermögen unter Benutzung eines aus demselben Material hergestellten Planspiegels und unter Anwendung *derselben* vorgesetzten, achromatischen Linse zu bestimmen, um dadurch für die gegebene Versuchsanordnung das Verhältnis (c) des „wahren" zum „scheinbaren" Reflexionsvermögen allgemein zu erhalten. Für das von uns als Linse benutzte achromatische Objectiv waren diese Verhältniszahlen durch Silberspiegel bestimmt zu:

$$c = \frac{90{,}6}{58{,}05} = 1{,}561 \quad \text{bei } \lambda = 450\,\mu\mu$$

$$c = \frac{91{,}8}{60} = 1{,}530 \quad \text{bei } \lambda = 500\,\mu\mu$$

$$c = \frac{92{,}5}{60{,}1} = 1{,}539 \quad \text{bei } \lambda = 550\,\mu\mu$$

$$c = \frac{93}{60{,}2} = 1{,}545 \quad \text{bei } \lambda = 600\,\mu\mu$$

$$c = \frac{93{,}6}{60{,}2} = 1{,}555 \quad \text{bei } \lambda = 650\,\mu\mu$$

$$c = \frac{94{,}6}{64{,}3} = 1{,}471 \quad \text{bei } \lambda = 700\,\mu\mu$$

Multiplicirt man mit diesen Werten von c die für das oben erwähnte „scheinbare" Reflexionsvermögen (ϱ_l) des zu untersuchenden Planspiegels berechneten Zahlen, so erhält man dadurch nunmehr sein „wahres" Reflexionsvermögen für die verschiedenen Wellenlängen. [1])

Die auf diese Weise für Planspiegel gefundenen Reflexionsvermögen stimmen mit den für dasselbe Material nach der

1) Aehnliche Versuche erlauben umgekehrt auch den Lichtverlust zu bestimmen, welchen Lichtstrahlen beim Hindurchgehen durch Glasplatten oder Linsen erfahren.

Hohlspiegelmethode gefundenen fast völlig überein. Als Beispiel hierfür mögen folgende Zahlen gelten, welche für einen aus der Brashear'schen Legirung hergestellten Hohlspiegel und von Brashear[1]) selbst bezogene Planspiegel ermittelt wurden.

Tabelle 2.

λ	Hohlspiegel (von Zeiss aus Brashear'scher Legirung hergestellt)	Originalplanspiegel von Brashear	
		Nr. 1	Nr. 2
450 μμ	61,6%	62,8%	61,5%
500	62,4	63,5	63,2
550	63,9	64	64
600	64,3	64,4	64,4
650	65,6	65,7	65,2
700	68,3	68,5	68,5

Versuchsergebnisse.

Die zu den Versuchen benutzten Spiegel und die mit ihnen gewonnenen Beobachtungen sind aus nachstehenden Zusammenstellungen ersichtlich.

A. Reine Metalle.

1. Silber.

6 Hohlspiegel aus Glas, chemisch versilbert von C. Zeiss in Jena.
6 Beobachtungsreihen, dieselben ergaben:

Spiegel	Spalt u	$\lambda = 450$	500	550	600	650	700 μμ
		%	%	%	%	%	%
Nr. I	$u = 35$Tr.-T.	90,2	91,8	92,9	93,3	94,2	95,5
„ II	$u = 35$	90,9	90,9(?)	92,4	92,6	92,8	93,7
„ III	$u = 35$	90,6	91,7	92,4	92,8	93,4	94
„ IV	$u = 35$	90,9	92	92,5	93,2	93,8	95,3
„ V	$u = 35$	90,3	92,4	92,4	93	93,2	94,3
„ VI	$u = 35$	90,9	92,2	92,7	93	94	95
	Im Mittel	9,6	91,8	92,5	93	93,6	94,6

2. Platin.

1 Hohlspiegel aus Messing von Zeiss, galvanisch platinirt durch Hugo Schickert's Nachf. in Dresden.
1 Beobachtungsreihe (vgl. Tab. 3 p. 373).

1) John A. Brashear, Astronom. and Phys. Inst. Works in Allegheny, Pa., V. St. A.

3. Nickel.

1 Hohlspiegel aus galvanisch vernickeltem Stahl (I), 1 desgl. aus massivem Nickel (II), beide von Zeiss.

5 Beobachtungsreihen, dieselben ergaben:

Spiegel	Spalt u	$\lambda = 450$	500	550	600	650	700 $\mu\mu$
		%	%	%	%	%	%
Nr. I	$u = 50$ Tr.-T.	58,4	61	62,1	65,4	66,7	70
„ II	$u = 25$	58,2	61,3	63,2	65,5	66,7	69,2
„ II	$u = 35$	59	61	63,4	65	65,5	70,1
„ II	$u = 50$	—	60,3	63,2	—	65,4	—
„ II	$u = 65$	58,3	60,2	62,1	63,5	65,7	69,7
	Im Mittel	58,5	60,8	62,6	64,9	66,0	69,8

4. Stahl.

2 Hohlspiegel (I u. II) aus ungehärtetem Stahl, 1 desgl. (III) gehärtet, beide von Zeiss.

3 Beobachtungsreihen, dieselben ergaben:

	Spalt u	$\lambda = 450$	500	550	600	650	700 $\mu\mu$
Spiegel Nr. I (ungehärtet)	$u = 35$ Tr.-T.	55,9	54,6	54,7	55,6	56,4	59,5
Spiegel Nr. II (ungehärtet)	$u = 35$	56,8	55,8	55,5	56,4	57,4	59,2
im Mittel		56,3	55,2	55,1	56,0	56,9	59,3
Spiegel Nr. III (gehärtet)	$u = 30$ Tr.-T.	58,6	59,6	59,4	60,0	60,1	60,7

5. Gold.

1 Hohlspiegel aus Messing von Zeiss, galvanisch vergoldet durch P. Stückrath in Friedenau.

5 Beobachtungsreihen, dieselben ergaben:

Spalt u	$\lambda = 450$	500	550	600	650	700 $\mu\mu$
$u = 20$ Tr.-T.	—	47	—	85,9	—	92,3
$u = 35$	36,8	47,3	74,9	86,2	88,2	92,1
$u = 35$	—	47,3	74,5	85,4	—	92,3
$u = 50$	—	47,4	—	85,1	—	92,2
$u = 75$	—	(52)	—	85,3	—	92,6
im Mittel	36,8	47,3	74,7	85,6	88,2	92,3

6. Kupfer.

2 Hohlspiegel (I und II) von Zeiss, aus reinstem Kupfer, sie zeigten an ihrer Oberfläche ein feines, krystallinisches Gefüge. Die Spiegel wurden später in einem Kupfercyanürbad galvanisch verkupfert und ergaben darauf die unter III und IV aufgeführten Reflexionsvermögen. Von diesen Werten ist nur die Reihe IV in der Tab. 3 (auf p. 373) aufgenommen, da der Spiegel III in der Folge der Verkupferung an der Gleichmässigkeit seiner Krümmung gelitten hatte.

Spiegel	Spalt u	$\lambda = 450$	500	550	600	650	700 $\mu\mu$
Nr. I	$u = 35$ Tr.-T.	43,2	49,2	53,7	79,5	84,4	88,4
Nr. II	$u = 35$	42,5	45,5	49	72,3	79,5	84,5
Nr. II (Controlvers.)	$u = 35$	42,9	46,3	49,6	72,8	79,2	83,5
Nr. III	$u = 35$	47,6	52,7	58,4	82,2	86,6	88,6
Nr. IV	$u = 35$	48,8	53,3	59,5	83,5	89	90,7

B. Spiegelmetalle.

Für die Versuche mit den Spiegelmetallen von Rosse, Schröder (Legirung 1 und 6), Mach (Legirung I, VII, XII) standen von Zeiss gefertigte Hohlspiegel zur Verfügung, für die Brashear'sche Spiegellegirung ein ebensolcher Hohlspiegel, sowie zwei von Brashear selbst bezogene, höchst vollkommene Planspiegel, endlich für die Brandes und Schünemann'sche Legirung ein von dieser Firma hergestellter Planspiegel. Es wurde mit ihnen je eine Beobachtungsreihe ausgeführt [1], deren Resultate vgl. Tab. 3 (p. 373).

C. Hinten belegte Spiegel.

Die gleichfalls in Tab. 3 enthaltenen Versuchsergebnisse wurden an sechs hinten belegten, planparallelen Glasspiegeln gewonnen, von denen die Firma Zeiss zwei mit Quecksilberamalgam überzogen und zwei mit einem chemisch niedergeschlagenen Silberbelag versehen hatte, während die übrigen zwei Platten nach einem von dem Zeiss'schen abweichenden Verfahren durch die Firma C. Bischoff, Berlin N, Tieckstr. 37, versilbert worden waren.

Zusammenfassung der Resultate.

Die Ergebnisse der vorstehend im einzelnen erwähnten Versuche sind in nachfolgender Tab. 3 zusammengestellt.

1) Benutzte Breite des Vergleichsspaltes $u = 35$ Trommel-Theilen.

Tabelle 3.

Reflexionsvermögen in Procenten des auffallenden Lichtes						
für λ =	450	500	550	600	650	700 $\mu\mu$
Reine Metalle:	%	%	%	%	%	%
Silber	90,6	91,8	92,5	93,0	93,6	94,6
Platin	55,8	58,4	61,1	64,2	66,3	70,1
Nickel	58,5	60,8	62,6	64,9	65,9	69,8
Stahl, gehärtet	58,6	59,6	59,4	60,0	60,1	60,7
Stahl, ungehärtet	56,3	55,2	55,1	56,0	56,9	59,3
Gold	36,8	47,3	74,7	85,6	88,2	92,3
Kupfer	48,8	53,3	59,5	83,5	89,0	90,7
Spiegelmetalle:						
Legirung von Rosse (68,2 % Cu + 31,8 Sn)	62,9	63,2	64,0	64,3	65,6	67,3
Legirung von Brashear (68,2 % Cu + 31,8 Sn)[1]	61,9	63,3	64,0	64,4	65,4	68,5
Legirung Nr. 1 von Schröder (66 % Cu + 22 Sn + 12 Zn)[2]	62,4	62,5	63,4	64,2	65,1	68,0
Legirung Nr. 6 von Schröder (60 % Cu + 30 Sn + 10 Ag)[3]	61,5	62,5	63,6	65,2	66,6	68,6
Legirung von Brandes & Schünemann (41 % Cu + 26 Ni + 24 Sn + 8 Fe + 1 Sb)	49,1	49,3	48,3	47,5	49,7	54,9
Legirungen von Ludwig Mach						
Nr. I (2 T. Al + 1 T. Mg)	83,4	83,3	82,7	83,0	82,1	83,3
Nr. VII (1 T. Al + 1,5 T. Mg)	83,4	82,5	82,1	83,8	84,9	84,4
Nr. XII (1 T. Al + 2,75 T. Mg)	83,4	84,5	83,8	84,5	83	83,8
Glasspiegel:						
hinten belegt mit Silber	79,3	81,5	82,5	82,5	83,5	84,5
bis	85,7	86,6	88,2	88,1	89,1	89,6
hinten belegt mit Quecksilberamalgam	72,8	70,9	71,2	69,9	71,5	72,8

1) Die Zahlen sind bis auf die Werte für λ = 450 und 700 identisch t den für die Rosse'sche Legirung gleicher Zusammensetzung mitteilten. Sie sind besonders aufgeführt, da sie an Brashear'schen *iginal*spiegeln bestimmt wurden.

2) Vgl. Hugo Schröder, Centralzeitung f. Opt. u. Mech. **17.** p. 164 165. 1897.

3) Vgl. Hugo Schröder, l. c.

Aus den angegebenen Zahlen ergiebt sich, dass das Reflexionsvermögen der reinen Metalle im allgemeinen mit zunehmender Wellenlänge wächst; besonders deutlich geht dies aus den für Gold und Kupfer mitgeteilten Versuchsergebnissen hervor. Beide Metalle zeigen infolge ihrer gelben, bez. rötlichen Färbung ein sehr kleines Reflexionsvermögen für violette und blaue Strahlen, während dasselbe für rote Strahlen von der Wellenlänge 700 $\mu\mu$ bei dem Gold fast ebenso gross, wie das des Silbers wird. Eine Ausnahme von der oben angegebenen Regel bildet nur das Eisen (bez. Stahl), welches in Uebereinstimmung mit den seiner Zeit von Jamin berechneten und von Rubens mit Hülfe von Wärmestrahlungsversuchen gefundenen Werten ein Minimum des Reflexionsvermögens für $\lambda = 550$ $\mu\mu$ aufweist. Dieselbe Erscheinung zeigen übrigens auch eisenhaltige Legirungen, wie aus den für das Brandes & Schünemann'sche Spiegelmetall mitgeteilten Zahlen hervorzugehen scheint, und mit Quecksilberamalgam belegte Glasspiegel.

Interessant ist es, dass die ihrer Zusammensetzung nach zum Teil wesentlich voneinander verschiedenen, in der Tabelle angegebenen vier Spiegelmetalle von Rosse, Brashear und Schröder sämtlich fast genau die gleichen Reflexionsvermögen besitzen und sich darin von demjenigen des Nickels kaum unterscheiden.

Die von den Herren Brandes & Schünemann[1]) zusammengesetzte nickel- und eisenhaltige Spiegellegirung besitzt allerdings nur ein verhältnismässig geringes Reflexionsvermögen (47—55 Proc.), ist aber dafür in hohem Grade politurfähig, ungemein luftbeständig und chemischen Agentien gegenüber so widerstandsfähig, dass sie sich nur in Königswasser leicht löst. Auch eine wochenlange Aufbewahrung eines Spiegels in freier Luft, wobei derselbe dem Schnee und Regen ausgesetzt war, veränderte den Spiegel aus Brandes & Schünemann'scher Legirung nicht.

Was die Mach'schen Spiegelmetalle I, VII, XII anlangt, welche Aluminium und Magnesium in verschiedenen Mengenverhältnissen enthalten, so folgt aus den in der Tabelle mit-

1) Berlin SW., Teltower Str. 13.

geteilten Zahlen, dass diese Legirungen ein ausserordentlich hohes, von der Wellenlänge und, wie es scheint, auch von ihrer Zusammensetzung unabhängiges Reflexionsvermögen besitzen. Auf die relativ kleinen Unterschiede der Zahlen selbst einzugehen, empfiehlt sich nicht, da die Versuche zur Herstellung jener Legirungen damals noch nicht abgeschlossen waren, und die Spiegel, welche uns für die Untersuchung ihres Reflexionsvermögens von der Firma C. Zeiss zur Verfügung gestellt wurden, noch Unhomogenität des Materials aufwiesen und sich wohl auch infolge davon als nicht luftbeständig zeigten. Nach der unten citirten Mach'schen Veröffentlichung[1]) und einem uns später eingesandten Spiegel scheint indes dieser Uebelstand inzwischen im wesentlichen überwunden zu sein.

Die in der Tabelle mitgeteilten Daten für hinten mit Silber belegte Glasspiegel lassen erkennen, dass das Reflexionsvermögen von Silber an Glas wesentlich von der Art abhängt, in welcher es auf letzterem niedergeschlagen wurde. Es ist daher auch nicht möglich, aus dem Reflexionsvermögen von Silber an Luft und dem Brechungsexponenten des Glases das Reflexionsvermögen eines hinten versilberten Glasspiegels zu berechnen.

Die in der Tab. 3 auf p. 373 unter C. angegebenen Zahlen stellen gleichzeitig auch die Reflexionswerte von *Silber* bez. *Quecksilberamalgam an Glas* selbst dar, da der Einfluss der reflectirenden Vorderfläche *hinten* belegter Glasspiegel fast vollständig verschwindet, wie eine leicht durchführbare Rechnung ergiebt, wenn die Platte planparallel und vollkommen durchsichtig ist und die Incidenz senkrecht erfolgt.

Es erübrigt noch, zu bemerken, dass die von uns für das Reflexionsvermögen gefundenen Werte mit den von Hrn. Drude[2]) berechneten im allgemeinen gut übereinstimmen, sie sind aber durchgängig etwas grösser als die Zahlen der anderen Beobachter.

---

1) L. Mach, Ueber ein neues Spiegelmetall und dessen optische Untersuchung von Dr. V. Schumann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **108**. (IIa) Febr. 1899.

2) P. Drude, Wied. Ann. **39**. p. 481. 1890.

(Eingegangen 24. Januar 1900.)

13. *Ueber eine Dissymmetrie der Zeeman'schen normalen Triplets; von W. Voigt.*

Die Formeln, welche ich für die normalen Zeeman'schen Triplets durch eine einfache Erweiterung der Hertz-Drude'schen Gleichungen [1]) der anomalen Dispersion gewonnen hatte [2]), sind im allgemeinen Falle ziemlich complicirt, und ich habe mich demgemäss bei ihrer Discussion bisher auf eine erste Annäherung beschränkt, die immer dann zulässig ist, wenn die Absorption eine mässige, d. h. eine nicht-metallische, und die Zerlegung so stark ist, dass die Componenten der Triplets vollkommen, d. h. durch Streifen sehr geringer Absorption oder Emission getrennt sind. Die vollständige Uebereinstimmung der so erhaltenen Resultate mit den bisherigen Beobachtungen hat mich nun veranlasst, die Aussagen jener Formeln bei einer weiter getriebenen Annäherung zu untersuchen, um festzustellen, ob auch die von der Theorie geforderten feineren Details der Erscheinung der Wirklichkeit entsprechen. Die hierbei von mir gewonnenen theoretischen Resultate und ihre experimentelle Prüfung dnrch Hrn. Zeeman sollen im Folgenden besprochen werden.

1. Ich benutze die früheren Bezeichnungen, verstehe unter v die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume, unter o_1 und o_2 die complexen Geschwindigkeiten der parallel und der normal zu den Kraftlinien des Feldes polarisirten, dabei senkrecht zu

1) Hr. Drude hat mich darauf aufmerksam gemacht, dass bei einer einzelnen Gelegenheit (Wied. Ann. **67**. p. 297. 1899) von mir nur der Name von Hertz genannt worden ist. Ich spreche dieser Anregung folgend gern aus, dass dies ein Versehen meinerseits gewesen ist. Die Vergleichung der früheren Drude'schen Handhabung der elektromagnetischen Lichttheorie mit der nach Hertz's Vorschlag gewählten schien nur zu ergeben, dass die Hertz'sche Anregung eine *ganz fundamentale* gewesen ist. Unter diesem Eindruck habe ich bei dieser einen Gelegenheit versäumt, Hrn. Drude nochmals ausdrücklich zu nennen. Wie ferne mir lag, Hrn. Drude's Verdienst zu schmälern, ergiebt sich daraus, dass ich bei früheren und späteren Anwendungen der betreffenden Formeln (Wied. Ann. **67**. p. 345 und p. 367. 1899; Physik. Zeitschr. **1**. p. 140. 1899) seines Anteiles an denselben ausdrücklich gedacht habe.

2) W. Voigt, Wied. Ann. **67**. p. 345. 1899.

den Kraftlinien fortschreitenden ebenen Wellen, unter $2\pi\vartheta = \tau$ ihre Schwingungsperiode, unter ε_1, ϑ_1, ϑ_0, c dem Medium individuelle Constanten, von denen die ersten drei immer positiv sind, unter R die magnetische Feldstärke. Dann gilt für die complexen Brechungsindices ν in der Nähe des durch ϑ_1 und ϑ_0 charakterisirten Absorptionsstreifens

$$(1)\quad \nu_1^2 = \left(\frac{v}{o_1}\right)^2 = 1 + \frac{\varepsilon_1\,\Theta\,\vartheta^2}{\Theta^2 - \Phi^2} - \frac{\varepsilon_1^2\,\Phi^2\,\vartheta^4}{(\Theta^2 - \Phi^2)(\Theta^2 - \Phi^2 + \varepsilon_1\,\Theta\,\vartheta^2)},$$

$$(2)\quad \nu_2^2 = \left(\frac{v}{o_2}\right)^2 = 1 + \frac{\varepsilon_1\,\vartheta^2}{\Theta};$$

dabei ist abgekürzt gesetzt

$$(3)\quad \vartheta^2 + i\,\vartheta\,\vartheta_1 - \vartheta_0^2 = \Theta, \qquad c\,R\,\delta = \Phi.$$

Sind bei stets mässiger Absorption die Componenten des Triplets deutlich getrennt, so muss, wie früher gezeigt ist, in diesen Formeln $c\,R$ gross gegen ϑ_1 und wiederum ϑ_1 gross gegen $\varepsilon_1\,\vartheta_0$ sein; bei Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung ist dann das letzte Glied der Gleichung (1) fortzulassen, und die Formel nimmt die früher benutzte Gestalt an.

Ohne diese Vernachlässigung gestattet aber (1) die Umgestaltung in

$$(4)\quad \nu_1^2 = \frac{\Theta^2 - \Phi^2 + \varepsilon_1\,\vartheta^2(2\,\Theta + \varepsilon_1\,\vartheta^2)}{\Theta^2 - \Phi^2 + \varepsilon_1\,\Theta\,\vartheta^2} = 1 + \frac{\varepsilon_1\,\vartheta^2(\Theta + \varepsilon_1\,\vartheta^2)}{\Theta(\Theta + \varepsilon_1\,\vartheta^2) - \Phi^2};$$

setzt man hierin, wie früher,

$$(5)\quad \vartheta - \vartheta_0 = \delta$$

und vernachlässigt, was ganz unbedenklich ist, δ neben ϑ_0, kürzt auch $\varepsilon_1\,\vartheta_0$ in ξ ab, so erhält man

$$(6)\quad \nu_1^2 = 1 + \frac{\xi\,(2\,\delta + \xi + i\,\vartheta_1)}{(4\,\delta^2 + 2\,\delta\,\xi - \vartheta_1^2 - c^2 R^2) + i\,\vartheta_1(4\,\delta + \xi)}.$$

Bei der früher benutzten Annäherung geht dies in die Beziehung

$$\nu_1^2 = 1 + \frac{\varepsilon_1\,\vartheta_0\,(2\,\delta + i\,\vartheta_1)}{(4\,\delta^2 - c^2 R^2) + i\,4\,\delta\,\vartheta_1}$$

über, welche die Zerlegung des ursprünglich bei $\delta = 0$ liegenden Absorptionsstreifens in zwei unter sich gleiche und nahe bei $2\,\delta = \pm\,c\,R$ liegende ausdrückt.

Mit dieser letzten Gleichung verglichen zeigt die strengere Formel schon durch das in der ersten Klammer des Nenners auftretende in δ lineare Glied, dass selbst bei sehr kleinem ϑ_1

die entstehenden neuen Absorptionslinien nicht genau symmetrisch zu dem ursprünglichen liegen und deshalb auch nicht genau gleiche Intensität besitzen können.

2. Um dies weiter zu verfolgen, machen wir zunächst in Bezug auf die Grösse ϑ_1, die auf diese Dissymetrie nicht wesentlich einwirkt, die einfachste Annahme, setzen sie nämlich sowohl neben ξ, als auch neben dem benutzten Werte von $c R$ äusserst klein voraus. Dann werden die Absorptionslinien sehr fein und liegen merklich an denjenigen Stellen, an denen der Ausdruck für den complexen Brechungscoefficienten ν unstetig wird. Ihre Lage ist somit durch die Gleichung

$$4\,\delta^2 + 2\,\xi\,\delta - c^2 R^2 = 0$$

bestimmt, welche liefert

$$4\,\delta = -\,\xi \pm \sqrt{4\,c^2 R^2 + \xi^2} = -\,\xi \pm P; \tag{7}$$

hierbei ist P eine neue Bezeichnung.

Setzt man diesen Wert in die Gleichung (6) ein und zerlegt sie gemäss der allgemeinen Beziehung

$$\nu^2 = \left(\frac{v}{o}\right)^2 = \left(\frac{v\,(1 - i\,\varkappa)}{\omega}\right)^2 = n^2(1 - \varkappa^2) - 2\,n^2 i\,\varkappa, \tag{8}$$

worin ω die reelle Fortpflanzungsgeschwindigkeit, also n den reellen Brechungsindex bezeichnet, und $\varkappa$ der Absorptionsindex ist, so erhält man unter Weglassung des Index $_1$ an n und $\varkappa$

$$n^2(1 - \varkappa^2) = 1 + \frac{\xi\,(P \pm \xi)}{2\,P^2}. \tag{9}$$

$$2\,n^2 \varkappa = \frac{\xi\,(P \mp \xi)}{2\,\vartheta_1\,P}, \tag{10}$$

Bezeichnet man die dem oberen und die dem unteren Vorzeichen der Wurzelgrösse entsprechenden Werte von δ, n, $\varkappa$ durch die Indices $'$ und $''$, so sagen diese Formeln folgendes aus: δ' beginnt bei verschwindender Feldstärke R mit dem Wert Null und nähert sich bei wachsendem R allmählich dem Wert $\frac{1}{2} c R - \frac{1}{4}\xi$; δ'' beginnt mit $-\frac{1}{2}\xi$ und nähert sich $-\frac{1}{2} c R - \frac{1}{4}\xi$.

Der Ausgangswert $\delta' = 0$ liefert den ursprünglichen Absorptionsstreifen, denn ihm entspricht $2\,n'^2 \varkappa' = \xi / \vartheta_1$; der Ausgangswert $\delta'' = -\frac{1}{2}\xi$ liefert dagegen *keinen* Absorptionsstreifen — oder, wie im Interesse der Continuität besser ge-

sagt wird, einen Streifen von verschwindender Intensität, denn ihm entspricht nach (10) der Wert $2n''^2\varkappa'' = 0$. Mit wachsender Feldstärke R nimmt der δ' zugehörige Streifen an Intensität bis auf die Hälfte ab, der δ'' zugehörige bis auf die letztere Stärke zu. Bei erheblichem R sind also beide Streifen gleich stark und liegen merklich symmetrisch zum ursprünglichen.

In Fig. 1 ist durch die drei stark gezeichneten Curven für ein positives ε_1 die Veränderung des Triplets mit wachsender Feldstärke dargestellt; die Stärke der Curven deutet auf die veränderlichen Intensitäten der Absorptionen hin.

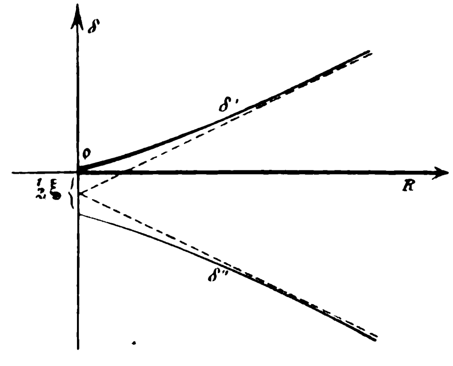


Fig. 1.

Hiernach verhält sich, soweit die vorstehend benutzte Annäherung zulässig ist, bei kleineren Feldstärken das Duplet der *linear*polarisirten Componenten des *transversalen* Zeemaneffectes durchaus anders, als das Duplet der *circular*polarisirten Componenten des *longitudinalen* Effectes. Das letztere entsteht durch eine symmetrische Zerlegung einer Absorptionslinie in zwei Componenten von unveränderlicher Intensität, das erstere streng genommen überhaupt nicht durch Zerlegung, sondern durch Auftauchen eines neuen Absorptionsstreifens in der Nachbarschaft des ursprünglichen, der bei wachsender Feldstärke an Stärke zunimmt, während der ursprüngliche daran verliert, und beide symmetrisch zu ihrer ursprünglichen Mitte auseinanderrücken.

Betrachtet man die Constante ε_1, wie gewöhnlich, als positiv, so taucht der neue Absorptionsstreifen auf der *negativen* Seite von δ auf, die wegen (5) nach dem *violetten* Ende

des Spectrums hinliegt. Die Beobachtung müsste in diesem Falle — wenn $\xi = \varepsilon_1 \vartheta_0$ überhaupt einen merklichen Betrag hat — ergeben, dass das normal zu den Kraftlinien wahrnehmbare Duplet der parallel zu R polarisirten Componenten bei kleinen Feldstärken in der Weise unsymmetrisch ist, dass *die nach Rot liegende Componente die grössere Intensität, die nach Violett hin liegende aber den grösseren Abstand von der ursprünglichen Absorptionslinie besitzt.*

Die Unsymmetrie der Intensitäten wird dabei wegen der nicht vollkommenen Schärfe der Linien meist auffallender sein, als die Unsymmetrie der Abstände.

Ueberdies ist folgendes zu bedenken: um die *Intensitäten* der äusseren Linien des Triplets zu vergleichen, kann man die mittlere durch einen Nicol beseitigen und braucht auch die äusseren Linien nur unvollkommen zu trennen; um die *Lagen* der äusseren Linien gegen die inneren zu bestimmen, wird man die mittlere kaum beseitigen dürfen und muss jedenfalls die Trennung weiter treiben. Da aber die ganze Dissymmetrie mit wachsender Feldstärke sehr schnell verschwindet, so wird die letztere Beobachtung unter ungünstigeren Umständen stattfinden, wie die erstere. Ein anderer, in gleichem Sinne wirkender Umstand kommt weiter unten zur Sprache.

3. Bei der Unsicherheit über die numerischen Werte der für die einzelnen Absorptionslinien eines Dampfspectrums charakteristischen Constanten wird man sich von der vorstehenden, angenäherten Betrachtungsweise, die wesentlich auf der Annahme einer geringen Grösse der Verhältnisse ϑ_1 / ξ und $\vartheta_1 / c R$ beruht, nicht ganz befriedigt finden. Auch wird man eine Discussion für ungenügend halten, die nicht an den theoretischen Wert des für die beobachtbare Absorption in letzter Instanz allein maassgebenden Productes $n \varkappa$ anknüpft. Eine solche Discussion bietet aber wegen des sehr complicirten Ausdruckes, den die Theorie für $n \varkappa$ liefert, grosse Schwierigkeiten. Um in einem nicht (wie oben eingeführt) extremen Falle die strengen Gesetze der Erscheinung zu erkennen, bleibt sonach kaum etwas anderes übrig, als die numerische Berechnung der sie darstellenden Curven.

Eine solche macht nun in der That nicht allzuviel Mühe.

etzt man nämlich in dem Ausdruck für den complexen rechungsindex ν, der die Form hat

$$(11) \qquad \nu^2 = \frac{p + i q}{r + i s},$$

r die reellen Grössen p, q, r, s die Ausdrücke

$$(12) \qquad \begin{cases} p = F^2 \cos 2f, & q = F^2 \sin 2f, \\ r = G^2 \cos 2g, & s = G^2 \sin 2g, \end{cases}$$

erhält man zunächst wegen (8)

$$(13) \quad n^2(1 - \varkappa^2) = \left(\frac{F}{G}\right)^2 \cos 2(g - f), \quad 2 n^2 \varkappa = \left(\frac{F}{G}\right)^2 \sin 2(g - f),$$

nd hieraus auch

$$(14) \qquad n = \frac{F}{G} \cos(g - f), \qquad n \varkappa = \frac{F}{G} \sin(g - f).$$

Aus (6) folgt dabei für ν_1:

$$(15) \begin{cases} p_1 = 4\delta^2 + 4\delta\xi + \xi^2 - \vartheta_1^2 - c^2 R^2, & q_1 = \vartheta_1 (4\delta + 2\xi), \\ r_1 = 4\delta^2 + 2\delta\xi - \vartheta_1^2 - c^2 R^2, & s_1 = \vartheta_1 (4\delta + \xi); \end{cases}$$

aus (2) ebenso für ν_2:

$$(16) \qquad p_2 = 2\delta + \xi, \quad q_2 = \vartheta_1, \quad r_2 = 2\delta, \quad s_2 = \vartheta_1.$$

Ich habe mit dem Wertsystem $\xi = 1$, $cR = 1$, $\vartheta_1 = 0{,}1$ — bei welchem nach der Gestalt der Gleichungen (11), (15), (16) die Einheiten willkürlich sind — sowohl die Werte von $n^2(1 - \varkappa^2)$ und $2 n^2 \varkappa$, als auch die von n und $n \varkappa$ für *beide* normal zu den Kraftlinien des Magnetfeldes fortgepflanzte Wellen berechnet und ihren Verlauf in den Figg. 2 und 3 durch Construction veranschaulicht. In *beiden* Figuren entspricht dem Zuwachs der Unabhängigen δ von 0,1 eine Strecke von 2 mm, einem Zuwachs der Abhängigen von 1,00 in Fig. 2 eine Strecke der 5 mm, in Fig. 3 eine solche von 10 mm. Der Maassstab für die Abscisse ist also in beiden Figuren gleich, derjenige der Ordinate in Fig. 3 doppelt so gross, als in Fig. 2.

Die Curven für die parallel zu den Kraftlinien polarisirte Welle (1) sind *ausgezogen*, die für die normal zu den Kraftlinien polarisirte (2) *punktirt*; da letztere Welle bei den von uns vorausgesetzten normalen Triplets durch die Einwirkung des Magnetfeldes nicht verändert wird, so stellen die punk-

tirten Curven zugleich die für die Welle (1) *vor* Erregung des Feldes geltenden Gesetze dar, und die Vergleichung der ausgezogenen mit den punktirten Curven giebt Aufschluss über die durch das Feld bewirkte Veränderung. Die Nebeneinanderstellung der Curven für $n^2(1 - x^2)$ und n einerseits, diejenigen für $2n^2x$ und nx andererseits gewährt ein Urteil darüber, bis

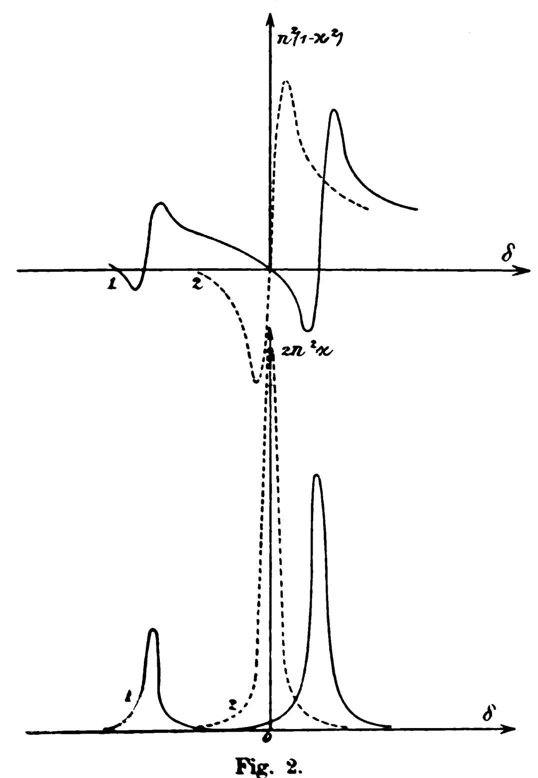


Fig. 2.

zu welcher Annäherung man durch Discussion der bequemeren Ausdrücke $n^2(1 - x^2)$ und $2n^2x$ auf das Verhalten von n und nx schliessen kann.

Um zunächst bei dem letzteren Punkte zu bleiben, so verlaufen nach den Figuren die Curvenzüge für $n^2(1 - x^2)$ und n, für $2n^2x$ und nx im grossen und ganzen gleichartig; sie haben z. B. ihre Maxima und Minima an fast genau denselben Stellen. Dagegen sind aber nicht nur die absoluten Grössen ihrer Ordinaten vollständig verschieden — was noch greller hervortreten

würde, wenn nicht Fig. 2 des Raumes wegen mit halben Ordinateneinheiten gezeichnet wäre — es treten auch im einzelnen wesentliche Verschiedenheiten der Gestaltung hervor. Zu einer Beurteilung der feineren Details sind also unter den bei der Berechnung vorausgesetzten Umständen (insbesondere sehr starken Absorptionen) die Curven der Fig. 2 unbrauchbar.

Was nun die uns besonders beschäftigende Frage der Unsymmetrie der Triplets angeht, so wird diese durch die

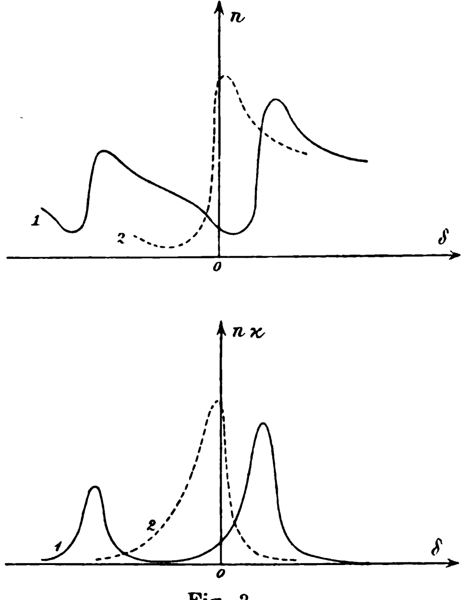


Fig. 3.

unteren Curven in Fig. 3 höchst anschaulich gemacht. Es kann hiernach kein Zweifel sein, dass die oben in Annäherung durchgeführte Discussion der allgemeinen Formeln qualitativ das Richtige liefert. Jene Curven zeigen aber noch Weiteres und für die Verwertung von Beobachtungen Wichtiges.

Es sind oben bereits einige Gründe dafür angeführt, dass die Unsymmetrie der Lage oft weniger auffallend sein dürfte, als die der Intensität. Die untere Fig. 3 ergiebt einen weiteren Grund hierfür. Nach dem Verlauf der punktirten Curve ebenda erstreckt sich *vor* der Einwirkung des Magnetfeldes die Absorption von der Stelle $\delta = 0$, auf die unsere Formeln

den ganzen Vorgang beziehen, erheblich weiter nach der negativen, als nach der positiven Seite; die Mitte des Absorptionsstreifens entspricht sonach nicht einem verschwindenden, sondern einem kleinen negativen δ. Wenn also auch nach p. 379 die Theorie $-\delta''$ grösser ergiebt, als δ', so wird ein Teil dieser Dissymmetrie durch die Dissymmetrie des ursprünglichen Absorptionsstreifen (der nach p. 382 mit dem der Welle (2) zusammenfällt) compensirt.

4. Man möchte zunächst glauben, dass die Beobachtung der im Vorstehenden beschriebenen äusserst feinen Erscheinung eine Entscheidung zwischen den verschiedenen, für die magnetooptischen Wirkungen, insbesondere für den inversen Zeemaneffect, aufgestellten Erklärungssystemen liefern könnte. Dem ist indessen nicht so. Für Absorptionslinien, die soweit voneinander entfernt sind, dass ihr Abstand gross ist gegen die Entfernung der Componenten eines jeden Duplets und Triplets, liefern die mir bekannten Theorien fast identische Resultate.

Trotzdem erschien mir der experimentelle Nachweis der von der Theorie geforderten Thatsachen grosses Interesse zu bieten. Die von Hrn. Lorentz entwickelten Gesetze der einfachsten Ionenbewegungen liefern bekanntlich im Magnetfelde aus der allgemein *elliptischen* Schwingung von einer Periode τ zwei entgegengesetzt rotirende *kreisförmige* von gleicher Intensität und von den Perioden $\tau \pm k R$, wo k eine Constante bezeichnet, in der Ebene normal zu den Kraftlinien und eine den Kraftlinien parallele *lineare* von der ursprünglichen Periode τ. Das bei dem directen longitudinalen Effect beobachtete Duplet und die äussern Componenten des beim directen transversalen Effect wahrgenommenen Triplets werden gleichmässig als die unmittelbaren Wirkungen der ersteren Schwingungen aufgefasst und beiden werden demgemäss die gleichen Perioden beigelegt. Es erscheint also vom Standpunkte der Ionentheorie im höchsten Grade auffallend, dass durch die Einführung der Wechselwirkung zwischen den Ionen und dem Aether der inverse Vorgang in der Weise verändert werden kann, wie oben auseinandergesetzt ist, — dass nämlich bei kleinen Feldstärken die Perioden der Componenten der Duplets einerseits, die der äusseren Componenten der Triplets andererseits sehr merklich verschieden ausfallen, und die Intensitäten der letzteren, nicht

aber die der ersteren, verschiedene Grösse besitzen. Nach dem Kirchhoff'schen Gesetz über die Proportionalität von Emissions- und Absorptionsvermögen wird man aber schliessen müssen, dass die *directen* Effecte sich ebenso verhalten, und die unmittelbare Anschauung lässt es auch plausibel erscheinen, dass sie durch die Wechselwirkung zwischen Ionen und Aether verändert werden müssen, wenn Gleiches von den inversen gilt.

Vom Standpunkt der von mir vertretenen Theorie, die nicht die specielle Hypothese der Ionen benutzt, bietet zwar jene Verschiedenheit der Perioden und Intensitäten der Vorstellung vielleicht geringere Schwierigkeit, aber sie erscheint immerhin eines experimentellen Nachweises dringend bedürftig.

Nach dem p. 380 Gesagten ist eine wahrnehmbare Grösse der Unsymmetrie der Zeeman'schen Triplets bei den *schwächsten* Feldern, die eben noch eine Zerlegung bewirken, am ersten zu erwarten. Unter solchen Umständen ist bisher naturgemäss nicht eben viel beobachtet worden. Hr. Michelson[1]) hat zwar mit seinem Interferometer in einigen Fällen den ganzen Verlauf der Zerlegung von kleinen bis zu grossen Feldstärken verfolgt, aber bei diesem Instrument werden die Intensitätscurven nicht direct wahrgenommen, sondern aus anderen Beobachtungen unter der ausdrücklichen und zur Bestimmung des Problemes nötigen Annahme eines zur Mitte des ursprünglichen Absorptionsstreifens *symmetrischen* Verlaufes berechnet. Die so erhaltenen Resultate sind natürlich für die hier angeregte Frage unbrauchbar. Es erschien sonach die Anstellung neuer Beobachtungen als notwendig.

Da das dem hiesigen Institute gehörige Rowland'sche Gitter nur eine geringe zerlegende Kraft besitzt, und da über die vorliegende Frage nur durch Anwendung sehr starker Dispersion eine experimentelle Entscheidung zu erwarten ist, so wandte ich mich an Hrn. Zeeman in Amsterdam mit der Bitte, mit den ihm zur Verfügung stehenden kräftigeren optischen Mitteln und bei so geringer Feldstärke, dass die Zerlegung nur eben wahrnehmbar wäre, einige normale Triplets auf eine Unsymmetrie ihrer äusseren Componenten hin zu untersuchen. Ich teilte ihm mit, dass die Theorie eine *grössere*

1) A. Michelson, Phil. Mag. (5) **44.** p. 109. 1897.

Dissymmetrie der Intensität, eine *kleinere* der Lage erwarten liesse, ohne indessen den *Sinn* derselben anzugeben.

Hr. Zeeman war so freundlich, auf meine Anregung hin zunächst schon vorhandene, senkrecht zu den Kraftlinien und zwar bei schwachen Feldern aufgenommene Negative des directen Phänomens im Eisenspectrum zu durchmustern, und er fand, dass an ihnen wirklich kleine Differenzen in der Lichtstärke der äusseren Componenten der Triplets wahrnehmbar wären. *Die nach Rot hin liegende Componente,* schrieb er mir, *sei die stärkere.*

Nachdem so durch eine ganz unbefangene Beobachtung die eine Hälfte des p. 380 ausgesprochenen theoretischen Resultates bestätigt worden war, teilte ich Hrn. Zeeman auch die andere Hälfte desselben, den Sinn der Dissymmetrie der Lage mit. Hr. Zeeman hat dann durch weitere, mit besonders schwachen Feldern aufgenommene Negative die Unsymmetrie der Intensität noch deutlicher gemacht, sodass er sie als verbürgt betrachtet; die Unsymmetrie der Lage konnte er nur bei einzelnen Linien auffinden, dort aber in dem von der Theorie geforderten Sinne, dass *der Abstand der nach Violett hin liegenden Componente von der mittleren grösser ist, als derjenige der nach Rot hin liegenden.* Der abschliessende Bericht des Hrn. Zeeman über seine Beobachtungen lautet folgendermaassen:

„Ueber die so interessanten von Ihnen aus der Theorie vorhergesagten Resultate, nämlich die *Unsymmetrie der Intensitäten* und die *der Entfernungen* bei den Triplets habe ich beim Eisen Versuche angestellt und, wie ich glaube, mit positivem Erfolg. Schon früher hatte ich nach einer Dissymmetrie der Intensitäten gesucht, aber ich glaubte damals nachgewiesen zu haben, dass die vorhandenen Dissymmetrien auf Störungen verschiedener Art zurückzuführen waren."

„Ich finde aber jetzt, dass bei vielen und namentlich bei aus feinen Linien bestehenden Triplets eine äusserst schwache *Dissymmetrie der Intensität* besteht, und zwar, dass dabei in dem Sinne der Theorie die stärkere Componente nach Rot liegt. Es wurde dies constatirt auf Negativen, die im Spectrum der 2. und 3. Ordnung mit Hülfe eines neuen Rowland'schen

Gitters gemacht waren. Das Gebiet der Wellenlängen lag dabei zwischen 3400 und 3900 Ångström-Einheiten. Die benutzte Feldstärke war etwas, aber nicht viel, geringer als die früher von mir benutzte und mag dadurch charakterisirt sein, dass etwa zwei Drittel der Linien vom magnetischen Felde in verschiedenen Graden in ihren Componenten getrennt waren. Bei noch geringerer Feldstärke waren aus verschiedenen Gründen die Resultate nicht unzweideutig. Die Spaltbreite konnte, da das Gitter ausgezeichnet war, kleiner, als früher genommen werden."

„Ich glaube wohl, dass die Unsymmetrie der Intensitäten verbürgt ist, aber bei einem so schwachen Phänomen kann man sich nur darüber freuen, wenn noch durch andere Gründe etwaige Zweifel an der Realität aufgehoben werden. Das geschieht nun im vorliegenden Falle wohl durch die Bestätigung des zweiten der von Ihnen gegebenen Resultate. Bei verschiedenen Eisenlinien kann man wohl nicht an der Anwesenheit der *Dissymmetrie der Entfernungen* zweifeln. Messungen sind noch im Gange. Ein messbarer Unterschied der Abstände der Componenten vom ursprünglichen Streifen findet sich z. B. bei den Linien 3687,6, 3709,4 und 3878,71. Dabei hat die nach Violett liegende Componente den grösseren Abstand von dem ursprünglichen Streifen, also ganz, wie von Ihnen vorher gesagt wurde. Ich habe auch versucht, im Spectrum der ersten Ordnung die Dissymmetrie direct zu beobachten. Obwohl ich bisweilen glaubte, die Erscheinung zu sehen, so ist mir das doch nicht sicher gelungen. Unter etwas veränderten Bedingungen will ich die Beobachtung noch einmal wiederholen."

Soweit der Bericht des Hrn. Zeeman. Ich möchte an die in ihm enthaltenen Resultate noch eine allgemeine Bemerkung anschliessen.

Die Unsymmetrie der Zeeman'schen Triplets ist als durch die Beobachtung verbürgt anzusehen, aber sie ist selbst in dem günstigsten Falle schwacher Zerlegung *sehr gering.* Eine Discussion der allgemeinen Formel (6) zeigt nun, dass aus der letzteren Thatsache ein gegen cR sehr kleiner Wert von ξ folgt; da aber nach derselben Formel bei eben beginnender Zerlegung cR nur wenig grösser, als ϑ_1 sein kann, so ergiebt sich — zunächst für Eisendampf — dass ξ auch klein gegen ϑ_1

ist, und man darf mit grosser Wahrscheinlichkeit annehmen, dass dies Verhältnis auch bei anderen Dämpfen stattfindet.

Dies Resultat ist deshalb von Wichtigkeit, weil daraus folgen würde [1], dass auch in dem dunkelsten Teile der Absorptionslinien der Absorptionsindex $\varkappa$ eine gegen Eins kleine Grösse ist. Diese letztere Annahme habe ich bei früheren Anwendungen meiner Formeln im Interesse der Vereinfachung aus Plausibilitätsgründen eingeführt [2]; es schien mir *unwahrscheinlich*, dass z. B. eine Na-Flamme in einer Schicht von wenigen Wellenlängen Dicke Na-Licht merklich absorbirte, aber schlagende Gründe gegen die Möglichkeit konnte ich nicht angeben.

Die ausserordentliche Schwäche der Dissymmetrie der Zeeman'schen Triplets giebt nun der früher gemachten Annahme eine willkommene Stütze, und ich möchte hierauf hinweisen, wenngleich jene Annahme nur für vereinzelte Folgerungen aus den allgemeinen Gleichungen wesentliche Bedeutung besitzt.

Göttingen, im December 1899.

(Eingegangen 23. December 1899.)

Zusatz bei der Correctur. Während des Satzes des vorstehenden Artikels ist die ausführliche Beschreibung der Beobachtungen des Hrn. Zeeman [3]) erschienen. Aus derselben geht hervor, dass Hr. Zeeman eine Dissymmetrie der oben beschriebenen Art nicht nur bei den Triplets, sondern auch bei den Quadruplets gefunden hat. Dies ist in vollständiger Uebereinstimmung mit den von mir für die Quadruplets aufgestellten Formeln [4]; denn letztere ergeben für die *normal* zu den Kraftlinien polarisirten Componenten ein symmetrisches, für die *parallel* polarisirten das oben beschriebene unsymmetrische Verhalten.

Göttingen, 4. Februar.

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. **69**. p. 291. 1899.

2) W. Voigt, Wied. Ann. **67**. p. 351. 1899; ebenso H. A. Lorentz, Proc. Kon. Ak. van Wet. Amsterdam, 24. Juni 1899.

3) P. Zeeman, Proc. Kon. Ak. van Wet. Amsterdam, 30. Dec. 1899.

4) W. Voigt, Wied. Ann. **68**. p. 3[illegible] 1899.

4. *Weiteres zur Theorie der magneto-optischen Wirkungen; von W. Voigt.*

Das von mir aufgestellte Erklärungssystem [1]) der magneto-
›tischen Erscheinungen ist in meinen früheren Arbeiten fast
lein auf die beiden Hauptfälle der Fortpflanzung ebener
'ellen *parallel* und *normal* zu den magnetischen Kraftlinien
ıgewendet worden. Nachdem aber die hierfür gewonnenen
esultate sich in vollständiger Uebereinstimmung mit der Er-
hrung erwiesen haben, erscheint es zeitgemäss, *den allge-
einen Fall einer beliebigen Fortpflanzungsrichtung* zu behandeln.
ie Ergebnisse dieser Untersuchung sind im Folgenden,
ıter Weglassung der meist etwas umständlichen, aber durch-
ıs elementaren Zwischenrechnungen mitgeteilt. Die strengen
ndformeln sind im allgemeinen überaus complicirt; die Dis-
ıssion ist daher allein in den beiden praktisch wichtigsten
ällen vorgenommen, dass die untersuchte Farbe entweder
nem Spectralgebiet nahezu verschwindender Absorption zu-
›hört oder aber einem scharfen Absorptionsstreifen sehr nahe
egt. Im ersten Falle resultiren Formeln für eine Art ver-
lgemeinerten Faradayeffectes, im letzten solche für den all-
›meinen inversen Zeemaneffect. Die letzteren Gleichungen
ssen sich auch auf die *Absorptionsstreifen selbst* anwenden
ıd liefern dadurch unter Voraussetzung der Gültigkeit des
.irchhoff'schen Satzes die Gesetze des *directen* Zeeman-
fectes bei beliebigen Fortpflanzungsrichtungen, der meines
/issens bisher experimentell noch nicht untersucht worden ist.

1. Wir gehen aus von den früher aufgestellten allgemeinen
›ifferentialgleichungen[2]), welche ein Coordinatensystem voraus-
›tzen, dessen Z-Axe mit der Richtung der magnetischen Feld-
ärke R zusammenfällt, und betrachten eine ebene Welle, die
ch senkrecht zur Y-Axe in einem Winkel φ gegen die Rich-
ıng der magnetischen Feldstärke R fortpflanzt. Es hängt

1) W. Voigt, Wied. Ann. 67. p. 345. 1899.
2) W. Voigt, l. c. Gleichungen (2), (5) und (6).

dann die Erscheinung nur von der einen Coordinate, b— der Wellennormalen $l = \alpha x + \gamma z$ ab, wobei $\sin \varphi = \alpha$, $\cos \varphi =$ gesetzt ist. Führen wir ein Coordinatensystem L, Y, S e— dessen L-Axe mit der Wellennormalen zusammenfällt, und ve— stehen unter L, Y, S die Componenten der elektrischen Kraft K unter $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{S}$ die der elektrischen Polarisation $\mathfrak{K}$, unter $\mathfrak{L}_h$, $\mathfrak{Y}_h$, $\mathfrak{S}_h$ die Componenten der elektrischen Hülfsvectoren $\mathfrak{K}_h$ nach dessen Axen, so nehmen die Gleichungen des Vorganges die folgende Gestalt an

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{S}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 S}{\partial l^2}, \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial l^2},$$

$$(2) \qquad \mathfrak{L} = L + \Sigma \mathfrak{L}_h, \quad \mathfrak{S} = S + \Sigma \mathfrak{S}_h, \quad \mathfrak{Y} = Y + \Sigma \mathfrak{Y}_h,$$

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}_h + a_h \dfrac{d \mathfrak{L}_h}{d t} + b_h \dfrac{d^2 \mathfrak{L}_h}{d t^2} + c_h R \alpha \dfrac{d \mathfrak{Y}_h}{d t} = \varepsilon_h L, \\ \mathfrak{S}_h + a_h \dfrac{d \mathfrak{S}_h}{d t} + b_h \dfrac{d^2 \mathfrak{S}_h}{d t^2} - c_h R \gamma \dfrac{d \mathfrak{Y}_h}{d t} = \varepsilon_h S, \\ \mathfrak{Y}_h + a_h \dfrac{d \mathfrak{Y}_h}{d t} + b_h \dfrac{d^2 \mathfrak{Y}_h}{d t^2} - c_h R \left(\alpha \dfrac{d \mathfrak{L}_h}{d t} - \gamma \dfrac{d \mathfrak{S}_h}{d t} \right) = \varepsilon_h Y. \end{cases}$$

Hierin bezeichnet v die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume, a_h, b_h, c_h, ε_h sind dem betrachteten Körper individuelle Constanten, von denen a_h, b_h, ε_h stets positiv sind. $a_h = \vartheta'_h$, $b_h = \vartheta_h^{0\,2}$ bestimmen dabei gewisse, dem Absorptionsspectrum des Körpers charakteristische Perioden.

Nehmen wir zur Rechnung mit complexen Lösungen sämtliche Abhängige mit

$$e^{i(t - l/o)/\vartheta}$$

proportional an, wobei o die complexe Geschwindigkeit und $2 \pi \vartheta = \tau$ die Schwingungsperiode bedeutet, und kürzen ab

$$(4) \qquad \vartheta^2 + i \vartheta'_h \vartheta - \vartheta_h^{0\,2} = \Theta_h, \quad c_h R \vartheta = \Phi_h, \quad \varepsilon_h \vartheta^2 = \eta_h.$$

so erhält man aus (3)

$$(5) \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}_h \Theta_h + i \alpha \Phi_h \mathfrak{Y}_h = \eta_h L, \\ \mathfrak{S}_h \Theta_h - i \gamma \Phi_h \mathfrak{Y}_h = \eta_h S, \\ \mathfrak{Y}_h \Theta_h - i \Phi_h (\alpha \mathfrak{L}_h - \gamma \mathfrak{S}_h) = \eta_h Y. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind nach $\mathfrak{L}_h$, $\mathfrak{S}_h$, $\mathfrak{Y}_h$ aufzulösen und die Resultate darauf in (2) einzusetzen. Führt man hierzu noch die weiteren Abkürzungen

$$(6)\quad \begin{cases} 1 + \sum\limits_h \dfrac{\eta_h \Theta_h}{\Theta_h^2 - \Phi_h^2} = \mu, \quad \sum\limits_h \dfrac{\eta_h \Phi_h}{\Theta_h^2 - \Phi_h^2} = \sigma, \\ \sum\limits_h \dfrac{\eta_h \Phi_h^2}{\Theta_h (\Theta_h^2 - \Phi_h^2)} = \varrho \end{cases}$$

ein, so lautet das Resultat

$$(7)\quad \begin{cases} \mathfrak{L} = (\mu - \gamma^2 \varrho) L - \alpha \gamma \varrho S - i \alpha \sigma Y, \\ \mathfrak{S} = -\alpha \gamma \varrho L + (\mu - \alpha^2 \varrho) S + i \gamma \sigma Y, \\ \mathfrak{Y} = i \alpha \sigma L - i \gamma \sigma S + \mu Y. \end{cases}$$

Beim Einsetzen dieser Werte in (1) resultirt schliesslich, falls noch der complexe Brechungsindex

$$(8)\quad \frac{v}{o} = \nu$$

eingeführt wird,

$$(9)\quad \begin{cases} 0 = (\mu - \gamma^2 \varrho) L - \alpha \gamma \varrho S - i \alpha \sigma Y, \\ 0 = -\alpha \gamma \varrho L + (\mu - \nu^2 - \alpha^2 \varrho) S + i \gamma \sigma Y, \\ 0 = i \alpha \sigma L - i \gamma \sigma S + (\mu - \nu^2) Y. \end{cases}$$

Aus diesem System bestimmt sich einerseits ν, andererseits das Verhältnis der Componenten L, S, Y; wir wollen beide Grössen gesondert der Untersuchung unterwerfen.

2. Die Gleichung für ν erhält man durch Elimination von $L:S:Y$ nach einigen Reductionen zunächst in der Form

$$(10)\quad \begin{cases} 0 = \nu^4 (\mu - \gamma^2 \varrho) - \nu^2 \big((1 + \gamma^2) \mu (\mu - \varrho) + \alpha^2 (\mu^2 - \sigma^2)\big) \\ \qquad + (\mu - \varrho)(\mu^2 - \sigma^2); \end{cases}$$

woraus folgt

$$(11)\quad \begin{cases} 2 \nu^2 (\mu - \gamma^2 \varrho) = 2 \mu^2 - \mu \varrho (1 + \gamma^2) - \alpha^2 \sigma^2 \\ \qquad \pm \sqrt{4 \sigma^2 \gamma^2 (\mu - \varrho)^2 + \alpha^4 (\mu \varrho - \sigma^2)^2}. \end{cases}$$

Für die Discussion dieses complicirten Ausdruckes beschränken wir uns, wie im Eingange gesagt, auf zwei specielle Fälle von besonderer Wichtigkeit.

In Bereichen verschwindender Absorption des Mediums ist Θ_h reell und sehr gross gegen Φ_h. Hier können wir demgemäss, bei Vernachlässigung der Glieder von höherer Ordnung als $\eta_h \Phi_h^2 / \Theta_h^3$, in *zweiter* Annäherung setzen

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} \mu_a &= 1 + \sum \frac{\eta_h}{\Theta_h} + \sum \frac{\eta_h \Phi_h^2}{\Theta_h^3}, \quad \sigma_a = \sum \frac{\eta_h \Phi_h}{\Theta_h^2}, \\ \varrho_a &= \sum \frac{\eta_h \Phi_h^2}{\Theta_h^3}, \end{aligned} \right.$$

wobei der Index a die eingeführte Annäherung andeutet; zugleich ist ν mit dem reellen Brechungscoefficienten n identisch, und es wird leicht ersichtlicher Weise

$$(13)\qquad \mu_a = n_0^2 + \varrho_a,$$

falls n_0 den Wert von n ausserhalb des Magnetfeldes bezeichnet.

Die Gleichung (11) für ν^2 liefert demgemäss innerhalb obiger Genauigkeit

$$(14)\qquad n^2 = \frac{1}{2}\left(2n_0^2 + (1+\gamma^2)\varrho_a - \frac{\alpha^2 \sigma_a^2}{n_0^2}\right) \pm \sigma_a \gamma,$$

und in erster Annäherung das bekannte „Cosinusgesetz“:

$$(15)\qquad n^2 = n_0^2 \pm \sigma_a \gamma. -$$

In der unmittelbaren Umgebung eines scharfen Absorptionsstreifens hat von den Summen in (6) nur allein je das auf jenen einen Streifen (1) bezügliche Glied einen beträchtlichen Wert. Dort ist sonach

$$(16)\qquad \mu = 1 + \frac{\eta\,\Theta}{\Theta^2 - \Phi^2}, \quad \sigma = \frac{\eta\,\Phi}{\Theta^2 - \Phi^2}, \quad \varrho = \frac{\Phi}{\Theta}\,\sigma,$$

$$(17)\qquad \Theta = \vartheta^2 + i\vartheta_1\vartheta - \vartheta_0^2, \quad \Phi = c_1 R \vartheta, \quad \eta = \varepsilon_1 \vartheta^2,$$

wobei ϑ_1, ϑ_0, ε_1, c_1 sich auf den bestimmten Absorptionsstreifen (1) beziehen.

Hiernach folgt aus (11) für ν^2 die Formel

$$(18)\qquad \nu^2 = 1 + \eta\,\frac{2\,\Theta(\Theta+\eta) - \alpha^2\Phi^2 \pm \Phi\sqrt{4\gamma^2(\Theta+\eta)^2 + \alpha^4\Phi^2}}{2\left((\Theta^2 - \Phi^2)\,\Theta + (\Theta^2 - \gamma^2\Phi^2)\,\eta\right)},$$

die freilich im allgemeinen immer noch sehr unübersichtlich ist.

Nehmen wir zur Vereinfachung ϑ_1 als klein neben $c_1 R$, also $\vartheta\vartheta_1$ als klein neben Φ an, so liegen die Absorptionslinien nahe bei den Werten ϑ_1, für welche bei verschwindendem ϑ_1 der Nenner durch Null geht. Setzen wir den Wert

von Θ bei verschwindendem ϑ_1 gleich Θ_0, so lautet hiernach die Bedingung, welche die Absorptionslinien bestimmt,

$$(19) \qquad \Theta_0^2(\Theta_0 + \eta) - \Phi^2\,\Theta_0 - \gamma^2\,\Phi^2\,\eta = 0.$$

Zur angenäherten Behandlung dieser cubischen Gleichung nehmen wir auch η als klein neben Φ an und benutzen, dass für verschwindendes γ ihre Wurzeln sind:

$$\Theta_0' = -\Phi - \tfrac{1}{2}\eta, \quad \Theta_0'' = 0, \quad \Theta_0''' = +\Phi - \tfrac{1}{2}\eta.$$

Wir können sonach im allgemeinen Falle

$$\Theta_0' = -\Phi - \tfrac{1}{2}\eta + \xi', \quad \Theta_0' = \xi'', \quad \Theta_0''' = +\Phi - \tfrac{1}{2}\eta + \xi'''$$

setzen und alle ξ als klein neben Φ betrachten. Dann resultirt das System von Werten

$$\xi' = +\tfrac{1}{2}\gamma\,\eta^2, \quad \xi'' = -\eta\,\gamma^2, \quad \xi''' = +\tfrac{1}{2}\eta\,\gamma^2,$$

und hieraus folgen die Wurzeln der Gleichung (19) für Θ_0 zu

$$(20) \quad \Theta_0' = -\Phi - \tfrac{1}{2}\eta\,\alpha^2, \quad \Theta_0'' = -\eta\,\gamma^2, \quad \Theta_0''' = \Phi - \tfrac{1}{2}\eta\,\alpha^2.$$

Sie bestimmen die Lage der Absorptionslinien für eine in beliebiger Richtung den magnetisch-activen Körper durchsetzende ebene Welle, und demgemäss auch die Farben, die der active Körper leuchtend aussendet. Man bemerkt, dass beide etwas mit der Fortpflanzungsrichtung variiren.

Setzt man, wie früher, $\vartheta - \vartheta_0 = \delta$ und vernachlässigt δ neben ϑ_0, so giebt das letzte System

$$(21) \quad \begin{cases} \delta' = -\tfrac{1}{2}c_1 R - \tfrac{1}{4}\varepsilon_1\,\vartheta_0\,\alpha^2, \quad \delta'' = -\tfrac{1}{2}\varepsilon_1\,\vartheta_0\,\gamma^2, \\ \qquad \delta''' = +\tfrac{1}{2}c_1 R - \tfrac{1}{4}\varepsilon_1\,\vartheta_0\,\alpha^2, \end{cases}$$

was sich als eine Erweiterung der unlängst für die Richtung normal zu den Kraftlinien abgeleiteten [1]) strengeren Werte darstellt.

Bei Beschränkung auf die erste Annäherung folgen die alten von der Richtung unabhängigen Werte [2])

$$\delta' = -\tfrac{1}{2}c_1 R, \quad \delta'' = 0, \quad \delta''' = +\tfrac{1}{2}c_1 R. \text{ —}$$

Wir wenden uns nunmehr zur Bestimmung der *Intensität*

1) W. Voigt, Ann. d. Phys. 1. p. 378 der vorigen Arbeit. 1900.
2) W. Voigt, Wied. Ann. 67. p. 351 u. 358. 1899.

der Absorption in den Absorptionslinien für den vorausgesetzten allgemeinen Fall des Problems.

Nach der Definition (17) gilt $\Theta = \Theta_0 + i\,\vartheta\,\vartheta_1$; setzt man in diesem Ausdruck successive für Θ_0 die drei für die Absorptionsstreifen charakteristischen Werte (20), wobei zugleich ϑ mit ϑ_0 vertauscht werden darf, und geht hiermit in die Formel (18) für ν^2, so erhält man in erster Annäherung folgende Resultate.

Dem *oberen* Vorzeichen entspricht das System von Werten

$$\nu_1''^2 = 1, \quad \nu_1'^2 = \nu_1'''^2 = 1 - \frac{\eta(1+\gamma^2)(\eta + 2\,i\,\vartheta_0\,\vartheta_1)}{\eta^2 + 4\,\vartheta_0^2\,\vartheta_1^2}, \tag{22}$$

dem *unteren* hingegen

$$\nu_2''^2 = 1 - \frac{i\,\eta\,\alpha^2}{\vartheta_0\,\vartheta_1}, \quad \nu_2'^2 = \nu_2'''^2 = 1. \tag{23}$$

Nehmen wir noch, wie das früher bei mässiger Absorption und deutlicher Trennung der Absorptionslinien durch die Einwirkung des Magnetfeldes als geltend erwiesen ist, η als klein neben $2\,\vartheta_0\,\vartheta_1$, so resultirt endlich sehr einfach für die beiden Wellen

$$\left\{\begin{aligned} &\nu_1''^2 = 1, \quad \nu_1'^2 = \nu_1'''^2 = 1 - \frac{i(1+\gamma^2)\,\eta}{2\,\vartheta_0\,\vartheta_1}, \\ &\nu_2''^2 = 1 - \frac{i\,\alpha^2\,\eta}{\vartheta_0\,\vartheta_1}, \quad \nu_2'^2 = \nu_2'''^2 = 1. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Da das Quadrat des complexen Brechungsindex ν mit dem reellen Brechungsindex n und dem (nach der Annahme gegen Eins kleinen) Absorptionsindex $\varkappa$ in der Beziehung steht

$$\nu^2 = n^2(1 - 2\,i\,\varkappa),$$

so zeigen diese Formeln folgendes.

In der benutzten Annäherung ist für beide Wellen an der Stelle aller drei Absorptionsstreifen der reelle Brechungsindex n merklich gleich Eins; dagegen ist für die ***erste*** Welle an den Stellen der *äusseren* Streifen der Absorptionsindex $\varkappa$ gegeben durch

$$\varkappa_1 = \frac{(1+\gamma^2)\,\eta}{4\,\vartheta_0\,\vartheta_1} = \frac{(1+\gamma^2)\,\varepsilon_1\,\vartheta_0}{4\,\vartheta_1}, \tag{25}$$

für die *zweite* Welle an der Stelle des *inneren* Streifens durch

$$\varkappa_2 = \frac{\alpha^2\,\eta}{2\,\vartheta_0\,\vartheta_1} = \frac{\alpha^2\,\varepsilon_1\,\vartheta_0}{2\,\vartheta_1}. \tag{26}$$

Diese Formeln sprechen das Gesetz aus, nach welchem die Intensitäten der Absorptionslinien, und daher auch die der correspondirenden hellen Spectrallinien des leuchtenden Körpers, zwischen den beiden Hauptrichtungen mit der Fortpflanzungsrichtung variiren. Bei Anwendung auf die Hauptfälle $\alpha = 0$ und $\gamma = 0$ verwandeln sie sich in die früher[1]) hierfür angegebenen Gleichungen.

3. Wir gehen nunmehr zur Bestimmung *des Verhältnisses der complexen Amplituden* von L, S, Y aus dem System (9) über und bemerken hier zunächst, dass die Componente L uns nicht interessirt. Beobachtungen können nämlich nur ausserhalb des absorbirenden Mediums und des Magnetfeldes angestellt werden, und die dort stattfindenden Schwingungen besitzen keine longitudinale Componente. Letzteres ist mit den Bedingungen für den senkrechten Austritt der Wellen in den leeren Raum in vollkommenem Einklang, denn hier soll die *Polarisation normal zur Grenze* stetig sein, und diese ist nach der ersten Formel (1) auch in dem Magnetfelde gleich Null.

Für das Verhältnis zwischen S und Y erhält man leicht, wenn man aus der ersten Gleichung (9) den Wert von L entnimmt und in die beiden folgenden Gleichungen einsetzt, die zwei wegen Formel (10) äquivalenten Beziehungen

$$(27)\quad \begin{cases} S\,[(\mu - \nu^2 - \alpha^2\varrho)(\mu - \gamma^2\varrho) - \alpha^2\gamma^2\varrho^2] = -\,i\,\sigma\,\gamma\,(\mu - \varrho)\,Y, \\ Y\,[(\mu - \nu^2)(\mu - \gamma^2\varrho) - \alpha^2\sigma^2] = +\,i\,\sigma\,\gamma\,(\mu - \varrho)\,S. \end{cases}$$

Hieraus folgt durch Elimination von ν^2

$$(28)\quad \frac{i\,Y}{S} = \frac{\alpha^2(\varrho\,\mu - \sigma^2) \pm \sqrt{4\,\sigma^2\gamma^2(\mu - \varrho)^2 + \alpha^4(\varrho\,\mu - \sigma^2)^2}}{2\,\sigma\,\gamma\,(\mu - \varrho)},$$

wobei, wie eine besondere Untersuchung zeigt, das obere und das untere Vorzeichen den gleichen in Formel (11) entsprechen. $i\,Y/S$ findet sich hiernach, da μ, σ, ϱ complexe Grössen sind, im allgemeinen gleichfalls complex; die Schwingungen sind sonach elliptisch, mit gegen die Y- und die S-Richtung geneigten Axen. Bildet man für die beiden, dem doppelten Vorzeichen entsprechenden Wellen die Verhältnisse Y_1/S_1 und Y_2/S_2, so genügen diese der Gleichung

$$(29)\quad Y_1\,Y_2 = S_1\,S_2.$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. **69**. p. 290. 1899.

Hieraus folgt, dass die Bahnellipsen beider Wellen einander ähnlich sind, gekreuzt liegen und in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden.

In Bereichen verschwindender Absorption ist nach p. 391:

$$\sigma = \sigma_a, \quad \varrho = \varrho_a, \; \mu = \mu_a = n_0^2 + \varrho_a,$$

wobei n_0 und die mit dem Index $_a$ versehenen Grössen reelle Werte besitzen. Hier ist sonach Y/S rein imaginär, die Bahnellipsen haben zu der Y- und S-Richtung parallele Axen.

Da σ_a neben μ_a als von erster, ϱ_a als von zweiter Ordnung klein anzusehen ist, so gilt, soweit nicht γ klein gegen α ist, in erster Annäherung

$$(30) \qquad \pm \frac{i\,Y}{S} = 1 \pm \frac{\alpha^2 (n_0^2\,\varrho_a - \sigma_a^2)}{2\,n_0^2\,\gamma\,\sigma_a}.$$

Der absolute Wert des Verhältnisses $i\,Y/S$ unterscheidet sich also nur bei kleinem γ um mehr als erste Ordnung von Eins.

In der Nähe eines Absorptionsstreifens greifen wiederum die Beziehungen (16) Platz, und man erhält mit ihrer Hülfe aus (28) leicht

$$(31) \qquad \frac{i\,Y}{S} = \frac{\alpha^2\,\Phi \pm \sqrt{4\,\gamma^2\,(\Theta + \eta)^2 + \alpha^4\,\Phi^2}}{2\,\gamma\,(\Theta + \eta)}.$$

Diese Formel nimmt eine sehr einfache Gestalt an, wenn man einen complexen Hülfswinkel φ einführt, der definirt ist durch

$$(32) \qquad \operatorname{tg} 2\,\varphi = \frac{2\,\gamma\,(\Theta + \eta)}{\alpha^2\,\Phi}.$$

Hier ergiebt das obere Vorzeichen

$$(33) \qquad \frac{i\,Y_1}{S_1} = +\operatorname{ctg}\varphi \quad \text{oder} \quad S_1 = i\,Y_1 \operatorname{tg}\varphi,$$

das untere

$$(34) \qquad \frac{i\,Y_2}{S_2} = -\operatorname{tg}\varphi \quad \text{oder} \quad Y_2 = i\,S_2 \operatorname{tg}\varphi.$$

Wir wollen nun wieder annehmen, dass $\vartheta\,\vartheta_1$ und η als klein von erster Ordnung neben Φ betrachtet werden dürfen, und dass wir bei der Entwickelung der Formel (31) für die

im Magnetfelde vorhandenen Absorptionslinien selbst uns auf die erste Annäherung beschränken dürfen. Dann erhält man leicht die folgenden, für die beiden Wellen 1, 2 und für die drei Absorptionslinien ('), (''), (''') geltenden Formeln

$$(35)\begin{cases} i S_1' = + \gamma Y_1', \qquad (i \gamma S_2' = - Y_2'), \\ \left(i S_1'' = - \dfrac{\gamma (\eta \alpha^2 + i \vartheta_0 \vartheta_1)}{\alpha^2 \Phi} Y_1''\right), \qquad \dfrac{i \gamma (\eta \alpha^2 + i \vartheta_0 \vartheta_1)}{\alpha^2 \Phi} S_2'' = Y_2'', \\ i S_1''' = - \gamma Y_1''', \qquad (i \gamma S_2''' = + Y_2'''). \end{cases}$$

Diese Beziehungen zerfallen in zwei Gruppen, die dadurch hervorgehoben sind, dass der eine Teil von ihnen eingeklammert ist, der andere nicht. Die nicht eingeklammerten beziehen sich jedesmal auf diejenige Welle, welche an der untersuchten Stelle den diese charakterisirenden Absorptionsstreifen besitzt, die eingeklammerten auf die ebenda nur wenig absorbirte Welle. Erstere Formeln werden demgemäss beim directen, letztere beim inversen Zeemanphänomen in Betracht kommen, insofern von den beiden in derselben Richtung fortgepflanzten Wellen je nur die stärkere die Erscheinung bestimmt.

Knüpfen wir an die für den directen Effect maassgebenden, nicht eingeklammerten Formeln an, so ist ersichtlich, dass die Beziehungen zwischen S_1' und Y_1', S_1''' und Y_1''' für die *äussern* Componenten der Triplets diejenige Deutung nahelegen, welche die elementare Ionentheorie von dem Vorgang giebt: die Bahnellipsen erscheinen für beide Wellen als die Projectionen von normal zu den Kraftlinien verlaufenden Kreisen auf die Wellenebenen, können also als directe Wirkung von zwei derartigen circularen Schwingungen in der Lichtquelle angesehen werden.

Auffallend ist die aus der Gleichung zwischen S_2'' und Y_2'' folgende Ellipticität der Schwingung, welche die *mittlere* Componente des Triplets ausführt. Nach der elementaren Ionentheorie, welche die Rückwirkung des Aethers auf die Ionenbewegung ignorirt, möchte man zunächst eine geradlinige Schwingung parallel mit S erwarten; doch weichen, wie schon früher hervorgehoben, die Lorentz'schen Formeln für die inversen Vorgänge von den von mir aufgestellten nicht ab, solange es sich um Spectrallinien handelt, deren Abstände gross sind

gegen die Breite des Triplets, und die obigen Resultate sind daher auch mit ihnen vereinbar. Die Symmetrie des Vorganges ist dadurch gewahrt, dass die durch Y_1'' und S_1'' gegebene Welle eine der besprochenen und durch S_2'', Y_2'' bestimmten gleiche Ellipticität bei gekreuzten Axen und entgegengesetzter Rotationsrichtung besitzt. Nach den gemachten Voraussetzungen weichen übrigens beide Schwingungen von geradlinig und parallel der S- und Y-Axe verlaufenden nur um Grössen erster Ordnung ab und fallen bei zu den Kraftlinien normaler Fortpflanzungsrichtung mit ihnen zusammen, während sie parallel zu den Kraftlinien überhaupt nicht fortschreiten.

Zu ganz ähnlichen Bemerkungen, wie sie vorstehend an die Gleichungen (35) für das Verhältnis S/Y angeknüpft sind, geben übrigens die aus den Formeln (22) bis (24) folgenden Werte der Producte $n_1 \varkappa_1$ und $n_2 \varkappa_2$ Veranlassung, die bei dem directen Zeemaneffect die emittirten Intensitäten messen. Auch hier stimmen die *strengen* Werthe nicht mit dem überein, was die elementare Ionentheorie erwarten lässt. Dagegen liefern die *in erster Annäherung* geltenden Ausdrücke (25) und (26), denen $n_1 = n_2 = 1$ entspricht, eine solche Uebereinstimmung, denn sie ergeben leicht ersichtlicher Weise die Amplituden in der fortschreitenden Welle mit den Projectionen der Amplituden des schwingenden Ion auf die Wellenebene proportional. —

Abschliessend möge darauf aufmerksam gemacht werden, *wie verschieden* die Gesetze der Geschwindigkeit, der Absorption und der Ellipticität sich gestalten, je nachdem die Differentialgleichungen auf ein Spectralbereich verschwindender Absorption oder auf die unmittelbare Umgebung eines scharfen Absorptionsstreifens angewendet werden.

Göttingen, December 1899.

(Eingegangen 23. December 1899.)

15. *Zur Kinetik der Serienschwingungen eines Linienspectrums; von Eduard Riecke.*

(Nach einer vorläufigen Mitteilung in der Physikalischen Zeitschrift Nr. 1 und Nr. 2, 1899. p. 10.)

1. Bei theoretischen Untersuchungen über die Spectren gasförmiger Körper ist man meist von der Vorstellung ausgegangen, dass die leuchtenden Molecüle in mehr oder weniger complicirter Weise aus Atomen zusammengesetzt seien. Die Bewegungen der Atome im Inneren des Molecüles mussten sich dann in eine Reihe harmonischer Schwingungen auflösen lassen. Die dabei auftretenden Schwingungszahlen mussten mit den Schwingungszahlen identisch sein, welche den einzelnen Linien des Spectrums zugehören. Die elektromagnetische Theorie des Lichtes bedingt in dieser Vorstellung eine Aenderung insofern, als man nicht mehr annehmen wird, dass die ponderablen Atome selbst durch ihre Schwingungen den Aether in Wellenbewegung versetzen, man wird vielmehr als die eigentlichen Erreger der Wellen die mit den Molecülen verbundenen Ionen oder die an ihrem Aufbaue teilnehmenden Atome des Elektrons betrachten. Immer wird man aber voraussetzen, dass die Anzahl der schwingenden Teilchen eine endliche, dass der Zustand des Molecüles durch eine endliche Anzahl von allgemeinen Coordinaten bestimmt sei. Die Mittelwerte der Coordinaten seien gegeben; man kann dann die wirkenden Kräfte als abhängig betrachten von den Differenzen zwischen den jeweils vorhandenen wirklichen Werten und jenen mittleren. An Stelle der unbekannten Functionen dieser Differenzen, durch welche die Kräfte dargestellt werden, kann man Reihen setzen, welche nach Potenzen jener Differenzen fortschreiten. Man wird dabei von vornherein die Möglichkeit zugeben, dass diese Reihen bis zu höheren Potenzen der Verschiebungen zu verfolgen sind. Dann wird das System nicht bloss die seinen Freiheitsgraden entsprechenden Grundschwingungen ausführen, sondern zu diesen werden noch die harmonischen Oberschwingungen, sowie die Combinationsschwingungen der verschiedenen

Ordnungen mit allmählich abnehmender Intensität treten. Die Betrachtung scheint in der That von gewissen Eigentümlichkeiten der Spectren Rechenschaft zu geben. Man sieht, dass Molecüle von verhältnismässig kleinem Freiheitsgrade schon recht complicirte Spectren erzeugen können, welche aus einer Uebereinanderlagerung von Linien von verschiedener Ordnung und dementsprechend von verschiedener Intensität bestehen. Julius[1]) hat gezeigt, dass die Helmholtz'sche Theorie der Combinationstöne erster Ordnung in ihrer Anwendung auf complicirtere Systeme Schwingungszahlen liefert, welche paarweise dieselbe Differenz besitzen. In der That haben Kayser und Runge constante Differenzen von Schwingungszahlen in den Spectren der Elemente in grosser Zahl aufgefunden. Dagegen ist noch nicht gezeigt, dass ein complicirtes Spectrum wirklich nach dem von der Combinationstheorie gelieferten Schema sich auflösen lasse; es fehlt also der thatsächliche Beweis für die Grundannahme der Theorie, für die Möglichkeit von Reihen, die nach Potenzen der Coordinatenänderungen fortschreiten. Das Bild, welches die Combinationstheorie von der Erscheinung der Spectren entwirft, zeigt nur eine ganz allgemeine Aehnlichkeit mit den wirklichen Erscheinungen, quantitative Uebereinstimmung im einzelnen ist bisher nicht nachgewiesen.

Nun tritt aber in der überwiegenden Mehrzahl der Spectren eine Erscheinung auf, welche es zweifelhaft macht, ob die andere Annahme der Combinationstheorie ausreichend ist, nach welcher der Zustand der Molecüle durch eine endliche Zahl von Coordinaten bestimmt sein soll. Es sind dies die in Serien sich ordnenden Schwingungszahlen der Spectren. Nach Kayser und Runge kann man die Schwingungszahlen p der Serien mit überraschender Genauigkeit darstellen durch dreiconstantige Ausdrücke von der Form:

$$p = a - \frac{b}{n^2} - \frac{c}{n^4}.$$

Die kleinsten beobachteten Schwingungszahlen der Serien ergeben sich im allgemeinen für $n = 3$; mit wachsender Ordnungszahl nähern sich die Schwingungszahlen der oberen

1) V. A. Julius, Beibl. **13.** p. 496. 1889.

Grenze a. Handelt es sich bei den Serien um eine unendliche Zahl sich überlagernder Partialschwingungen, so reicht zu ihrer Erzeugung ein Molecül mit einer endlichen Zahl von Freiheitsgraden nicht aus; wir müssen dann annehmen, dass die Schwingungen von einem Gebilde herrühren, das nach einer Dimension stetig sich ausdehnt. Von diesem Gesichtspunkte aus ist im Folgenden der Versuch gemacht, zu einem anschaulichen Bilde für den Mechanismus der Serienschwingungen zu gelangen.

2. Wir gehen aus von der Betrachtung zweier Functionen u_1 und u_2, welche in periodischer Weise von der Zeit und ausserdem in ebenfalls periodischer Weise von einem Parameter φ abhängen. Sie seien gegeben durch die Ansätze:

$$u_1 = \sum_n A_n \sin n\varphi \sin 2\pi p t, \tag{1}$$

$$u_2 = \sum_n A_a \sin n\varphi \cos 2\pi p t. \tag{2}$$

Durch Differentiation ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} = -\sum_n A_n n^2 \sin n\varphi \cos 2\pi p t, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^4 u_2}{\partial \varphi^4} = \sum_n A_n n^4 \sin n\varphi \cos 2\pi p t, \tag{4}$$

$$\frac{\partial^5 u_1}{\partial \varphi^4 \partial t} = \sum_n A_n 2\pi p n^4 \sin n\varphi \cos 2\pi p t. \tag{5}$$

Multiplicirt man die Gleichungen (2), (3), (4) bez. mit $2\pi c$, $-2\pi b$, $-2\pi a$, so ergiebt sich durch Addition derselben zu Gleichung (5):

$$\frac{\partial^5 u_1}{\partial \varphi^4 \partial t} - 2\pi a \frac{\partial^4 u_2}{\partial \varphi^4} - 2\pi b \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} + 2\pi c u_2$$
$$= \sum_n A_n 2\pi (p n^4 - a n^4 + b n^2 + c) \sin n\varphi \cos 2\pi p t.$$

Besteht also zwischen der Schwingungszahl p und der Zahl n die Kayser-Runge'sche Gleichung:

$$p = a - \frac{b}{n^2} - \frac{c}{n^4},$$

so ist:

$$\frac{\partial^5 u_1}{\partial \varphi^4 \partial t} - 2\pi a \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varphi^4} - 2\pi b \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} + 2\pi c u_2 = 0. \tag{6}$$

Unter derselben Bedingung besteht zwischen u_1 und u_2 noch die andere Gleichung:

$$(7)\qquad \frac{\partial^5 u_2}{\partial \varphi^4 \partial t} + 2\pi a \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varphi^4} + 2\pi b \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} - 2\pi c u_1 = 0.$$

Umgekehrt werden die Gleichungen (6) und (7) durch die Ansätze (1) und (2) befriedigt, wenn die Schwingungszahl p mit der Zahl n durch die Gleichung von **Kayser und Runge** verbunden ist.

Aus den Gleichungen (6) und (7) kann man entweder u_1 oder u_2 eliminiren; man kommt dann in beiden Fällen zu derselben Gleichung:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^{10} u}{\partial \varphi^8 \partial t^2} + 4\pi^2 a^2 \dfrac{\partial^8 u}{\partial \varphi^8} + 4\pi^2 b^2 \dfrac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} + 4\pi^2 c^2 u \\ \qquad + 8\pi^2 a b \dfrac{\partial^6 u}{\partial \varphi^6} - 8\pi^2 a c \dfrac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} - 8\pi^2 b c \dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \end{cases}$$

Es sind also u_1 und u_2 partielle Lösungen einer und derselben Differentialgleichung zehnter Ordnung.

3. Wir werden nun versuchen, die Functionen u_1 und u_2 auf Grund der Ansätze (1) und (2) in anschaulicher Weise zu deuten. In der vorläufigen Mitteilung habe ich sie auf die correspondirenden Punkte zweier verschiedener concentrischer Ringe bezogen; es scheint in mancher Hinsicht einfacher, sie mit den Punkten eines und desselben Ringes in Verbindung zu bringen. Wir nehmen also einen einzigen Kreisring, dessen Ebene wir uns, um die Vorstellung zu fixiren, horizontal gestellt denken. Im Mittelpunkt 0 des Ringes errichten wir auf seiner Ebene die Normale, deren nach oben gehender Zweig mit x bezeichnet werder möge. Durch den Mittelpunkt 0 ziehen wir eine mit dem Ringe fest verbundene, in seiner Ebene liegende Axe b; wir verstehen dann unter φ den Winkel, welchen der nach einem beliebigen Punkte des Kreises gezogene Radiusvector mit der Axe b einschliesst; eine Drehung des Radiusvectors im Sinne der wachsenden φ sei, von oben betrachtet, der Drehung des Uhrzeigers entgegengesetzt. Die Functionen u_1 und u_2 betrachten wir als zwei zu einander senkrechte Vectoren, welche den einzelnen Punkten des Ringes zugeordnet sind. Die Abhängigkeit der Vectoren von der

Lage der Ringpunkte einerseits, von der Zeit andererseits ist gegeben durch die Gleichungen (1) und (2).

Die erste Partialschwingung, der eine Linie der Spectralserie entspricht, erhalten wir mit $n = 3$. Die zugehörenden Vectorcomponenten sind Null für

$$\varphi = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{3}, \quad \varphi = \frac{4\pi}{3}, \quad \varphi = \frac{5\pi}{3}.$$

Die erste Partialschwingung besitzt also sechs Knotenpunkte, welche gleichmässig auf der Peripherie des Ringes verteilt sind; die folgende Partialschwingung mit $n = 4$ besitzt acht äquidistante Knotenpunkte, die n^{te} Schwingung $2n$ solche Knotenpunkte.

4. Wir setzen voraus, dass u_1 und u_2 zwei zu einander senkrechte Vectoren sind. Was ihre speciellere Richtung anbelangt, so liegen zwei Annahmen besonders nahe. Nach der einen würden u_1 und u_2 in einer durch die Ringaxe x gehenden Ebene liegen, nach der anderen in der Ebene des Ringes selbst. Im ersteren Falle wollen wir die Richtungen der einem bestimmten Punkte P des Ringes zugehörenden Vectoren in folgender Weise festlegen; wir nehmen auf der Ringaxe x einen Punkt A; dann sei PA die Richtung des Vectors u_1; die Richtung des Vectors u_2 sei gegeben durch die in der Ebene OAP zu PA senkrecht nach oben gezogene Linie.

Nehmen wir an Stelle von A einen anderen, etwa einen höher auf der x-Axe liegenden Punkt, A', so erhalten wir längs der Linie PA' eine Vectorcomponente u_1'; längs der in der Ebene $x\,O\,P$ senkrecht zu PA' nach oben gezogenen Linie eine Vectorcomponente u_2'. Bezeichnen wir den Winkel APA' mit α, so ist:

$$u_1 = u_1' \cos\alpha - u_2' \sin\alpha,$$
$$u_2 = u_1' \sin\alpha + u_2' \cos\alpha.$$

Substituiren wir diese Werte in den Gleichungen (6) und (7), so ergiebt sich in symbolischer Schreibweise:

$$\frac{\partial^5 (u_1' \cos\alpha - u_2' \sin\alpha)}{\partial\varphi^4\,\partial t} - 2\pi\left(a\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} + b\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - c\right)(u_1' \sin\alpha + u_2' \cos\alpha) = 0,$$

und

$$\frac{\partial^5 (u_1' \sin\alpha + u_2' \cos\alpha)}{\partial\varphi^4\,\partial t} + 2\pi\left(a\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} + b\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - c\right)(u_1' \cos\alpha - u_2' \sin\alpha) = 0.$$

Daraus folgt aber weiter:

$$\frac{\partial^5 u_1'}{\partial \varphi^4 \partial t} - 2\pi \left(a \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + b \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - c\right) u_2' = 0\,,$$

$$\frac{\partial^5 u_2'}{\partial \varphi^4 \partial t} + 2\pi \left(a \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + b \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - c\right) u_1' = 0\,.$$

Die Differentialgleichungen sind unabhängig von der besonderen Wahl der zu einander senkrechten Richtungen u_1 und u_2, solange diese nur in der Ebene bleiben, welche durch die x-Axe und durch den betrachteten Punkt P des Ringes hindurchgeht. Es wird daher am einfachsten sein, die Richtung von u_1 parallel mit der Ringaxe x, die Richtung von u_2 in den nach aussen gehenden Radiusvector y des Punktes P zu legen; diese besondere Wahl der Richtungen u_1 und u_2 soll im Folgenden angenommen werden. Betrachten wir nun irgend eine der durch die Gleichungen (1) und (2) gegebenen Partialschwingungen:

$$u_{1n} = A_n \sin n\varphi \sin 2\pi p t,$$

$$u_{2n} = A_n \sin n\varphi \cos 2\pi p t.$$

Wir nehmen zunächst einen bestimmten Punkt P des Ringes, wie er durch einen bestimmten Wert des Winkels φ gegeben wird. Durch P ziehen wir, senkrecht zu der Ebene des Ringes, eine Parallele zu der x-Axe; auf dieser tragen wir die Vectorcomponente u_{1n} ab, nach oben hin, solange ihr Wert positiv ist; die Componente u_{2n} tragen wir von P aus auf dem Radiusvector y ab, nach aussen, wenn sie positiv ist. Den Endpunkt des aus u_{1n} und u_{2n} construirten resultirenden Vectors bezeichnen wir mit Π. Der zu dem Punkte P des Ringes gehörende Vectorpunkt Π bewegt sich dann in einem Kreise, dessen Ebene mit der Ebene xy zusammenfällt; der Halbmesser ist gleich $A_n \sin n\pi$. Zur Zeit $t = 0$ ist $u_{1n} = 0$, $u_{2n} = A_n \sin n\varphi$; mit wachsender Zeit nimmt u_{1n} zu, u_{2n} ab; der Punkt Π dreht sich also im Kreise im Sinne von der positiven y-Axe zu der positiven x-Axe. Die Zahl der Umläufe in 1 Sec. ist gleich p.

Das Verhältnis der Vectorcomponenten u_{1n} und u_{2n},

$$\frac{u_{1n}}{u_{2n}} = \operatorname{tg} 2\pi p t\,,$$

ist unabhängig von φ und allein abhängig von t. Zu einer bestimmten Zeit befinden sich also die Punkte Π alle auf dem Mantel eines Kegels, dessen Spitze in der x-Axe liegt, dessen Leitlinie durch den Kreisring gebildet wird. In ihrer Gesamtheit bilden die Punkte Π eine Wellenlinie, welche längs dem Ringe sich hinzieht; sie durchschneidet den Ring in den $2n$ äquidistanten Knotenpunkten; die Bogen der Wellenlinie wenden sich abwechselnd der Spitze des Kegels zu und von ihr ab. Die zeitliche Aenderung der von den Punkten Π gebildeten Linie erinnert darnach an die höheren Schwingungen eines Kautschukschlauches, der an seinem einen Ende befestigt ist, während das andere mit der Hand in einem kleinen Kreise herumgeführt wird. Zwischen je zwei Knotenpunkten liegen Spindeln, wie sie durch die Rotation einer Sinuslinie um ihre Axe erzeugt werden.

5. Es möge noch kurz die zweite Annahme besprochen werden, nach der die Vectoren u_1 und u_2 in der Ebene des Ringes liegen sollten. Wir legen von vornherein den Vector u_1 in die Richtung des nach dem betrachteten Punkt P des Ringes gehenden Radius; den Vector u_2 lassen wir zusammenfallen mit der Tangente des Kreises in dem Punkte P; die positive Richtung möge dabei übereinstimmen mit der Richtung, in welcher der Winkel φ wächst. Wir betrachten die n-Partialschwingung, bei der die Vectorcomponenten gegeben sind, durch

$$u_{1\,n} = A_n \sin n\,\varphi \sin 2\,\pi\,p\,t \quad \text{und} \quad u_{2\,n} = A_n \sin n\,\varphi \cos 2\,\pi\,p\,t\,.$$

Den Endpunkt des aus $u_{1\,n}$ und $u_{2\,n}$ resultirenden Vectors bezeichnen wir durch Π. Zur Zeit $t = (1/4\,p)$ sind die Vectorcomponenten $u_{2\,n}$ gleich Null; die Punkte Π liegen auf den Kreisradien $O\,P$ und bilden eine der Kreisperipherie sich auflagernde Sinuslinie. Mit wachsender Zeit nehmen die Vectoren $u_{1\,n}$ ab, die Vectoren $u_{2\,n}$ erhalten allmählich wachsende negative Werte; die Punkte Π bewegen sich in Kreisen um die entsprechenden Punkte P und zwar von oben gesehen im Sinne des Uhrzeigers. Die Geschwindigkeit der Drehung ist bei allen Punkten dieselbe, die Zahl der Umläufe in 1 Sec. gleich p. Infolge der Rotation verschieben sich die nach aussen liegenden Maxima der Sinuslinie im Sinne des Uhr-

zeigers, die nach innen gewandten Minima in der entgegengesetzten Richtung, gleichzeitig nimmt die Höhe der Wellen ab. Nach einem Viertel der Umlaufszeit werden die Vectorcomponenten u_{1n} gleich Null, die Punkte Π fallen in die Peripherie des Kreises, die Vectorverschiebung hat einen longitudinalen Charakter. Weiterhin treten an den Stellen, wo bis dahin Wellenberge waren, Thäler auf und umgekehrt; die Wanderung der Maxima und Minima erfolgt dabei in demselben Sinne wie zuvor.

6. Die drei Vectoren

$$(9)\qquad \begin{cases} u_1 = \sum\limits_n A_n \sin n\varphi \sin 2\pi p t \\ u_2 = \sum\limits_n A_n \sin n\varphi \sin\left(2\pi p t + \frac{2\pi}{3}\right) \\ u_3 = \sum\limits_n A_n \sin n\varphi \sin\left(2\pi p t + \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$$

genügen den Differentialgleichungen

$$3\frac{\partial^5 u_1}{\partial\varphi^4 \partial t} = 2\pi\sqrt{3}\left(a\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} + b\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - c\right)(u_2 - u_3),$$

$$3\frac{\partial^5 u_2}{\partial\varphi^4 \partial t} = 2\pi\sqrt{3}\left(a\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} + b\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - c\right)(u_3 - u_1),$$

$$3\frac{\partial^5 u_3}{\partial\varphi^4 \partial t} = 2\pi\sqrt{3}\left(a\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} + b\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - c\right)(u_1 - u_2),$$

wenn zwischen p und n die Beziehung besteht:

$$p = a - \frac{b}{n^2} - \frac{c}{n^4}.$$

Zu einer Erweiterung der Anschauung führt das neue System aber nur dann, wenn man die Vectoren u_1, u_2, u_3 drei voneinander verschiedenen Gebilden, etwa drei coaxialen Ringen zuordnet. Sobald man annimmt, dass die Vectoren u_1, u_2, u_3 den Punkten P eines und desselben Ringes entsprechen, führt das neue System auf das frühere zurück. Zwischen den Vectoren u_1, u_2, u_3 besteht nämlich die Beziehung

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Daraus folgt, dass der Endpunkt Π des aus u_1, u_2, u_3 resultirenden Vectors $P\Pi$ eine ebene Curve beschreibt. Wir ziehen durch P eine Axe w, welche gegen die Axen u_1, u_2, u_3 gleich geneigt ist; der Punkt Π bewegt sich dann in

der Ebene, welche durch P senkrecht zu w hindurchgeht. Wir legen nun durch w und u_1 eine Ebene und ziehen in dieser v_1 senkrecht zu w. Endlich ziehen wir v_2 senkrecht zu v_1 und zu w, sodass der Winkel $v_2 u_2$ ein spitzer wird. Für die Vectorcomponenten nach w, v_1, v_2 ergeben sich dann die Ausdrücke:

$$w = u_1 \sqrt{\frac{1}{3}} + u_2 \sqrt{\frac{1}{3}} + u_3 \sqrt{\frac{1}{3}},$$
$$v_1 = u_1 \sqrt{\frac{2}{3}} - u_2 \sqrt{\frac{1}{6}} - u_3 \sqrt{\frac{1}{6}},$$
$$v_2 = \qquad u_2 \sqrt{\frac{1}{2}} - u_3 \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Setzen wir hier für u_1, u_2, u_3 ihre Werte aus den Gleichungen (8), so ergiebt sich:

$$w = 0,$$
$$v_1 = \sum_n A_n \sqrt{\tfrac{3}{2}} \sin n\varphi \sin 2\pi p t,$$
$$v_2 = \sum_n A_n \sqrt{\tfrac{3}{2}} \sin n\varphi \cos 2\pi p t.$$

Die beiden letzten Ausdrücke sind im wesentlichen identisch mit den Ausdrücken (1) udd (2) und geben also zu denselben Betrachtungen Veranlassung wie diese.

7. Lebendige Kraft des schwingenden Ringes. Wenn man den Elementen unseres Ringes ponderabele Masse zuschreibt, so besitzt er bei seiner Schwingung eine gewisse lebendige Kraft. Ehe wir zu ihrer Berechnung übergehen, wollen wir die in den Gleichungen (1) und (2) gemachten Ansätze noch etwas erweitern, indem wir schreiben:

$$(10) \quad \begin{cases} u_1 = \sum_n A_n \sin(n\varphi + \delta_n) \sin 2\pi p_n (t - d_n), \\ u_2 = \sum_n A_n \sin(n\varphi + \delta_n) \cos 2\pi p_n (t - d_n), \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen (6), (7) und (8) werden dadurch nicht geändert. Aus den neuen Ansätzen ergeben sich für die Geschwindigkeiten die folgenden Werte:

$$u_1' = \sum_n A_n 2\pi p_n \sin(n\varphi + \delta_n) \cos 2\pi p_n (t - d_n),$$
$$u_2' = -\sum_n A_n 2\pi p_n \sin(n\varphi + \delta_n) \sin 2\pi p_n (t - d_n).$$

Ist μ die dem Centriwinkel 1 entsprechende Masse des Ringes, so kommt auf das Bogenelement $d\varphi$ die Masse $\mu\, d\varphi$; die dem Elemente $d\varphi$ entsprechende lebendige Kraft ist somit zur Zeit t gleich:

$$l\,d\varphi = \frac{\mu}{2}(u_1'^2 + u_2'^2)\,d\varphi$$

$$= \sum \frac{\mu}{2} A_i A_k\, 4\pi^2 p_i p_k \sin(i\varphi + \delta_i)\sin(k\varphi + \delta_k)\,d\varphi$$

$$\times \cos 2\pi p_i (t - d_i)\cos 2\pi p_k (t - d_k)$$

$$+ \sum \frac{\mu}{2} A_i A_k\, 4\pi^2 p_i p_k \sin(i\varphi + \delta_i)\sin(k\varphi + \delta_k)\,d\varphi$$

$$\times \sin 2\pi p_i (t - d_i)\sin 2\pi p_k (t - d_k),$$

oder:

$$l\,d\varphi = \sum \frac{\mu}{2} A_i A_k\, 4\pi^2 p_i p_k \sin(i\varphi + \delta_i)\sin(k\varphi + \delta_k)\,d\varphi$$

$$\times \cos 2\pi\{(p_i - p_k)t - p_i d_i + p_k d_k\}.$$

Wir wollen diesen Ausdruck nun nach doppelter Richtung verwerten; einmal wollen wir für ein einzelnes Element des Ringes den Mittelwert berechnen, welchen die lebendige Kraft für einen grösseren Zeitraum T annimmt. Sodann soll der Wert bestimmt werden, welchen die lebendige Kraft des ganzen Ringes zu irgend einer Zeit t besitzt.

Der Mittelwert $\overline{l\,d\varphi}$ hängt ab von dem Integrale:

$$\frac{1}{T}\int_0^T \cos 2\pi\{(p_i - p_k)t - p_i d i + p_k d_k\}\,dt.$$

Solange p und k verschieden sind, hat dasselbe den Wert:

$$\frac{\sin 2\pi\{(p_i - p_k)T - p_i d_i + p_k d_k\} + \sin 2\pi(p_i d_i - p_k d_k)}{2\pi(p_i - p_k)T}.$$

Durch Vergrösserung von T kann dieser Wert unter jede beliebige Grösse herabgedrückt werden. Es bleiben dann in dem Ausdruck für den Mittelwert der lebendigen Kraft nur die Glieder mit gleichem i und k übrig. Bei diesen aber ist $\cos 2\pi\{(p_i - p_k)t - p_i d_i + p_k d_k\} = 1$; der Mittelwert der lebendigen Kraft für ein beliebiges Element $d\varphi$ wird somit

$$\overline{l\,d\varphi} = \sum \frac{\mu}{2} A_n^2\, 4\pi^2 p_n^2 \sin^2(n\varphi + \delta_n)\,d\varphi.$$

Die mittlere lebendige Kraft setzt sich linear zusammen aus den mittleren lebendigen Kräften, welche den einzelnen Partialschwingungen entsprechen.

Die lebendige Kraft, welche der ganze Ring zu irgend einer Zeit t besitzt, hängt ab von dem Integrale:

$$\int_0^{2\pi} \sin(i\varphi + \delta_i)\sin(k\varphi + \delta_k)\,d\varphi\,.$$

Das Integral ist Null, solange i und k verschieden ist. Für $i = k$ ergiebt sich:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(i\varphi + \delta_i)\,d\varphi = \pi\,.$$

Die lebendige Kraft des ganzen Ringes ist somit:

$$L = \sum \frac{\mu}{2} A_n^2\, 4\,\pi^3 p_n^2\,,$$

Sie ist unabhängig von t und setzt sich gleichfalls linear aus den lebendigen Kräften der Partialschwingungen zusammen.

Die niedrigste beobachtete Partialschwingung erhalten wir mit $n = 3$. Bezeichnen wir die Intensitäten der aufeinanderfolgenden Partialschwingungen durch J_3, $J_4 \ldots$, $J_n \ldots$, so ergiebt sich:

$$J_3 = \frac{\mu}{2} A_3^2\, 4\,\pi^3 p_3^2\,, \qquad J_n = \frac{\mu}{2} A_n^2\, 4\,\pi^3 p_n^2\,;$$

somit

$$\frac{A_n}{A_3} = \sqrt{\frac{J_n}{J_3}}\,\frac{p_3}{p_n}\,.$$

8. Die von einem Ringelemente durchlaufene Bahn. Von den zweifach unendlichen Möglichkeiten, nach denen sich die Partialschwingungen des Ringes übereinander lagern können, soll im Folgenden nur eine einzige berücksichtigt werden. Wir setzen:

$$u_1 = \sum_n A_n \cos n\varphi \cos 2\pi p_n t \quad \text{und} \quad u_2 = \sum_n A_n \cos n\varphi \sin 2\pi p_n t\,.$$

Betrachten wir insbesondere den Punkt des Ringes, für welchen $\varphi = 0$, so ist:

$$u_1^0 = \sum_n A_n \cos 2\pi p_n t\,, \quad u_2^0 = \sum_n A_n \sin 2\pi p_n t\,.$$

Nach der Vorstellung, die wir uns über die Schwingungen des Ringes gebildet haben, sind u_1^0 und u_2^0 Verschiebungscomponenten nach zwei zu einander senkrechten Richungen, nach den Axen x und y. Wir setzen:

$$A_n \cos 2\pi p_n t = \xi_n, \quad A_n \sin 2\pi p_n t = \eta_n,$$

dann wird:

$$u_1^0 = \xi_3 + \xi_4 + \ldots, \quad u_2^0 = \eta_3 + \eta_4 + \ldots$$

Für die Verschiebungscomponenten ξ_n und η_n gilt die Gleichung:

$$\xi_n^2 + \eta_n^2 = A_n^2,$$

d. h. der Endpunkt des aus ξ_n und η_n construirten Vectors durchläuft einen Kreis, dessen Halbmesser gleich A_n ist. Zur Zeit $t = 0$ ist $\xi_n = A_n$, $\eta_n = 0$. Der Endpunkt des Vectors befindet sich auf der x-Axe; zur Zeit $t = (1/4 p_n)$ ist $\xi_n = 0$, $\eta_n = A_n$, der Endpunkt des Vectors liegt auf der y-Axe und hat somit in der Richtung von der x-Axe zu der y-Axe ein Viertel des Kreisumfanges zurückgelegt. Bezeichnen wir den Winkel, welchen der aus ξ_n und η_n construirte Vector zu irgend einer Zeit mit der x-Axe einschliesst durch ϑ_n, so ist:

$$\vartheta_n = 2\pi p_n t.$$

Hiernach ist es leicht, für irgend eine Zeit t den aus ξ_n und η_n resultirenden Vector zu construiren. Nun ist aber der Ort, welchen der betrachtete Punkt des Ringes einnimmt, gegeben durch die Projectionen u_1^0 und u_2^0 seines Radiusvectors. Aus den für u_1^0 und u_2^0 geltenden Formeln aber folgt, dass man den Radiusvector des betrachteten Ringpunktes erhält, wenn man die aus A_n und ϑ_n construirten, den einzelnen Partialschwingungen entsprechenden Vectoren geometrisch addirt.

Der Vector (ξ_3, η_3) durchläuft den zugehörenden Kreis in der Zeit $1/p_3$, er beschreibt also in dieser Zeit den Winkel 2π. Der Vector (ξ_n, η_n); durchläuft den entsprechenden Kreis in der Zeit $1/p_n$; während also der Vector (ξ_3, η_3) den Winkel 2π beschreibt, beschreibt der Vector (ξ_n, η_n) gleichzeitig den Winkel $2\pi(p_n/p_3)$.

Wir wollen diese allgemeinen Betrachtungen endlich noch erläutern an dem Beispiele des Na. Für die aus 7 Linien bestehende erste Serie des Natriumspectrums ergeben sich aus den Messungen von Kayser und Runge die Zahlen:

n	p_n/v	$\sqrt{J_n/J_3}$	a_n/a_3	p_n/p_3
3	16960,19	1	1	1
4	30274,87	0,71	0,398	1,785055
5	35051,93	0,57	0,276	2,066719
6	37307,03	0,50	0,227	2,199680
7	38550,80	0,45	0,198	2,273007
8	39310,49	0,41	0,177	2,317809
9	39805,27	0,41	0,175	2,346983

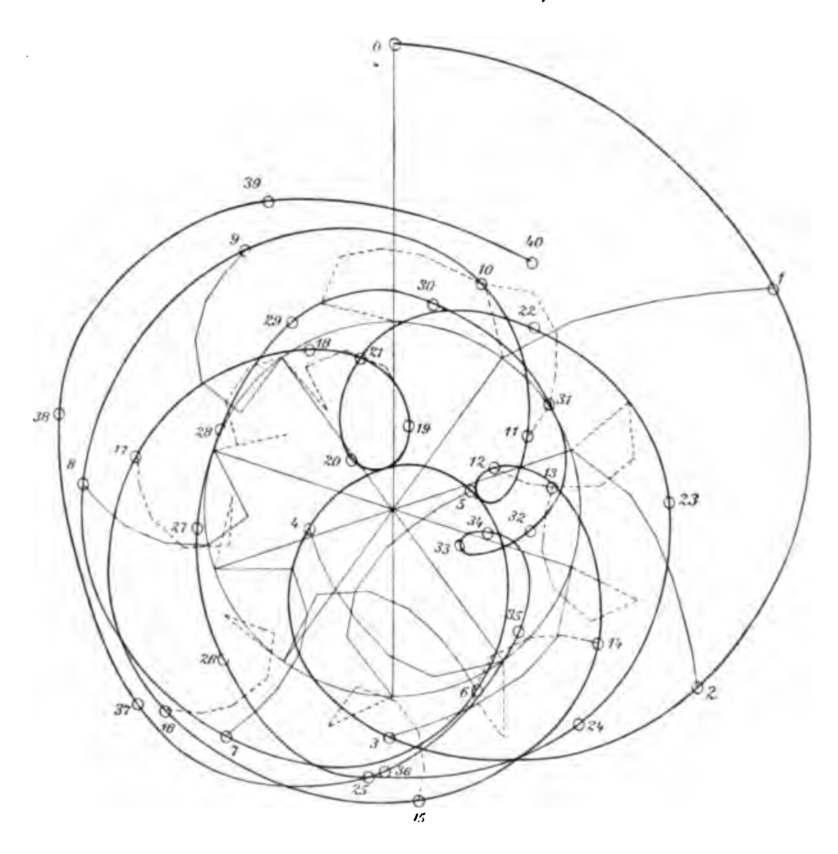
Aus dem Ansatze:

$$u_1^0 = \sum A_n \cos 2\pi p_n t, \quad u_2^0 = \sum A_n \sin 2\pi p_n t$$

folgt, dass zur Zeit $t = 0$ alle den einzelnen Partialschwingungen entsprechenden Vectoren mit der Richtung der x-Axe zusammenfallen. Es liegt somit zu der Zeit $t = 0$ auch der Endpunkt des aus den Componenten u_1^0 und u_2^0 resultirenden Vectors, d. h. der betrachtete Punkt des Ringes auf der x-Axe. Ein allerdings nur sehr kleiner Teil der weiteren Bewegung wird durch die Figur veranschaulicht. Die Anfangslage des betrachteten Punktes ist mit 0 bezeichnet. Der im Innern der Figur gezeichnete Kreis wird von dem Vector (ξ_3, η_3) in der Zeit $1/p_3$ durchlaufen. Während nun der Vector (ξ_3, η_3) ein Zehntel seiner Bahn durchläuft, kommt der betrachtete Ringpunkt nach 1; während der Vector (ξ_3, ξ_3) zwei Zehntel des entsprechenden Kreises beschreibt, kommt der Ringpunkt nach 2 etc. Die Zeit, welche der betrachtete Ringpunkt braucht, um von einem der numerirten Punkte der Bahn zu dem nächstfolgenden zu gelangen, ist also immer gleich dem zehnten Teil der Umlaufszeit des Vectors (ξ_3, η_3). Die nach den Punkten 1, 2, 3 . . . hingehenden Linienzüge geben die jeweiligen Lagen der Vectoren (ξ_3, η_3), (ξ_4, η_4) . . . (ξ_9, η_9). Die dem ersten Umlauf des Vectors (ξ_3, η_3) entsprechenden Linien sind ausgezogen, die dem zweiten Umlauf entsprechenden sind gestrichelt.

9. Jede Theorie der Spectrallinien, welche ein richtiges Bild der Wirklichkeit geben soll, muss von den Veränderungen Rechenschaft geben, welche die Spectrallinien durch äussere Einwirkungen erfahren. In erster Linie wird man dabei an die von Zeeman entdeckten magnetischen Wirkungen denken.

Die allgemeine Möglichkeit einer solchen Wirkung ergiebt sich auch bei der im vorhergehenden benutzten Vorstellung. Man hat nur nötig anzunehmen, dass der schwingende Ring eine elektrische Ladnng besitze; stehen die Kraftlinien des magnetischen Feldes senkrecht zu der Ebene, in welcher sich ein



bestimmter Punkt des Ringes bewegt, so werden transversale magnetische Kräfte auf ihn wirken, welche seine Bewegung und die Perioden seiner Schwingung verändern.

Man kann auch ausgehen von der Gleichung (8) und versuchen, sie durch Zusatzglieder zu ergänzen, welche einer magnetischen Einwirkung Rechnung tragen. Man kann beispielsweise zwei zu einander senkrechte Vectoren u und v den Bedingungsgleichungen unterwerfen:

$$\frac{\partial^{10} u}{\partial \varphi^8 \partial t^2} + 4 \pi^2 a^2 \frac{\partial^8 u}{\partial \varphi^8} + 4 \pi^2 b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} + 4 \pi^2 c^2 u$$

$$+ 8 \pi^2 a b \frac{\partial^6 u}{\partial \varphi^6} - 8 \pi^2 a c \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} - 8 \pi^2 b c \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

$$- \frac{e R}{m} \frac{\partial^9 v}{\partial \varphi^8 \partial t} = 0.$$

$$\frac{\partial^{10} v}{\partial \varphi^8 \partial t^2} + 4 \pi^2 a^2 \frac{\partial^6 v}{\partial \varphi^6} + 4 \pi^2 b^2 \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + 4 \pi^2 c^2 v$$

$$+ 8 \pi^2 a b \frac{\partial^6 v}{\partial \varphi^6} - 8 \pi^2 b c \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} - 8 \pi^2 b c \frac{\partial^2 r}{\partial \varphi^2}$$

$$+ \frac{e R}{m} \frac{\partial^9 u}{\partial \varphi^8 \partial t} = 0,$$

Die Gleichungen werden befriedigt durch die Ansätze:

$$u = \sum A_n \sin n \varphi \sin 2 \pi p t$$

und

$$v = \sum A_n \sin n \varphi \cos 2 \pi p t,$$

wenn

$$p' = a - \frac{b}{n^2} - \frac{c}{n^4} + \frac{e R}{4 \pi m}.$$

Setzt man andererseits:

$$u = \sum A_n \sin n \varphi \cos 2 \pi p t$$

und

$$v = \sum A_n \sin n \varphi \sin 2 \pi p t,$$

so werden die Gleichungen befriedigt, wenn:

$$p'' = a - \frac{b}{n^2} - \frac{c}{n^4} - \frac{e R}{2 \pi m}.$$

Für die Differenz der Schwingungszahlen ergiebt sich:

$$p' - p'' = \frac{e R}{2 \pi m}.$$

Dies ist die Formel, welche sich in der elementaren Theorie des Zeemanphänomens für die Differenz der Schwingungszahlen der circularen Wellen ergiebt. Die Uebereinstimmung beruht aber auf einer willkürlichen Ergänzung der Gleichung (8); wirkliche Bedeutung würde sie erst bekommen, wenn es gelänge, die Gleichungen (8) mit den allgemeinen Theorien der Elektrooptik in Beziehung zu bringen.

(Eingegangen 9. Januar 1900.)

16. *Lichtenberg'sche Figuren im Innern von Röntgenröhren; von E. Riecke.*

(Aus den Nachrichten d. K. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen mit einigen Zusätzen abgedruckt.)

Bei den Bestäubungsversuchen, welche ich bei einigen Crookes- und Röntgenröhren angestellt hatte[1]), war mir eine Erscheinung aufgefallen, die sich bei einer kugelförmigen Crookes'schen Röhre zeigte. Bei der Bestäubung schlug sich das rote Mennigepulver gegen den Rand des der Kathode gegenüber entstehenden Fluorescenzfleckes in keulen- oder lappenförmigen Gebilden nieder, wie sie in den Figg. 1 und 2 meiner früheren Mitteilung gezeichnet sind. Diese Bildungen waren bei einigen anderen Versuchen, deren Ergebnisse leider

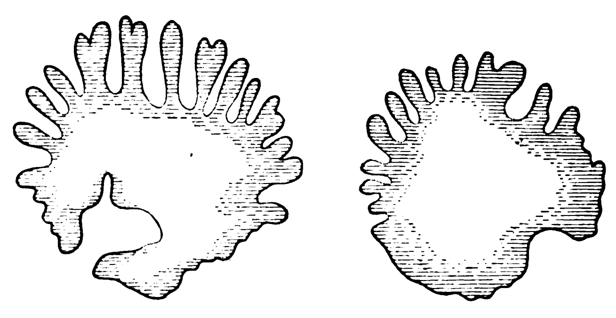


Fig. 1.

nicht durch ein photographisches Bild festgehalten worden sind, noch deutlicher hervorgetreten. Ich gebe daher in Fig. 1 zwei andere Bilder von solchen Staubfiguren. Die Conturen der Lappen waren dabei auf einem Pauspapier durchgezeichnet worden, das, mit einigen Einschnitten versehen, unmittelbar auf die bestäubte Kugel gelegt war. Bei den beiden Versuchen, welchen die Figuren 1 entsprechen, war die Anode zur Erde abgeleitet.

Ich habe nun bemerkt, dass diese Figuren ohne jedes weitere Hülfsmittel gesehen werden können. Wenn man die

1) E. Riecke, Wied. Ann. 69. p. 788. 1899.

der Kathode gegenüberliegende Glasoberfläche betrachtet, so sieht man, dass sie keineswegs gleichmässig fluorescirt; man findet vielmehr, dass auf derselben dunklere Bänder sich bilden, welche gegen die Anode der Röhre in mehr oder weniger gekrümmten Bahnen sich hinziehen. Zuweilen kann man beobachten, wie ein solches Band, das keulenartig bis auf eine gewisse Entfernung von der Anode sich erstreckte, plötzlich eine gegen diese gerichtete Verlängerung bekommt. Der Grund der Erscheinung ist offenbar der folgende. Wenn die negative Elektricität sich in den keulenförmigen Lappen der Figuren 1 anhäuft, so wird durch die Rückwirkung der negativen Ladung die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen an diesen Stellen vermindert. Die Strahlen werden zugleich seitlich deflectirt. Die Fluorescenz des Glases wird also an den von der negativen Elektricität bedeckten Stellen schwächer sein, als an den von ihr freien, die ersteren erscheinen dunkel auf hellem Grunde. Damit ist aber zugleich auch der Grund für die Veränderlichkeit der Figuren gegeben. Sobald durch die fortdauernde Kathodenstrahlung die Verteilung der negativen Elektricität an der Glasoberfläche eine andere wird, sobald werden auch die Intensitätsverhältnisse des Fluorescenzlichtes geändert. Es verschwinden Stellen, die bisher dunkel waren und treten neue auf. So kommt ein Hin- und Herwogen des Fluorescenzlichtes zu Stande, welches ganz den Anschein eines hin- und herwogenden Fluidums erweckt.

Im weiteren Verlaufe der Beobachtungen erlitten die Figuren eine sehr eigentümliche Veränderung, von der jetzt die Rede sein soll. Die Entladungsröhre wurde hart, sodass die Entladungen unter Umständen überhaupt nicht mehr durchgingen, der Ausgleich der Elektricitäten sich vielmehr in Büscheln oder Funken durch die Luft hindurch vollzog. Durch Commutiren des Stromes liess sich dann ein Zustand herstellen, bei dem die Entladung eben noch durch die Röhre ging. An Stelle der keulen- und lappenförmigen Gebilde der früher beschriebenen Figuren traten jetzt überaus zierliche Dendriten von ziemlicher Ausdehnung und reicher Verästelung, von dem Aussehen gewöhnlicher Lichtenberg'scher Figuren bei positiver Entladung. Ebenso wie die früheren Figuren hoben sich auch diese dunkel von hellem Grunde ab.

Diese Dendriten waren sehr schön noch an einer anderen Stelle der Röhre zu beobachten. Ich habe in meiner früheren Mitteilung erwähnt, dass bei der Bestäubung auf der Röhre etwas hinter der Fläche der Kathode ein feiner Ring roten Staubes sich bildete. Dieser entspricht einem an derselben Stelle liegenden hell fluorescirenden Ringe, herrührend von Kathodenstrahlen, die seitlich aus dem Rande der Kathode hervorbrechen. Diesem Ring ist eine schmale, dunkle Zone nach aussen hin vorgelagert, und von dieser aus entwickeln sich zahlreiche kleinere Dendriten nach der Aussenseite des Ringes hin. Fig. 2 mag dies anschaulich machen.

Die Betrachtung der Erscheinungen erweckt den Eindruck von einem allmählichen Entstehen der Dendriten; in diesem

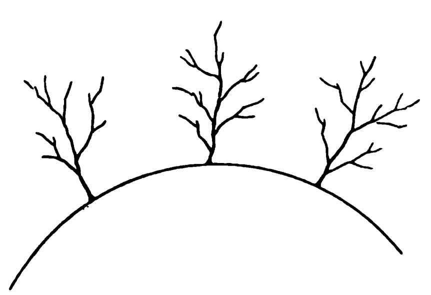


Fig. 2.

Falle würde es sich dabei um ein Kriechen der negativen Elektricität an der Oberfläche des Glases handeln, eine Bewegung, welche sichtbar wird, weil in allen Stellen, die von der Ausbreitung der negativen Elektricität getroffen werden, die Intensität der Fluorescenz sich vermindert.

Diese Anschauungen wurden bestätigt durch Beobachtungen mit einer zweiten birnförmigen Röntgenröhre; der Druck in der Röhre war wesentlich höher als bei der zuvor besprochenen, als Röntgenröhre war sie nur sehr wenig wirksam. Bei dieser Röhre war die fluorescirende Fläche gegenüber der Kathode durch einen hellgrünen Ring begrenzt, dem nach aussen hin eine dunklere, schmale Zone vorgelagert war. Wenn der Entladungsstrom einige Zeit durch die Röhre gegangen war, so waren die Grenzen dieser Zone stationär, die äussere Grenzlinie war nicht gerade, sondern leicht gewellt oder gezackt. Nun wurden durch Erregung eines Magnet-

feldes die Kathodenstrahlen gedreht, sodass die Grenze der fluorescirenden Fläche um etwa 1 cm vorgeschoben wurde. Dann spielte sich der folgende Vorgang ab. Die der fluorescirenden Fläche vorgelagerte dunkle Zone war zuerst geradlinig begrenzt; bald aber wuchsen aus ihr schmale Stile oder Spitzen hervor, dunkel auf dem hellen Grunde sich abhebend; vgl. Fig. 3, in welcher die gestrichelte Linie die ursprüng-

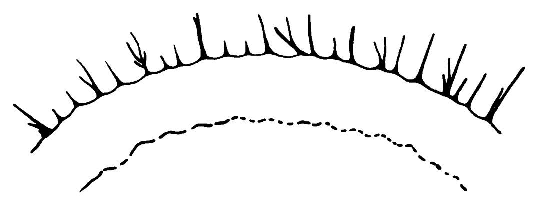


Fig. 3.

liche Lage der dunkeln Zone angiebt. Zu einer seitlichen Verästelung jener Stile kam es nur in geringem Maasse, allmählich rückte die Basis, von welcher die dunklen Stile sich erhoben, gleichfalls nach aussen vor, bis die Grenze der dunklen Zone wieder das Ansehen der gestrichelten Linie angenommen hatte.

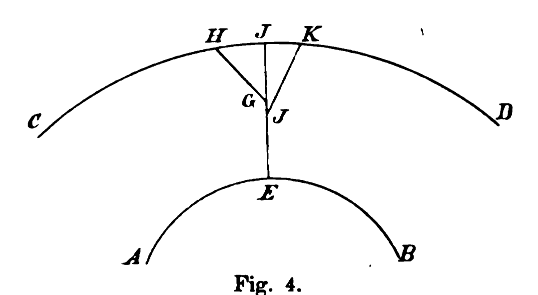


Fig. 4.

Zum Schluss möge versucht werden, für die Bildung der geschilderten dendritischen Figuren auch von theoretischer Seite einigen Anhalt zu gewinnen. Der Bogen AB (Fig. 4) begrenze das Gebiet, in welchem durch die einfallenden Kathodenstrahlen eine allmählich steigende Ladung des Glases mit negativer Elektricität erzeugt wird. Jenseits der Curve CD befinde sich ein Gebiet mit positiver Ladung. Die Teilchen

der negativen Elektricität mögen von der Oberfläche des Glases mit einer gewissen Kraft festgehalten werden, und sie mögen bei der Bewegung längs der Oberfläche einer gewissen Reibung unterliegen. Ist nun *EF* die Linie, längs welcher der Abfall des elektrischen Potentiales am grössten ist, so wird längs dieser Linie zuerst eine Bewegung der negativen Elektricität eintreten. Wenn aber infolge hiervon die Linie *EF* mit negativer Elektricität bedeckt wird, so erleidet auch die Verteilung des Potentiales eine Veränderung. Sei nun die Linie *GH* die Linie des stärksten Abfalles, so wird die weitere Bewegung der negativen Teilchen längs *GH* erfolgen. Bei den hierdurch von neuem veränderten Ladungsverhältnissen sei *JK* die Linie des stärksten Gefälles, dann wird sich das neue Vor-

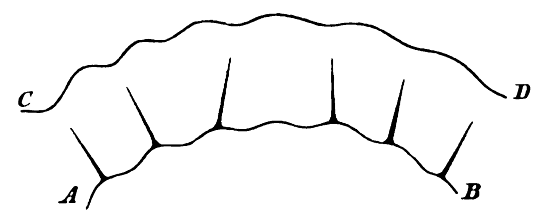


Fig. 5.

rücken der negativen Elektricität längs *JK* vollziehen u. s. f. Man kann sich hiernach wenigstens im allgemeinen eine Vorstellung davon bilden, wie eine Verästelung der Ausstrahlung zu Stande kommen mag. Dies weiter und ins einzelne hinein zu verfolgen, würde kaum möglich sein, um so weniger, als man sich ja auch die positive Ladung nicht als eine unbewegliche und unveränderliche denken darf.

Es mögen andererseits *AB* und *CD* (Fig. 5) Grenzen positiver und negativer Gebiete sein, welche einen wellenartigen Verlauf besitzen, im ganzen aber einander parallel gehen. In diesem Fall wird nicht eine einzige Linie existiren, längs welcher der Potentialfall ein Maximum ist, vielmehr werden mehr oder weniger dicht bei einander liegend viele Linien vorhanden sein, längs deren der Potentialfall grösser ist, als in der Nachbarschaft. Es wird also in diesem Falle ein Vorwärtskriechen der negativen Elektricität gleichzeitig auf vielen

Linien erfolgen. Es erscheint ferner möglich, dass durch diese mehr gleichmässige Ausbreitung der negativen Elektricität der Abfall des Potentiales im ganzen so verringert wird, dass es zu einer Ausbildung seitlicher Aeste nicht mehr kommt. Eine ähnliche Wirkung, wie durch eine wellenförmige Gestalt der Grenzen, kann natürlich auch durch einen wellenförmigen Wechsel in der Ladungsdichte erzeugt werden.

(Eingegangen 8. December 1899.)

17. *Ueber das Verhalten der Leuchtschirme in Röntgenstrahlen; von J. Precht.*

Von früheren Versuchen[1]) schienen mir für die Erkenntnis des Wesens der Röntgenstrahlung am wichtigsten diejenigen, die eine Aenderung, und zwar ein Anwachsen der Helligkeit von Fluorescenzschirmen, mit der Zeit ergeben hatten.[2]) Ist diese Zunahme der Helligkeit nicht von einer chemischen Veränderung der benutzten Substanz begleitet und nicht die Folge einer solchen, so scheinen die Versuche sehr zu Gunsten der Hypothese zu sprechen, dass die Strahlung aus materiellen Teilchen von sehr kleiner Grössenordnung besteht, die sich mit endlichen Geschwindigkeiten durch den Raum bewegen.

Eine chemische Veränderung ist bei den von mir benutzten Schirmen auch bei sehr starkem Gebrauch mit gewöhnlichen Mitteln nicht nachweisbar. Obgleich die Schirme die aus verschiedenen Quellen bezogen sind, dauernd im Dunkeln zwischen Metallblechen aufbewahrt werden, zeigt sich bei keinem eine Farbenänderung oder Ermüdung, wie sie P. Villard[3]) beschrieben hat. Ergiebt sich hieraus einerseits, dass diese Veränderungen jedenfalls keiner allgemeinen Eigenschaft des Baryumplatincyanürs etc. zuzuschreiben sind, so sind sie überdies im vorliegenden Falle bedeutungslos, da es sich hier um eine Zunahme des Leuchtens während sehr kurzer Zeiten, nicht um eine mit der Bräunung der Schirme parallel gehende dauernde Abnahme der Helligkeit des Fluorescenzlichtes handelt.

Der Charakter der in Frage stehenden Erscheinung wird am besten, wenn auch nicht in ganz reiner Form, mit Hülfe eines Schwefelzinkschirmes erkannt. Der benutzte Schirm bestand aus grünlichblau phosphorescirender Sidot'scher Blende[4])

1) J. Precht, Wied. Ann. **61.** p. 330. 1897.
2) l. c. p. 347.
3) P. Villard, Compt. rend. **126.** p. 1414. 1898.
4) E. Sidot, Compt. rend. **63.** p. 142. 388. 1866.



(hexagonales Schwefelzink). Exponirt man einen solchen Schirm der Strahlung einer Röntgenröhre unter Vorschaltung der Hand, so sieht man zuerst nur das Schattenbild der ganzen Hand, nach einer gewissen Zeit heben sich die Knochen der Finger, nach längerer Zeit die Mittelhandknochen dunkel von der helleren Umgebung ab. Misst man die Zeit, nach der die Mittelhandknochen sich eben merkbar von der Umgebung abheben, so erhält man für verschiedene Potentialdifferenz der Elektroden, bestimmt durch die im Nebenschluss gemessene Funkenlänge, z. B. folgende Zahlen:

Funkenlänge	30 mm:	30	25	24	15	8	6	sec
„	25 mm:	33	27	30	26			sec
„	20 mm:	48	48	34	22	22	22	sec
„	10 mm:	62	36	16	13	12	10	sec

Der Abstand der Antikathode war hier, wie in allen späteren Versuchen, 25 cm. Als Elektricitätsquelle diente eine zwanzigplattige Toeplermaschine. Die Zahlen sind frei von subjectiven Täuschungen durch Gewöhnung des Auges, da stets erst nach längerem Ausruhen im Dunkeln beobachtet wurde. Sie sollen indessen nur als typisches Beispiel des Verlaufes dienen. Es zeigt sich, dass mit wachsender Elektrodenspannung, also mit wachsender *Härte* der Röhre, die Zeit abnimmt und dass sie ferner bei derselben Spannung in aufeinander folgenden Beobachtungen immer kleiner gefunden wird. Die letztere Erscheinung erklärt sich aus zwei verschiedenen Umständen, zum Teil daraus, dass bei jeder Röhre beliebiger Potentialdifferenz die Luftverdünnung und damit die Härte der Röhre durch den Gebrauch ansteigt und zwar um so schneller, je grösser der absolute Wert der Elektrodenspannung ist, zum Teil aus der Anwendung des Schwefelzinkschirmes. Die künstliche Blende, die überdies thermoluminescirt und durch Funkenlicht erregt wird, hat als phosphorescirende Substanz die für diese Versuche störende Eigenschaft, nach der Erregung längere Zeit nachzuleuchten. Wenn nun auch durch Anwendung eines sehr grossen Schirmes und Benutzung frischer Stellen desselben für jeden Versuch dieser Einfluss stark herabgemindert werden kann, so beeinträchtigt das Nachleuchten doch die Reinheit der Resultate, wenn grosse

Bestrahlungszeiten nötig sind, wie der letzte der angeführten Versuche erkennen lässt.

Für die weiteren Versuche sind daher vorzugsweise Baryumplatincyanürschirme benutzt worden. Bei diesen hört das Leuchten mit der Bestrahlung gleichzeitig auf. Die Zeiten bis zur Erreichung der grössten Helligkeit sind meist beträchtlich kleiner, im übrigen bleibt aber die Erscheinung ihrem Wesen nach dieselbe: Härtere Röhren geben kleinere Zeiten, die Zeit wächst bei gleicher Elektrodenspannung mit dem absoluten Wert der Undurchsichtigkeit des eingeschalteten Objectes. So erhält man z. B. stets grössere Zeiten bei Einschaltung mehr oder weniger dicker Schichten bedruckten Papieres zwischen Hand und Schirm. Wollte man den Durchgang der Strahlen durch Schichten wachsender Dicke etwa mit der selectiven Absorption der Körper für Wärmestrahlen vergleichen, so wäre ein grösseres Durchdringungsvermögen der filtrirten Strahlen zu erwarten. Das entgegengesetzte Ergebniss des Versuches scheint also auch hier für die Theorie bewegter Teilchen zu sprechen.

Um die Zeit bis zur Erkennbarkeit des gleichen Contrastes für stufenweis variirende Undurchsichtigkeiten vergleichen zu können, habe ich eine Art Schichtenphotometer benutzt. Stücke von Kupfernickelpapier werden so übereinander gelegt, dass 15 Felder entstehen, die einer von 1 bis 15 variirenden Schichtdicke entsprechen. Die Schichten werden zwischen zwei Aluminiumplatten mit 15 Löchern von 1 cm Durchmesser zusammengepresst, sodass man für jedes Feld den Unterschied der Durchsichtigkeit zwischen Photometerschicht und Schicht plus 1,5 mm Aluminium als Contrast benutzt. Man misst die Zeit, nach der dieser Contrast wahrnehmbar wird, indem man irgend ein Photometerfeld durch einen grossen Bleischirm mit centralem Loch von 2 cm Durchmesser aus der Umgebung abgrenzt. Der Bleischirm bildet die Vorderwand einer improvisirten Dunkelkammer, von der aus der Beobachter mit Hülfe einer einfachen Hebelvorrichtung das Photometerfeld gegen die strahlende Röhre hin freilegen oder durch eine dicke Bleiplatte verdecken kann. Von den auf diese Weise sehr bequemen Beobachtungen sind einige in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Die Schirme verschiedener Herkunft (alle

mit Baryumplatincyanür als wirksamer Substanz) sind durch Nummern gekennzeichnet.

Röhre	Funkenlänge	Photometer-feld	Schirm	Zeit in Secunden
A	80 mm	3	II	0 0
A	60	3	II	6 5 5 0
A	60	3	I	3 0 0 0
A	60	6	II	37 30 22 20
A	60	6	I	20 25 20 22
B	60	8	I	8 5 5 0
C	25 } 10 }	3	I } II }	0
C	5	3	I	10 10 8
C	5	3	II	13 14 12
C	0,04	3	II	20 14 12
C	0,04	3	I	8 4 6 2 4

Da diese Beobachtungen nicht zu principiell neuen Resultaten führten, kann ich von der ausführlichen Mittheilung des Zahlenmateriales absehen. Von Interesse ist, dass man mit dem Inductorium im allgemeinen kleinere Zeiten findet; bei Spannungen von 40 mm und mehr verschwindet die Wirkung sehr oft ganz. Doch hängt das Resultat stark vom momentanen Zustand der Röhre ab; so gab z. B. bei Betrieb mit dem Inductor eine Röhre von 60 mm Elektrodenspannung für die Photometernummer 6, entsprechend 6 Schichten Kupfernickelpapier, eine Zeit von 22,4 Secunden im Mittel aus 10 Versuchen. Da indessen dieselbe Röhre bei derselben Spannung und unter scheinbar ganz gleichen Bedingungen auf demselben Schirm selten die gleichen Resultate ergab, wenn man sie an verschiedenen Tagen untersuchte — unter Umständen sah man den Contrast sofort, bisweilen war überhaupt gar keine Differenz zwischen Loch und Umgebung zu erkennen — so habe ich schliesslich diese Methode der Untersuchung aufgegeben und, wie es scheint mit mehr Erfolg, einen ganz anderen Weg eingeschlagen, über den ich demnächst berichten werde.

Heidelberg, Physikal. Inst. d. Univ., 10. November 1899.

(Eingegangen 22. November 1899.)

18. *Ueber den Einfluss der Erhitzung auf das elektrische Leuchten eines verdünnten Gases;* *von J. Stark.*

I.

E. Wiedemann[1]) hat festgestellt, dass die Temperatur in einem verdünnten Gase, das unter dem Einfluss elektrischer Entladungen die gewöhnlichen Leuchterscheinungen (positive Lichtsäule, dunkler Trennungsraum etc.) zeigt, im allgemeinen unter 100° liegt; hieraus hat er den Schluss gezogen, dass das elektrische Leuchten verdünnter Gase nicht eine Glüh-, sondern eine Phosphorescenzerscheinung sei. Nach ihm sind noch andere Forscher zu dem gleichen Resultate gekommen.

Man kann nun fragen, in welcher Weise das elektrische Leuchten eines verdünnten Gases dadurch beeinflusst wird, dass man dieses durch irgend welche Mittel unabhängig vom Entladestrom erhitzt.

Faye[2]) hat beobachtet, dass das positive Licht zwischen sich und einem glühenden Platinblech einen dunklen Raum lässt. K. Wesendonck[3]) hat Faye's Versuche in eingehender Weise wiederholt, ist jedoch ebensowenig wie jener zu einem klaren, widerspruchsfreien Resultat gekommen. Beide arbeiteten mit dem Inductorium; dieses ist aber zu derartigen Versuchen nur mit Vorsicht zu verwenden. Wie nämlich E. Goldstein[4]) erkannte, vermag unter dem Einfluss des glühenden Körpers, der zur Erhitzung in das verdünnte Gas eingeführt ist, auch der Schliessungsinductionstrom das Gas zu durchbrechen; hierdurch werden aber die Leuchterscheinungen verwickelt.

---

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **6.** p. 298. 1879; **10.** p. 202. 1880; **20.** p. 756. 1883.

2) H. Faye, Compt. rend. **1.** p. 894. 960. 1860.

3) K. Wesendonck, Wied. Ann. **26.** p. 81. 1885.

4) E. Goldstein, Wied. Ann. **24.** p. 86. 1885.

W. Hittorf[1]) hat, ohne näher auf derartige Versuche einzugehen, gefunden, dass ein weissglühender Platindraht im positiven Teil einer Entladung, die er mit seiner Hochspannungsbatterie erzeugte, das positive Licht in seiner Nähe auslöscht.

Zur Untersuchung des Einflusses der Erhitzung auf das elektrische Leuchten verdünnter Gase dient am besten eine Influenzmaschine oder eine Hochspannungsbatterie. Zu den im Folgenden beschriebenen Versuchen wurde eine Batterie verwendet, die aus 2000 Accumulatoren bestand. Die Entladeröhren waren teils 3 cm weite, 40 cm lange Röhren, teils gewöhnliche Glühlampen mit grosser Birne. Als Elektroden dienten 1 cm lange Aluminiumstifte. Die Erhitzung des verdünnten Gases wurde durch deltaförmige Kohlenfäden bewirkt; diese waren senkrecht zur Entladebahn in verschiedenen Abständen von den Elektroden in das Gas eingeführt. Bei den verwendeten Glühlampen traten senkrecht zur Fadenebene entweder beide Elektroden auf die Strecke von 0,5 cm aus eng anliegenden Ansatzröhren in den Raum der Glasbirne oder es war die eine in der Axe der Kohlenspirale so verlängert, dass ihre freie Oberfläche gerade von dem Kohlenfaden umwunden war. Um eine längere Entladungsbahn zu gewinnen, wurde an einige Glühlampen senkrecht zur Fadenebene ein 20 cm langes Rohr mit einer Aluminiumelektrode angesetzt und dieser im Raum der Birne eine zweite Elektrode gegenübergestellt. In einigen Entladeröhren dienten auch Kohlenfäden als Elektroden. Die Kohlenfäden wurden durch isolirte Accumulatorenbatterien nach Bedarf galvanisch erhitzt.

II.

In diesem Abschnitt sollen zunächst gewisse Erscheinungen besprochen werden, welche das elektrische Leuchten von der Erhitzung abhängig erscheinen lassen, in Wirklichkeit aber mit dieser nur mittelbar zusammenhängen.

Besitzt die Spannung an den Elektroden einer Entladeröhre einen solchen Wert, dass die Entladung gerade nicht mehr ein-

1) W. Hittorf, Wied. Ann. 21. p. 120. 1884.

treten kann, so erfolgt diese unter elektrischem Leuchten des Gases sofort, sowie in diesem ein Körper in Rot- oder Weissglut versetzt wird. Diese Erscheinung erklärt sich daraus, dass durch Erhitzung des Gases die Entladespannung herabgesetzt wird.[1])

Dem Umstand gemäss, dass durch die Temperaturerhöhung eines verdünnten Gases der absolute Wert der Entladespannung für die negative Elektricität ganz besonders stark herabgesetzt wird, tritt die eben bezeichnete Erscheinung sehr augenfällig auf, wenn die Kathode in Glut versetzt wird. *Bei Benützung einer glühenden Kathode erhält man in einem verdünnten Gas schon bei Anwendung einer relativ kleinen elektromotorischen Kraft eine leuchtende Glimmentladung.* Wählt man z. B. einen in eine Glühlampe eingeführten Metallstift als Anode, den hellrot glühenden Kohlenfaden als Kathode, so kann man bereits bei Anwendung von 150 Volt elektromotorischer Kraft bläuliches positives Glimmlicht wahrnehmen. Bei Weissglut des Fadens ist allerdings, wie weiter unten dargelegt wird, die Entladung zwischen Stift und Faden dunkel.

Wie bekannt ist, tritt in Glühlampen an dem positiven Zuleitungsdraht unter Umständen ein kugelförmiges bläuliches Licht auf. Dieses, von den Glühlampentechnikern blaues Flämmchen oder Aureole genannt, ist das positive Glimmlicht einer von dem positiven nach dem negativen Fadenende durch das verdünnte Gas übergehenden elektrischen Entladung[2]); eine solche ist infolge starker Erhitzung des Füllgases schon bei einer Lampenspannung von 50 Volt und weniger möglich.

Es mag hier noch eine Beobachtung mitgeteilt werden, die ebenfalls von der durch die Erhitzung bewirkten Herabsetzung der Entladespannung, im letzten Grunde wohl von einer Verstärkung der Dissociation im verdünnten Gas herzurühren scheint. Befinden sich zwischen dem Heizkörper und der Anode Schichten positiven Lichtes, so ziehen sich diese beim Erglühen des Heizkörpers vor diesem zurück-

1) J. Stark, Wied. Ann. 68. p. 922. 1899.
2) J. Stark, Wied. Ann. 68. p. 935. 1899.

weichend zum Teil in die Anode zurück, während die nach der Kathode zu liegenden Schichten ihre Stellung fast unverändert beibehalten. Besonders augenfällig ist das Zurückweichen der Schichten in die Anode dann, wenn der Heizkörper die Kathode selbst ist; erglüht diese, so fliehen vor ihr die Schichten bis auf wenige intensiv leuchtende in die Anode zurück, und der dunkle Trennungsraum wird sehr gross.

III.

Dass die eben beschriebenen Leuchterscheinungen direct eine Folge der Herabsetzung der Entladespannung und nur indirect der Erhitzung sind, geht auch daraus hervor, dass bei ihrer Erzeugung mit der Aenderung der Erhitzung eine beträchtliche Aenderung der Stärke des Gasstromes verbunden ist. Um darum einen directen Einfluss der Erhitzung auf das elektrische Leuchten rein untersuchen zu können, müssen die Versuchsbedingungen so gewählt werden, dass durch das Erglühen des Heizkörpers die Stärke des Gasstromes nicht bedeutend geändert wird. Bei Unterlassung der Verwendung glühender Kathoden ist dies dann der Fall, wenn man die Entladespannung um einige 100 Volt höher wählt als diejenige, die zur Unterhaltung der Entladung gerade ausreicht.

Bei Einhaltung dieser Maassregel macht man an Entladeröhren, in welche Kohlenfäden als Heizkörper eingeführt sind, folgende Beobachtungen. Liegt der weissglühende Heizkörper in der positiven Lichtsäule, so schwächt oder löscht er das Phosphorescenzlicht aus; ist die positive Lichtsäule geschichtet, so frisst er die benachbarten hellen Schichten auf seinen beiden Seiten; ist sie ungeschichtet, so schneidet er in sie einen dunklen Raum ein. Liegt der Heizkörper sehr nahe an der Anode, so löscht er das Glimmlicht an dieser vollkommen aus; wenn die positive Lichtsäule kurz ist, so verschwindet sie ganz, sowie der Heizkörper in ihr intensiv weiss glüht. Das negative Glimmlicht wird durch einen in ihm liegenden weissglühenden Heizkörper zwar ebenfalls stark geschwächt, aber nicht gänzlich ausgelöscht; die Fluorescenz der Glaswand in der Nähe der Kathode bleibt trotz der Nähe des Heizkörpers bestehen; die Kathodenstrahlen werden also durch einen solchen wenig behindert.

Zu beachten ist, dass bei den beschriebenen Versuchen der Heizkörper weiss glühen muss. Rotglut schwächt das elektrische Leuchten wenig; ja sie scheint es unter Umständen zu verstärken; doch rührt dies von einer Schwächung des Entladestromes infolge der magnetischen Einwirkung des Glühstromes her.

Der Einfluss der Erhitzung auf das elektrische Leuchten tritt besonders augenfällig zu Tage, wenn man die Oberfläche des Heizkörpers gross wählt im Verhältnis zu den Dimensionen der Entladebahn, z. B. bei Anwendung der Glühlampen, die in der oben beschriebenen Weise hergerichtet sind; die besten und reinsten Resultate erhält man mit den oben an letzter Stelle genannten Glühlampen, die ein 20 cm langes Ansatzrohr haben.

Zusammenfassend kann man auf Grund der eben beschriebenen Erscheinungen den Satz aussprechen: *Elektrische Entladungen bringen ein verdünntes Gas in der Nähe eines weissglühenden Körpers nicht zum Leuchten.*

Man könnte nun geneigt sein, die vorstehende, in allgemeiner Form ausgesprochene Beobachtung aus dem Auftreten von Dämpfen, die der Heizkörper bei Weissglut aussenden könnte, zu erklären.[1] Zur Stütze dieser Auffassung könnte man sich auf eine Arbeit E. Wiedemann's[2] berufen, die feststellt, dass bei einer Temperatur von ungefähr 240° das Licht eines Gemisches aus einem Gas und Quecksilber- oder Natriumdampf nur mehr die Spectrallinien des Metalles zeigt. Aber jene Auffassung ist gleichwohl nicht richtig aus folgendem Grund. Uebernähmen bei Weissglut des Heizkörpers Dämpfe, die von diesem ausgehen, ausschliesslich oder hauptsächlich die Stromleitung, so müsste dies auch der Fall sein, wenn durch weitgehende Evacuation Gase so gut wie möglich aus der Entladeröhre entfernt sind. Bei Erfüllung dieser Bedingung findet indes überhaupt kein Elektricitätsübergang mehr statt, selbst wenn man bei Anwendung von Kohlenfäden die Glut dieser Heizkörper soweit steigert, als es überhaupt möglich ist.

---

1) F. Stenger, Wied. Ann. 25. p. 39. 1885.
2) E. Wiedemann, Wied. Ann. 5. p. 517. 1878.

Die Erscheinung, dass die elektrische Entladung durch ein erhitztes verdünntes Gas dunkel ist, ist vielmehr damit zu erklären, dass *dieses durch die Erhitzung die Fähigkeit vorloren hat, durch elektrische Entladungen zu Phosphorescenz angeregt zu werden.* Dies ist wohl darin begründet, dass ein verdünntes Gas durch die Erhitzung eine chemisch-physikalische Aenderung erfährt, nämlich dass es dissociirt wird. Diese Dissociation, Zerfällung in Ionen, ist als die directe, die Erhitzung als die indirecte Ursache des Verschwindens der elektrischen Phosphorescenz zu bezeichnen. Man kann daher den allgemeinen Satz aufstellen: *Wenn ein verdünntes Gas beträchtlich dissociirt ist, so phosphorescirt es unter dem Einfluss elektrischer Entladungen nicht.*

In einer demnächst erscheinenden Abhandlung soll dieses Resultat zur Beurteilung der Leuchterscheinungen der gewöhnlichen Entladungsform herangezogen und die Beziehung zwischen Dissociation und elektrischem Leuchten allgemein und eingehend untersucht werden.

München, Physik. Inst. d. Univ., November 1899.

(Eingegangen 29. December 1899.)

19. *Ueber elektrostatische Wirkungen bei der Entladung der Elektricität in verdünnten Gasen;* *von J. Stark.*

I.

Es liegen bereits mehrere Beobachtungen[1]) darüber vor, dass ungeladene oder geladene Körper, welche dem Entladegebiet in verdünnten Gasen genähert werden, die Entladung beeinflussen. Sie gründen sich freilich auf verwickelte Versuchsbedingungen, da sie mit dem Inductorium oder hochgespannten Wechselströmen erhalten wurden. Zum Studium jenes Einflusses ist vielmehr in erster Linie eine Batterie als Quelle des Entladestromes zu benutzen.

Die hier beschriebenen Versuche wurden mit einer Batterie von 2000 Accumulatoren angestellt; die Capacität einer Zelle derselben beträgt 1 Ampèrestunde, die maximale Entladestromstärke 0,1 Ampère, der innere Widerstand 0,2 Ohm. Als Entladeröhren wurden 2—3 cm weite, 15—40 cm lange cylindrische Glasröhren verwendet.

W. Hittorf[2]) fand, dass eine von einer Hochspannungsbatterie gelieferte, durch das Telephon als unstetig erwiesene Entladung bei Berührung der Röhre mit der Hand in ihrer Stärke geändert und das unter ihrem Einfluss leuchtende Gas abgelenkt wurde.

Führt man aus einer Hochspannungsbatterie den Elektroden einer Entladeröhre eine Spannung zu, die gerade hinreicht, um die Entladung einzuleiten, so kann diese nicht eintreten, wenn man vor Schliessung des Stromkreises an die Röhre in der Nähe der Kathode den Finger oder einen Leiter legt; sowie man diesen entfernt, setzt die Entladung ein; Berührung in der Nähe der Anode vermag die Entladung nicht aufzuhalten. Geht zwischen den Elektroden bereits ein Strom über, der bei der angewendeten Entladespannung begreiflicher-

1) O. Lehmann, Die elektrischen Lichterscheinungen p. 374 bis 378, p. 399—402. Halle 1898.

2) W. Hittorf, Wied. Ann. 7. p. 566, 570. 1879.

weise unstetig ist, so wird er ausgelöscht oder wenigstens stark geschwächt, wenn man die Röhre an der Kathode zwischen die Finger fasst; berührt man die Röhre in der Nähe der Anode, so wird der Strom nur wenig geschwächt.

Die eben beschriebenen Beobachtungen erklären sich daraus, dass durch den der Kathode genäherten Leiter die Dichte der von der Kathode nach der Anode laufenden Kraftlinien verringert oder die für den Eintritt der Entladung notwendige Spannung erhöht wird. Der Unterschied zwischen der Anode und Kathode soll am Schluss behandelt werden.

Da Ladungen, die den Elektroden einer Röhre genähert werden, das Kraftfeld an diesen verändern, so ist zu erwarten, dass sie ebenso wie genäherte Leiter die Entladung beeinflussen. Gemäss dem Umstand, dass an glühenden Elektroden für die negative Elektricität die Entladespannung stärker herabgesetzt wird als für die positive, zeigt sich bei Verwendung einer hellrotglühenden Kathode und einer kalten Anode der vermutete Einfluss genäherter Ladungen in besonders deutlicher Weise. Wie ich in einer früheren Arbeit[1]) mitgeteilt habe, hemmt in einem solchen Falle eine genäherte negative Ladung (geriebener Kautschukstab) die Entladung; eine negative Wandladung hemmt ebenfalls. Eine genäherte positive Ladung hemmt nicht, ja sie löst die Entladung aus, wenn sie durch eine schwache negative Wandladung aufgehalten ist.

Mit einer gewöhnlichen cylindrischen Röhre mit gleichen axial gestellten Stiftelektroden lässt sich der Einfluss genäherter Ladungen in folgender Weise zeigen. Lädt man die Elektroden auf eine Spannung, welche zur Entladung gerade nicht mehr ausreicht, und nähert man einer von ihnen von hinten in der Verlängerung der Röhre eine mit der Batterieladung der Elektrode gleichnamige Ladung (geriebenen Glas- oder Kautschukstab), so wird die Entladung dauernd oder momentan ausgelöst; entfernt man von einer Elektrode in der Verlängerung der Röhre eine ungleichnamige Ladung, so ist das gleiche der Fall. Durch die Annäherung der gleichnamigen Ladung steigt nämlich die Spannung zwischen den Elektroden momentan an,

1) J. Stark, Wied. Ann. 68. p. 924. 1899.

ebenso bei der Entfernung der ungleichnamigen Ladung infolge des Zurückschwankens der zuvor durch jene gebundenen Ladung der Elektrode.

Es lässt sich der Einfluss genäherter Leiter oder Ladungen auf die Entladung in einem verdünnten Gas noch durch eine Reihe anderer Versuche zeigen; diese sind indes nur eine Variation der beschriebenen Grundversuche und lassen sich alle nach dem gleichen Princip erklären. Dieses ist in folgendem Satz ausgesprochen: *Wird in einem verdünnten Gas die von einer Elektrode nach der anderen gerichtete Spannung durch genäherte Leiter, Ladungen oder durch Wandladungen erhöht, so wird das Eintreten der Entladung erleichtert; wird sie erniedrigt, so wird die Entladung erschwert.*

II.

Ist die Spannung, welche von einer Batterie an die Elektroden einer Entladeröhre geliefert wird, nicht viel höher als die Entladespannung, d. h. diejenige, welche zur Unterhaltung der Entladung gerade ausreicht, so ist die Entladung unstetig; sie bringt dann ein eingeschaltetes Telephon zum Tönen und wird geschwächt durch Berührung der Röhre in der Nähe der Kathode. Eine solche Entladung in einem verdünnten Gas, die also von einer Batterie geliefert wird und unstetig ist, bringt gewisse interessante Erscheinungen hervor.

Legt man das Ohr an die Entladeröhre und berührt in der Nähe der axial oder zur bequemeren Beobachtung besser orthogonal gestellten Kathode die Glaswand mit dem Finger, so hört man einen schwachen, in der Regel sehr hohen Ton oder ein Tongemisch. In der Nähe der Kathode ist der Ton für das genäherte Ohr am stärksten; er hat also in der Gegend der Kathode seine Quelle und sei darum Kathodenton genannt.

Das Auftreten des Kathodentones ist in folgender Weise zu erklären. Infolge davon, dass die Entladung unstetig ist, dass sich also die Kathode bald lädt, bald entlädt, finden an dieser Schwankungen des Potentiales statt; diese sind begleitet von Schwankungen in der Stärke der Anziehung oder Abstossung zwischen der Kathode, der benachbarten negativ ge-

ladenen Röhrenwand oder einem genäherten Leiter; auf diese Weise gerät die Kathode und die Gefässwand bez. der genäherte Leiter in Schwingungen, deren Periode gleich derjenigen der Entladung ist.

Kurz kann man die beschriebene Erscheinung und die gegebene Erklärung in folgende Worte fassen: *Bei einer unstetigen Entladung in einem verdünnten Gas treten infolge der Potentialschwankungen an der Kathode mechanisch-akustische Schwingungen auf.*

Der Kathodenton ist um so stärker, je grösser die Entladespannung ist. Er wird in seiner Höhe durch Leiter, welche der Kathode genähert werden, verändert und zwar in verschiedenen Abständen von dieser verschieden. Der Einfluss genäherter Leiter kann auf diese Weise auch hörbar nachgewiesen werden.

Wie man leicht versteht, ist der Kathodenton um so schwächer, je grösser der Durchmesser der Röhre ist.

Durch ein einfaches Verfahren kann man einen starken Kathodenton gewinnen. Es besteht darin, dass man einen 0,5—1 cm breiten Stanniolstreifen in der Nähe der Kathode lose um die Röhre legt. Dieser erfährt dann bei unstetiger Entladung von Seiten der Wandladung bez. der Kathode eine ponderomotorische Einwirkung, gerät infolge der Potentialschwankungen an der Kathode in Schwingungen und sendet einen unter Umständen bis auf 20 m Entfernung hörbaren Ton aus.

Um einen Kathodenton auf die angegebene Weise zu erhalten, muss der Stanniolstreifen in der Regel abgeleitet oder mit einem Leiter von nicht zu kleiner Capacität verbunden werden. Je grösser die Capacität ist, die an den Stanniolstreifen angeschlossen wird, desto tiefer ist der Kathodenton.

In dem Stanniolstreifen oder überhaupt in einem Leiter, der in der Nähe der Kathode an eine von einem unstetigen Strom durchflossene Röhre gelegt ist, werden infolge der Potentialschwankungen elektrische Schwingungen inducirt; diese liegen hinsichtlich ihrer Periode zwischen den langsamen Wechselstromschwingungen und den schnellen Hertz'schen.

Ist der Kathodenton nicht sehr hoch, so bringen die von der Kathode erregten elektrischen Schwingungen ein Telephon,

das zwischen dem Stanniolstreifen und seiner Ableitung oder Zusatzcapacität eingeschaltet ist, zum Tönen; bei sehr hohem Kathodenton tönt nur mehr der Stanniolstreifen, das Telephon nicht mehr, da in diesem die schnellen elektrischen Schwingungen infolge seiner Selbstinduction ersterben.

Ein an den Stanniolstreifen angeschlossener Stanniol-Paraffincondensator kommt unter dem Einfluss der in ihm hin und her gehenden elektrischen Schwingungen durch elektrostatisch-mechanische Wirkungen an den Stanniolblättern unter Umständen ebenfalls zum Tönen.

III.

In eine Röhre seien senkrecht zur Axe als Elektroden zwei leicht federnde Drähte oder zwei etwa 3 cm lange Kohlenbügel in einer Entfernung von mehr als 50 cm voneinander eingeführt. Ist eine solche Röhre soweit evacuirt, dass die Entladespannung mehr als 1500 Volt beträgt, so *gerät beim Durchgang einer unstetigen Entladung die Kathode in starke Schwingungen, während die Anode vollkommen still steht.* Diese Erscheinung ist wie das oben behandelte Tönen einer Entladeröhre aus elektrostatischen Wirkungen zu erklären; die Kathode wird von den in ihrer Nähe auftretenden Wandladungen abwechselnd abgestossen und angezogen; ihre Ausschläge können dann besonders gross werden, wenn eine dissymmetrische Verteilung der Wandladung vorhanden ist.

Ein Telephon, das in den Kreis einer unstetigen Entladung eingeschaltet ist, lässt einen hohen Ton hören und zugleich einen tiefen, oft nur in raschen Stössen bestehenden, sobald die Kathode schwingt. Die Entladung hat also in diesem Fall eine kurze und eine längere Periode. Die Frage, mit welcher von beiden Perioden diejenige der Schwingung der Kathode übereinstimmt, kann auf folgende Weise beantwortet werden. Ist die Kathode ein Kohlenbügel, so werde dieser durch ein Telephon zu einem Kreis geschlossen. Dieses tönt dann nicht, wenn auch die Kathode schwingt; sobald jedoch dem schwingenden Kohlenfaden ein kräftiger Magnet genähert wird, lässt es infolge der auftretenden Inductionsströme den tiefen Ton der Entladung hören.

Die längere Periode der Entladung ist wahrscheinlich eine Folge der Schwingungen der Kathode; diese stehen also nicht im Einklang mit der schnell pulsirenden Entladung; ihr Auftreten ist darum nicht ganz verständlich, immerhin aber dürfen wir in ihnen mit Sicherheit eine elektrostatische Wirkung vermuten. Hierfür spricht auch der Umstand, dass sie nur in engeren Röhren zu Stande kommen, nicht in weiten, da hier die Wandladungen schwach sind.

Die Ausschläge der schwingenden Kathode sind um so grösser, je höher die Entladespannung ist. Wird darum ein als Kathode benutzter Kohlenfaden galvanisch auf Rotglut erhitzt, so werden seine Ausschläge in der Regel kleiner; wird der Faden auf Weissglut gebracht, so kommt er zum Stillstand. Durch die Erhitzung[1]) wird nämlich die Entladespannung an der Kathode stark herabgesetzt. Es verschwindet dann auch in einem Telephon, das im Kreis der Entladung liegt, jeder Ton.

IV.

Es erübrigt zum Schlusse, noch einige Worte zu sagen über die hier zu Tage getretenen Unterschiede zwischen dem Verhalten einer Entladung an der Anode und dem an der Kathode. Diese Unterschiede sind kurz gefasst folgende. Durch einen an die Entladeröhre gelegten Leiter wird die Entladung an der Kathode gehemmt, nicht an der Anode; eine unstetige Entladung wird stärker geschwächt, wenn die Entladeröhre in der Nähe der Kathode, als wenn sie in der Nähe der Anode ableitend berührt wird. Eine von einem pulsirenden Strom durchflossene Entladeröhre tönt an der Kathode, nicht an der Anode; eine unstetige Entladung vermag die Kathode, nicht die Anode in Schwingungen zu versetzen.

Die zwei letzten polaren Unterschiede sind eine Folge der Thatsache, dass an der Kathode, entsprechend dem stärkeren Potentialabfall, die Potentialschwankungen grösser sind als an der Anode. Man kann indes aus ihnen auch folgern, dass an der Anode keine oder eine vom continuirlich gleich-

1) J. Stark. Wied. Ann. **68.** p. 922. 1899.

förmigen Zustand nur wenig verschiedene Unstetigkeit vorhanden ist, an der Kathode dagegen eine Unstetigkeit mit grossen Abweichungen von einem mittleren Zustand. Für diese Folgerung spricht die Beobachtung, dass der Ton eines Telephons, das in dem Kreis einer unstetigen Entladung liegt, verschwindet, wenn die Kathode auf Weissglut erhitzt wird; nicht aber, wenn dies mit der Anode geschieht.

Die zwei zuerst genannten polaren Unterschiede sind darin begründet, dass in einem verdünnten Gas die Entladung überhaupt in einer gewissen Abhängigkeit von der Entladung an der Kathode steht, dass durch diese der Ausgleich elektrischer Differenzen an den übrigen Stellen der Entladeröhre sehr erleichtert wird; unter Störungen an der Kathode hat darum die ganze Entladung zu leiden, während Störungen an der Anode sich wenig zur Geltung bringen können infolge jener erleichternden Wirkung der Entladung an der Kathode.

München, Physik. Institut d. Univ., im Januar 1900.

(Eingegangen 15. Januar 1900.)

20. *Zur Geschichte der elektromagnetischen Dispersionsgleichungen; von P. Drude.*

In neueren Arbeiten geht W. Voigt von einem elektromagnetischen Gleichungssystem aus, dass er bezeichnet[1]) als von mir abgeleitet auf einer von Hertz herrührenden Grundlage. In einer anderen Arbeit[2]) von Voigt findet sich die Stelle: „Die Grundlage des Folgenden bilden die Gleichungen der elektromagnetischen Lichttheorie in der Erweiterung, die ihnen Hertz für die Darstellung der Dispersionserscheinungen gegeben hat.“ Am Schluss der Arbeit sind wiederum die Ausgangsgleichungen direct die „Hertz'schen“ genannt.

Diese beiden letzten Sätze enthalten nun einen Irrtum in der historischen Darstellung, der durch eine von mir in meiner Arbeit[3]) gemachte Anmerkung veranlasst ist, den ich aber richtig stellen möchte, weil jene Ausgangsgleichungen in der Zukunft wohl noch öfter benutzt werden mögen. Auch die Worte von E. Wiechert[4]) in seiner Festschrift „Ueber die Grundlagen der Elektrodynamik“ p. 107 oben:

> „W. Voigt . . . hat einen Weg eingeschlagen, dessen Anfangsrichtung durch H. Hertz angegeben wurde . . . Er geht von einem Gleichungssystem aus, das von P. Drude unter Benutzung des Hertz'schen Gedankens zunächst zur Erklärung von Dispersion und Absorption abgeleitet wurde . . .“

lassen eine ausführlichere Darstellung über die Herkunft jener Gleichungen, als ich sie in meiner citirten Arbeit gegeben habe, wünchenswert erscheinen.

---

1) W. Voigt, Wied. Ann. **67**. p. 345. 1899. — Auch in der physikalischen Zeitschrift 1. Jahrg. p. 140. 1899 spricht er diese Auffassung aus.

2) W. Voigt, Wied. Ann. **69**. p. 297. 1899. 2. Absatz.

3) P. Drude, Wied. Ann. **48**. p. 542. 1893.

4) E. Wiechert, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen.

Zur Klarstellung der Sache lasse ich hier zunächst den Anfang des Abschnittes II meiner Arbeit: „Die elektromagnetische Theorie“ folgen[1]):

„Man kann in einfacher Weise eine elektromagnetische Theorie der Dispersion erhalten, wenn man an den Gleichungen, welche zwischen der elektrischen, bez. magnetischen Polarisation und den elektrischen, bez. magnetischen Kräften besteht, festhält. (Als Anmerkung: Diesen Gedanken verdanke ich einer brieflichen Mitteilung des Hrn. Prof. Hertz.)

Dieselben lauten für Isolatoren in der Bezeichnung von Hertz:

$$(14) \qquad A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \text{ etc.} \qquad A\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}. \text{ etc.}$$

Dagegen muss man die Beziehungen, welche zwischen den Polarisationen und ihren bez. Kräften stattfinden, und welche für isotrope Körper lauten

$$(15) \qquad \mathfrak{L} = \mu L, \qquad \mathfrak{X} = \varepsilon X$$

für schnelle Schwingungen erweitern.

Für den leeren Raum ist $\mathfrak{X} = X$, man kann daher die Differenz $\mathfrak{X} - X$ als durch die Wirksamkeit der ponderabeln Molecüle herbeigeführt ansehen, z. B. sie als die Polarisation der Molecüle selbst definiren. Setzt man daher, falls mehrere Molecülarten vorhanden sind

$$(16) \qquad \mathfrak{X} = X + \Sigma \mathfrak{X}_h,$$

so kann man annehmen, dass die $\mathfrak{X}_h$ gewisser Eigenschwingungen fähig sein sollen, sei es nun deshalb, weil sie sozusagen an der ponderabeln Materie haften, sodass ihre Eigenschwingungen mit denen der $\mathfrak{X}_h$ identisch sind, sei es deshalb, weil jeder Körper gewisse Eigenschwingungen seines elektrischen Zustandes besitzt, deren Dauer aus seiner Selbstinduction und Capacität zu berechnen ist. Nach beiden Anschauungen müssen zwischen den $\mathfrak{X}_h$ und X Differentialgleichungen der Form bestehen:

$$(17) \qquad \mathfrak{X}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t} = \varepsilon_h X,$$

wobei sämtliche Coefficienten a_h, b_h, ε_h positiv sind . . .“

1) P. Drude, l. c. **48**, p. 542.

Ich lasse nun die briefliche Mitteilung von Hrn. Prof. Hertz folgen, auf die sich meine Anmerkung bezog:

„. . . Nehmen Sie es mir übel, wenn ich noch etwas näher andeute, wie ich mir seinerzeit eine Dispersionstheorie dachte, *ohne* auf specielle Vorstellungen einzugehen? Ich will Ihnen dadurch nicht im mindesten vorgreifen. Ich dachte, man sollte die Gleichungen

$$A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \quad A\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y} - 4\pi A u$$

lassen wie sie sind, aber die Gleichungen zwischen Polarisation und Kraft, nämlich:

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{X} = \varepsilon_{11} X + \varepsilon_{12} Y + \varepsilon_{13} Z \text{ etc.}$$

beweglicher zu machen, und sie in dieser Form nur als einen Grenzfall bei langsamen Veränderungen ansehen. Wenn man beispielsweise für ein homogenes Medium setzte:

$$\text{(b)} \qquad m\frac{d^2 X}{d t^2} + \varepsilon X = \mathfrak{X},$$

so erhielte man Gleichungen, welche nach meiner Ueberzeugung eine anomale Dispersion, also Dispersion überhaupt enthalten, welche sich einigermaassen durch die Trägheit der mitbewegten Materie plausibel machen lassen, und welche auch mit den vorigen zusammen eine plausible Gleichung der Energie ergeben. Aber doch gefallen mir diese Gleichungen nicht, weil die Trägheit der bewegten Materie nicht wohl $d^2 X/d t^2$ proportional zu erwarten ist, sondern eher $d^2(\mathfrak{X} - X)/d t^2$ oder einer ähnlichen Grösse. (Ist die Masse m sehr klein, so würde nur bei sehr schnellen Schwingungen ein Unterschied zwischen (a) und (b) hervortreten). Es käme also darauf an, etwas ähnlich Einfaches und doch plausibeles und ausreichendes zu finden und darin besteht die Kunst, und es würde mich dies weit mehr befriedigen als eine bei einem willkürlichen Differentialquotienten abbrechende Reihenentwickelung. Möchte Ihnen etwas Derartiges gelingen! . . .“

Weitere Mitteilungen über diesen Gegenstand habe ich vor dem Erscheinen meiner Arbeit weder brieflich noch mündlich von Hrn. Prof. Hertz erhalten.

Hieraus geht hervor, dass ich den Hertz'schen Gedanken benutzt habe, die Hauptgleichungen (14) unverändert zu lassen

und die Gleichungen (15) zu erweitern, meine Form (16) und (17) der Erweiterung ist aber wesentlich verschieden von der Hertz'schen Gleichung (b). Die in meiner Arbeit publicirten Gleichungen sind also nicht einfach als von Hertz herrührend zu bezeichnen und wenn in der Zukunft angegeben wird, dass ich eine Hertz'sche Grundlage bei jener meiner Arbeit benutzt habe, so wird man dann, wie ich denke, der grösseren Deutlichkeit halber genauer definiren, worin diese Hertz'sche Grundlage besteht. Dies wird nun nach dieser hier gemachten vollständigen Darstellung leicht möglich sein.

Zu dieser meiner Note fühle ich mich um so mehr gedrängt, weil ich weiss, dass sie ganz im Sinne von Hrn. Prof. Hertz sein würde. Derselbe zeigte sich in zwei späteren Briefen an mich nach dem Erscheinen meiner Arbeit nicht damit einverstanden, dass ich jene Anmerkung betreffs der brieflichen Mitteilung gemacht hatte, und verlangte, dass ich jene Anmerkung in einem veränderten Abdruck meiner Arbeit jedenfalls unterdrücken solle. Er schrieb dabei: „Uebrigens kümmert sich schwerlich jemand um diese Einzelheit . . .“

Da nun jene meine Anmerkung doch wichtig geworden ist und besonders nach den citirten Worten in der zweiten Voigt'schen Arbeit zu einer falschen Beurteilung der Entstehung meiner Arbeit und meiner Formeln führen kann, so sehe ich mich auch im Sinne von Hrn. Prof. Hertz zu dieser meiner Note veranlasst.

Leipzig, 6. December 1899.

(Eingegangen 9. December 1899.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

EINLADUNG

zur

72. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Aachen 1900.

Der Vorstand der Abteilung für

PHYSIK

und der Vorstand der

DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

geben sich die Ehre, die Herren Fachgenossen zu der vom 17. bis 22. September zu Aachen stattfindenden Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte ergebenst einzuladen.

Da den allgemeinen Einladungen, die anfangs Juni zur Versendung gelangen, bereits ein vorläufiges Programm der Versammlung beigefügt werden soll, so bitten wir, *Vorträge* und vor allem *Demonstrationen*, welche besondere Vorbereitungen im hiesigen Institut erforderlich machen, ***spätestens bis Ende April*** bei dem unterzeichneten Einführenden der Abteilung für Physik anzumelden. Nach den Beschlüssen auf der Münchener Versammlung soll der Abteilungsvorstand und der wissenschaftliche Ausschuss der Deutschen Physikalischen Gesellschaft in Gemeinschaft eine Gruppirung der Vorträge derart bewirken, dass Zusammengehöriges thunlichst in einer Sitzung behandelt wird. Innerhalb der Gruppen ist für die Reihenfolge der Vorträge die Zeit ihrer Anmeldung maassgebend. Es kann jedoch nicht dafür garantirt werden, dass Vorträge, die bis zum 10. September nicht angemeldet waren, auf die Tagesordnung kommen.

Ferner bitten wir, uns Wünsche in Bezug auf *gemeinsame Sitzungen einzelner Abteilungen* (Physik mit Mathematik,

Chemie u. s. w.) übermitteln und Beratungsgegenstände für diese Sitzungen bezeichnen zu wollen.

Gemäss einer in der letzten Vorstandssitzung der Gesellschaft getroffenen Verabredung soll einstweilen Mittwoch, der 19. September, für *gemeinsame Sitzungen der beiden Hauptgruppen* freigehalten werden. Die für diese Verhandlungen in Aussicht genommenen Gegenstände hofft die Geschäftsführung in kurzem bekannt geben zu können.

Der Vorstand
der Abteilung für Physik.
Einführender:
Professor Dr. **Max Wien,**
Physikal. Institut der Techn. Hochschule.
Schriftführer:
Dr. **A. Denizot. Soschinski.**

Für den Vorstand
der Deutschen Physikalischen
Gesellschaft.
E. Warburg,
z. Z. Vorsitzender.

Aachen und Berlin, im Februar 1900.

1900. № 3.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 1.

1. *Ueber Wellenstromerreger;*
von C. Heinke.

(Schluss von p. 351.)

IV. Der Einfluss secundärer Belastung.

Wird der bisher allein betrachtete, den Wellenstromerreger enthaltende Primärkreis elektromagnetisch nach Art eines Transformators mit einem Secundärkreis verkettet und im letzteren Strom inducirt bez. elektrische Energie in andere Energieform übergeführt, so lässt sich der Einfluss dieser secundären Belastung nach dem Vorausgegangenen schon einigermaassen übersehen. Zunächst ist klar, dass die secundär geleistete Arbeit nur durch das Wechselstromglied, d. i. $E_\sim$ und $J_\sim$ des Primärkreises, zugeführt werden kann, sodass der im letzteren vorhandene Gleichstrom J_g gewissermaassen toten oder Ballaststrom hinsichtlich der Inductionsübertragung von der Primärwickelung auf die Secundärwickelung des inductiven Widerstandes darstellt. Da ferner, neben den Wechselstromverlusten im Transformator (Inductorium) selbst, die secundäre Leistung $J_{II} \cdot E_{II} \cos \varphi_{II}$ durch den primären Wechselstrom in Gestalt von $J_\sim \cdot E_\sim^{2,3} . \cos \varphi_2$ zugeführt werden muss, so wird bei zunehmender secundärer Leistung, wenn eine weitere Vergrösserung von $J_\sim$ und $E_\sim^{2,3}$ auf Grund des vorhandenen Q und einer bestimmten zugeführten Spannung $E_g^{1,3}$ nicht mehr möglich ist, die Steigerung der primären Leistung durch eine Vergrösserung des Wertes $\cos \varphi_2$ (vgl. Fig. 4b), d. i. Verkleinerung von φ_2 möglich sein, bis die Stabilitätsgrenze des Wellenstromstadiums erreicht ist und Abschnappen eintritt. Die Messungen zeigen auch deutlich diese Vergrösserung von $\cos \varphi$, dessen Wert kurz vor dem Abschnappen stets am grössten ist, in Uebereinstimmung damit, dass die Stabilität der Resonanz im

allgemeinen um so grösser ist, je grösser die Winkel φ_1 und φ_2 sind.

Hiermit im Zusammenhang scheint das aus den Messungen folgende Ergebnis zu stehen, dass inductive Belastung, d. h. Nacheilen von $J_{\rm II}$ gegenüber $E_{\rm II}$ die Stabilität der Resonanz am stärksten beansprucht und wachsendes $J_{\rm II}$ am ehesten das Wellenstromstadium zu Falle bringt; bei inductionsfreier Belastung ist bereits ein höheres Hinaufgehen von $J_{\rm II}$ möglich, ehe Abschnappen eintritt, am günstigsten endlich wirkt secundäre Capacitätsbelastung oder voreilender Strom, wenn jene eine secundäre Hülfsresonanz einführt, welche die primäre unterstützt; alsdann erhält man die stabilsten Verhältnisse, wie auch die Messinstrumente und Messresultate ohne weiteres erkennen lassen (vgl. unten Tab. VI).

Der Einfluss der übrigen Grössen lässt sich unter Hinweis auf die Messresultate dahin zusammenfassen, dass im allgemeinen wachsendes Q unter sonst gleichen Verhältnissen wachsende secundäre Belastung in Gestalt von $J_{\rm II}$ zulässt, ehe Abschnappen eintritt, ebenso wachsende Spannung $E_g^{1,2}$. In Tab. V sind zunächst in den ersten vier Versuchsreihen die Resultate angeführt bei — allerdings nicht stark — inductiver Belastung, gebildet durch einen eisengeschlossenen Messtransformator, welcher bei Nr. 24 und 27 secundär offen, bei Nr. 28 und 30 seinerseits mit einzelnen Glühlampen belastet war (vgl. Fig. 6). Bei Nr. 30 war die Stabilitätsgrenze erreicht, sodass nach der zweiten Ablesung Abschnappen eintrat und ein hinreichend lange währendes Ingangbringen nicht mehr zu erzielen war; daher wurde die letzte Messreihe (eingeklammerte Werte) aus den beiden vorhergehenden mit Hülfe von Differenzbildung berechnet.[1])

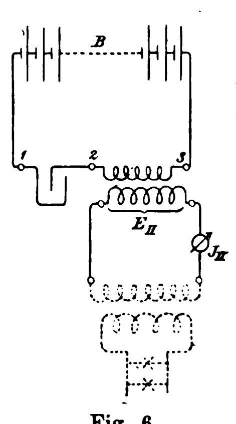


Fig. 6.

1) Bei sonst etwa fehlenden, nachher als wichtiger erkannten Ablesungen sind auch an einzelnen anderen Stellen solche indirect aus der übrigen Messungen bestimmte Werte in eckigen Klammern angeführt: ebenso bei ganz vereinzelten, nicht völlig sicheren Ablesungen die ver-

Bei Nr. 75 wurde der wiederum als inductiver Widerstand zwischen 2 und 3 benutzte Swinburnetransformator auf seiner Hochspannungsseite direct mit in Serie geschalteten Glühlampen belastet; auch hier war, wie mehrmaliges Abschnappen während der Messungen, sowie regelmässiges sofortiges Abschnappen bei Belastungsvergrösserung anzeigte, die Stabilitätsgrenze erreicht, was auch aus den Werten von $\cos \varphi_1$ und $\cos \varphi_2$ ersichtlich ist.

Ein Interesse besonderer Art können die Verhältnisse bei secundärer Capacitätsbelastung, d. h. Voreilen von J_{II} beanspruchen. Die hierauf bezüglichen Messungen sind daher gesondert in Tab. VI zusammengestellt. Als Capacität, welche mit der Hochspannungswicklung des Swinburnetransformators verbunden wurde und den Ladestrom J_{II} hervorrief, diente der bei den früheren Resonanzversuchen[1]) beschriebene Hochspannungscondensator von Swinburne mit Unterteilung in sieben Abteilungen von je etwa 0,48 Mf. wirksamer Capacität, zusammen also 3,36 Mf. Capacität bei 100 und mehr Wechseln in der Secunde. Der Vergleich mit jenen früher erhaltenen Resultaten ergiebt, dass hier offenbar eine secundäre Hülfsresonanz eingeführt wird, da bei den aus Ladestrom J_{II}, Ladespannung E_{II} und Capacitätswert C_{II} berechneten Werten von p zu $J_{II} : (C_{II} . E_{II})$ der Capacitätswert C_{II} und der Selbstinductionswert L_{II} der Hochspannungswickelung[2]) in allen Fällen fast genau die Resonanzgleichung $1 - p . C . L$ erfüllen. Diese secundäre Resonanz wirkt mittels der elektromagnetischen Verkettung im Transformator auf den Primärkreis zurück — bei der früher[3]) angegebenen mechanischen Ana-

---

muteten Werte in runden Klammern beigefügt; zwei oder drei offenbare Ableseversehen sind durch Fragezeichen kenntlich gemacht, sowie auch einzelne daraus abgeleitete Werte. Es sei ferner bemerkt, dass bei Messungen mit dem Swinburnetransformator, bei welchem $R^{2,3}$ sehr klein und deshalb $E_g^{2,3}$ wegen Kleinheit und zuweilen vorhandener Zeigervibration wenig zuverlässig ist, $P_g^{2,3}$ nicht $= E_g^{2,3} . J_g$, sondern genauer $= (J_g)^2 . R^{2,3}$ gebildet wurde, wobei $R^{2,3}$ einschliesslich Zuleitung zu etwa 0,067 Ω eingesetzt wurde.

1) C. Heinke, Elektrotechn. Zeitschr. 18. p. 62. 1897.

2) l. c., Fig. 12.

3) l. c., Fig. 8.

Tabelle V.

Nr.	Pl	J_{II} Amp.	E_{II} Volt	E_g Volt	E_w Volt	J_g Amp.	J_w Amp.	P_w Watt	$P_g = E_g . J_g$	$P_{\sim}$ Watt	$J_{\sim}$ Amp.	$E_{\sim}$ Volt	$P_s = E_{\sim} . J_{\sim}$	cos φ	φ
24	+ 10 mm	0,10	1200	59,5	—	14,6	16,1	841	870	− 29	6,78	—	—	—	—
	mit ca.	0,10	1200	58,5	(138)	14,7	16,2	571	860	−289	6,78	(127)	863	−0,335	−70° 25′
	40 qmm	0,10	1180	1,2	124,3	14,0	15,3	267	12	+255	6,17	124,2	767	+0,332	+70 35
27	+ 10 mm	0,075	800	48	—	12,4	13,6	546	595	− 49	5,58	—	—	—	—
	mit ca.	0,075	800	47	104,6	12,0	13,2	371	577	−206	5,58	93,5	522	−0,395	−66° 45′
	40 qmm	0,075	800	1,2	94,4	12,5	13,7	158	10	+148	5,58	94,3	526	+0,282	+73 40
28	+ 20 mm	—	—	46,5	—	17,6	20,0	745	819	− 74	9,5	—	—	—	—
		0,15	—	44,5	111,3	18,4	20,6	524	820	−296	9,28	102,1	949	−0,312	−71° 50′
		0,15	[950]	1,2	97,4	17,4	19,6	237	18	+219	9,05	97,3	880	+0,249	+75 35
30	+ 20 mm	0,225	—	41,0	—	13,4	15,4	480	550	− 70	7,58	—	—	—	—
		0,225	—	40,5	85,4	13,2	15,0	273	535	−262	7,14	75,2	536	−0,490	−60° 40′
		—	—	[0,9]	[74]	—	—	[207]	[13]	[+194]	[7,14]	[74]	[528]	[+0,368]	[+68 25]
75	+ 40 mm	0,515	—	36,0	40,0	27	29,5	810	972	−162	11,9	17,5	208	−0,78	−38° 40′
		0,530	—	35,0	82	25,5	28,5	431	918	−487	12,7	74	940	−0,518	−58 50
		0,540	—	1,5	69,4	24,5	27	384	40	+344	11,35	69	784	+0,439	+63 55

logie würde die secundäre Kreislaufschwingung mittels eines Doppelhebels mit dem Primärkreis zu verknüpfen sein — und unterstützt die dortige Resonanz bez. leitet Resonanzschwingungen ein, durch welche der wirksame Capacitätswert $C^{1,2}$ (vgl. unter I.) sehr stark vergrössert wird (vgl. Tab. VI). Mit dieser Vergrösserung der Wechselstromleitfähigkeit $p.C^{1,2}$ bez. Verkleinerung des Wechselstromwiderstandes $1/p.C^{1,2}$ geht durch die ausgelösten Schwingungen bedingt eine zeitweilige Umkehr der Stromrichtung (Unterschreitung des Nullniveau von seiten der Stromcurve) Hand in Hand. Dies bedeutet, anders ausgedrückt, eine Verkleinerung der Gleichstromleitfähigkeit bez. Vergrösserung von $R_g^{1,2}$. Hieraus erklärt sich die aussergewöhnlich grosse Verschiedenheit zwischen J_g und J_w in Verbindung mit der bei dem grossen Werte von Q überraschenden Kleinheit von J_g. Die ersten sieben Messreihen der Tab. VI sind mit nahezu constanter Spannung an den Punkten 1 und 3, aber variablen Werten von $C_{II}^{2,3}$ ausgeführt und lassen bei Nr. 80 und 81 Minimal- bez. Maximalwerte von $\cos\varphi$, $1/p\,C^{1,2}$, $R_g^{1,2}$, $J_\sim$ erkennen bei Werten von p und C_{II}, welche in Uebereinstimmung mit den früheren Resonanzversuchen stehen.[1])

Zum Vergleich ist noch (Nr. 85) bei $C_{II} = 0$ beobachtet, doch waren, wie die Stromstärkenwerte erkennen lassen, die Verhältnisse hierbei wegen Erwärmung schon so labil, dass unmittelbar nach Beobachtung der letzten Messwerte Abschnappen eintrat.

Anschliessend sind noch einige Werte bei niederer Spannung hinzugefügt. Die angeführten Werte von $E_\sim^{1,3}$ sind, wie ein Blick auf Fig. 4 b erklärlich macht, wegen des stumpfen Winkels zwischen $E_\sim^{1,2}$ und $E_\sim^{2,3}$ etwas unsicher, noch mehr der daraus abgeleitete und durch kleine Messfehler oder Aenderungen in hohem Grade beeinflusste Wert von φ, d. i. $\sphericalangle\,(J_\sim, E_\sim^{1,3})$. Immerhin müssen die infolge von Ueberbestimmungen möglichen Proben für den Kundigen als ausreichend gelten, um die Zulässigkeit der Diagrammdarstellung und Auffassung der wesentlichen Erscheinungen auf Grund der Messresultate zu gewährleisten. Die Be-

---

1) l. c. p. 61.

Tabelle VI.

Nr.	Pl	E_g Volt	E_w Volt	J_g Amp.	J_w Amp.	P_w Watt	$P_g = E_g . J_g$	$P_\sim$ Watt	$J_\sim$ Amp.	$E_\sim$ Volt	$P_t = E_\sim . J_\sim$
77	+ 40 mm mit ca. 150 qmm	61,5	—	6,6	13,8	327	406	− 79	12,1	—	—
		61,2	110,2	6,6	13,8	194	403	−209	12,1	91,6	1162
		0,4	87,8	6,3	13,6	117	3	+144	12,0	87,8	1052
79		61,5	—	6,1	13,6	309	375	− 66	12,2	—	—
		61,2	115,2	6,1	13,5	178	373	−195	—	97,8	1182
		0,4	91,9	6,0	13,4	123	3	+120	12,0	91,9	1109
80		61,5	—	6,4	14,1	324	394	− 70	12,6	—	—
		61,3	117,6	6,3	14	182	386	−204	12,6	100,2	1262
		0,4	95,8	6,3	14	127	3	+124	12,6	95,8	1207
81		61,5	(62)	6,6	14,2	332	406	− 74	12,6	—	—
		61,3	121,2	6,5	14,1	185	398	−213	12,6	104,7	1319
		0,4	101	6,4	14,0	134	3	+131	12,6	101	1271
82		61,3	62,3	6,9	14,3	343	423	− 80	12,5	—	—
		61,1	127,4	6,7	14,1	187	415	−228	12,5	111,7	1398
		0,4	108,2	6,6	14,0	142	3	+139	12,5	108,2	1353
83		61,1	(61,5)	7,5	14,4	379	458	− 79	12,3	—	—
		60,5	132,3	7,4	14,3	183	448	−265	12,3	118	1452
		0,5	116,7	7,2	13,9	194	4	+190	11,9	116,7	1390
84		60,8	61,9	9,1	14,8	473	553	− 80	11,7	—	—
		59,4	143,9	9,3	14,5	191	553	−362	11,1	131	1460
		1,0	128,4	9,2	14,4	299	5,8	+293	11,1	128,4	1430
85		57,3	58,8	17	19,7	915	975	− 60	9,95	13,2	131
		57,0	163,9	15	17,3	608	855	−247	8,6	153,5	1320
		1	146,2	12,5	15	185	10	+175	8,3	146,2	1213
78		51,6	54,5	7,7	12,7	216	397	−181	10,11	17,5	177,8
		51,3	92,0	7,6	12,6	119	390	−271	10,06	76,4	769
		0,5	73	7,5	12,5	90	3,8	+ 86	10,0	73	730
104	+ 38 mm mit ca. 143 qmm	53	56,1	7,2	12,6	243	382	−139	10,33	18,4	190
		52,5	98,5	7,4	12,4	167	388	−221	9,95	84,0	835
		0,5	80,3	7,2	12,3	72	3,6	+ 68	9,98	80,3	800
105		30	39	10,1	12,2	137	304	−166	6,84	25,0	171
		29,5	58	10,2	12,2	113	300	−187	6,66	50,0	333
		0,5	43,5	10,2	12,2	24	6	+ 18	6,66	43,5	290

Tabelle VI.

$\cos\varphi$	φ	$E_C^{1,2}$ und $E_L^{2,3}$ Volt	$C^{1,2} = \frac{J_\sim}{p\,E_\sim^{1,2}}$ Mf.	$R_g^{1,2}$ Ω_r	$R_w^{1,2}$ Ω_r	$\frac{1}{p\,C^{1,2}}$ Ω_s	J_{II} Amp.	$C_{II}^{2,3}$ Mf.	E_{II} Volt	$p = \frac{J_{II}}{E_{II}\cdot C_{II}}$
—	—	—	—	—	—	—	1,15	3,36	—	385
−0,180	−79° 35′	90,0	342	9,26	1,02	7,57	1,15	—	—	—
+0,108	+83 50	87,2	—	—	—	—	1,15	—	[890]	—
—	—	—	—	—	—	—	1,10	2,88	—	412
−0,165	−80 30	96,5	304	10,0	0,98	8,00	—	—	—	—
+0,108	+83 50	91,3	—	—	—	—	—	—	[930]	—
—	—	—	—	—	—	—	1,10	2,40	—	473
−0,161	−80 45	99,0	266	9,55	0,93	7,95	—	—	—	—
+0,103	+84 —	95,3	—	—	—	—	—	—	[970]	—
—	—	—	—	—	—	—	1,00	1,92	1030	505
−0,161	−80 45	103,2	239	9,45	0,93	8,26	—	—	—	—
+0,103	+84 —	100,5	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	0,86	1,44	1110	545
−0,163	−80 35	110,2	206	9,12	0,94	8,94	0,88	—	—	—
+0,103	+84 —	107,5	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	0,80	0,96	1180	707
−0,182	−79 30	116,0	147	8,13	0,90	9,62	—	—	—	—
+0,137	+82 10	115,5	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	0,67	0,48	1300	1070
−0,248	−75 40	127,0	83,5	6,47	0,91	11,2	—	—	—	—
+0,205	+78 10	125,8	—	—	—	—	0,65	—	1280	—
—	—	—	—	—	—	—	0,0	0	—	—
−0,185	−79 20	150,9	70	3,80	2,03	17,45	0,0	0	—	—
+0,144	+81 43	144,7	—	—	—	—	0,0	0	[1460]	[820]
−1,0	—	—	—	—	—	—	0,81	3,36	—	318
−0,353	−69 20	71,5	416	6,62	0,75	7,57	0,79	—	—	—
+0,118	+83 10	72,3	—	—	—	—	0,79	—	[740]	—
−0,732	−47 —	—	—	—	—	—	0,79	2,40	—	407
−0,265	−74 40	81,0	304	7,1	1,08	8,1	—	—	—	—
+0,085	+85 10	80,0	—	—	—	—	—	—	[810]	—
−0,97	−14 —	—	—	—	—	—	0,44	2,40	—	417
−0,562	−55 50	41,4	320	2,9	0,76	7,5	—	—	—	—
+0,062	+86 30	43,4	—	—	—	—	—	—	[440]	—

obachtungen auf der Secundärseite wurden in dieser Tabelle unter Columne 20 bis 23 rechts vom zweiten Doppelstrich angeführt.

Die starke Veränderung von p abhängig von C_{II} trotz constanter Spannung E_g und constantem Wert von Q, sowie der angenähert gleich grosse Wert von $J_\sim$ trotz starker Variation von C_{II} ist beachtenswert. Diese hier beobachteten Werte der Versuchsreihen 77—84 scheinen in Verbindung mit den nur sehr wenig veränderten Werten von J_w und der erheblichen Veränderung von p auch darauf hinzuweisen, dass die für die Aufstellung des Wirkungsgesetzes des Wehneltunterbrechers[1]) bestimmende Thatsache, „*dass mit ein und demselben Unterbrecher immer dieselbe Unterbrechungszahl erhalten wird, sobald immer dieselbe Stromstärke durch den Apparat geht*", nicht für *alle* Betriebsverhältnisse gültig bleibt. Die hier vorgenommene Gleichsetzung des auf der Hochspannungs(Secundär)-Seite berechneten Wertes von p mit demjenigen der Niederspannungs-(Primär)-Seite braucht zwar nicht zuzutreffen, doch deuten die resultirenden Werte von $L^{2,3}$, welche man durch Rückwärtsrechnung erhält nur auf mässige Abweichungen zwischen dem p-Werte der secundären Spannungscurve und dem p-Werte der primären Stromcurve.

Die Zeichnung der Diagramme nach Art des schematischen Diagramms in Fig. 4b dieses Aufsatzes ist auf Grund der berechneten Werte von φ, $E_\sim$ und $J_\sim$ zur Unterstützung der Anschauung in jedem einzelnen Falle ohne weiteres ausführbar. Hierbei ist nur nochmals zu beachten, dass die auf den Wellenstromerreger bezüglichen Werte zwischen Punkt 1 und 2 in der zweiten Zeile jeder Messreihe, die auf den inductiven Widerstand bez. Transformator bezüglichen in der dritten Zeile jeder Messreihe aufgeführt sind, soweit sie nicht wie die Stromwerte J für alle gelten.

V. Bemerkungen zur Wirkungsgradfrage und zum Betrieb mit Wechselstrom.

Es sei noch auf einige in den bisherigen Publicationen über den „Wehneltunterbrecher" zur Sprache gebrachte Punkte

1) Vgl. H. Th. Simon, Wied. Ann. 68. p. 279. 1899.

eingegangen. Was zunächst die Wirkungsgradfrage, sowie die hierin weit auseinander gehenden Angaben[1]) betrifft, so dürfte in erster Linie ein Mangel an Uebereinstimmung in der Definition des hier als Wirkungsgrad Aufzufassenden vorliegen, oder überhaupt ein Fehlen dieser hier besonders nötigen Definition. Beschränkt man sich zunächst auf die mit Gleichstrom betriebenen Unterbrecher, so könnte einmal das Verhältnis der secundär abgegebenen Wechselstromleistung des Inductoriums als im vorliegenden Fall nutzbar zu der primären Gleichstromleistung als Wirkungsgrad bezeichnet werden. Der alsdann offenbar recht kleine Wert würde aber den Wirkungsgrad des Inductoriums mit einschliessen, worin eine erhebliche Unbestimmtheit läge. Für den Vergleich mit anderen Unterbrechern wäre es daher angezeigter die vom Unterbrecher an das Inductorium abgelieferte Primärleistung in Verhältnis zu setzen zu der aufgewendeten, dem Unterbrecher zugeführten effectiven Wellenstromleistung. Nach dem Vorausgegangenen wäre dieser Wert aber einmal stark von den Betriebsverhältnissen abhängig und zweites Mal wäre er auch immer noch nicht unzweideutig, denn die dem Inductorium in Gestalt von Gleichstrom zugeführte Leistung ist für den vorliegenden Zweck tot, ja hinsichtlich ihrer Wärmewirkung nicht nur Ballast, sondern schädlich; das allein Wirksame ist das Wechselstromglied und dieses wird je nach den Betriebsbedingungen einen anderen procentuellen Wert annehmen, sodass auch hierdurch grosse Verschiedenheiten in den Angaben des Wirkungsgrades η erklärlich würden. Da im übrigen die Hauptstärke des für Inductorien benutzten elektrolytischen Wellenstromerregers, sowie seine Vorzüge für den Gebrauch im Anschluss an höher gespannte Gleichstromnetze bekanntlich nach ganz anderer Seite liegen, so spielt die Wirkungsgradfrage hier nach Ansicht des Verfassers meist eine verhältnismässig untergeordnete Rolle, bedarf aber jedenfalls, wenn aufgeworfen, einer genauen Definition der Bedeutung des angegebenen Procentsatzes.

Was den Betrieb derartiger Unterbrecher mit Wechselstrom anlangt, so scheinen gegenüber den mit Gleichstrom betriebenen zwei Punkte aus der Anzahl der neuen Erscheinungen

1) Vgl. hierzu Elektrotechn. Zeitschr. **20.** p. 363. 1899 (Rundschau).

besonders der Erwähnung wert: der Uebergang von der Voltameterwirkung, welche infolge ungleicher Polarisationsspannungen und der damit zusammenhängenden einseitigen Verhältnisse auch bei Wechselstrom schwach vorhanden ist, zu dem Wellenstromstadium findet in ganz ähnlicher Weise statt wie bei Gleichstrom, d. h. von einer beliebig geringen Entladungszahl pro Secunde aufwärts steigend. Ein Zusammenhang mit der Periodenzahl des Wechselstromes wurde bisher nicht festgestellt. Bei den mit Wechselstrom betriebenen Wellenstromerregern mit Platinelektrode dürfte gegenüber den gasigen Zersetzungsproducten des Wassers der Wasserdampf als variable Dielektricumsschicht eine grössere Rolle spielen als bei Gleichstrom; sie werden sich hierin den Anordnungen mehr nähern, welche durch Verlegung des activen Querschnittes in die Glaswand die Wärmewirkung allein zur Erzeugung jener Schicht bez. der damit in Zusammenhang stehenden Wellenstromerregung benutzen. Der zweite Punkt liegt in der Möglichkeit durch Veränderung der Stromkreisverhältnisse, z. B. allmählicher Vergrösserung oder Verkleinerung des Selbstinductionscoefficienten, etwa durch Einführen oder Entfernen des Eisenkernes, ein Gleichstrom- und Gleichspannungsniveau zu schaffen, welches zwischen zwei Grenzwerten auf beiden Seiten von Null je nach dem Wert von L verändert werden kann. Die Angaben der eingeschalteten polarisirten Gleichstrominstrumente (Westoninstrumente) liefern bei einem bestimmten Wert des L und vermutlich des damit zusammenhängenden Wertes p der Wellenstromentladungen einen positiven Wert, welcher entsprechend der Aenderung von L (mit seinem p) auf Null heruntergeht, sein Zeichen umkehrt und nach der anderen übergeht. Der erhaltene Maximalwert für das durch den Wellenstromerreger erzeugte Gleichstromniveau betrug etwa 20 Proc. des zugeführten Wechselstromes, wenn für die etwas unsteten Angaben der Gleichstrom-Westoninstrumente mittlere Werte genommen werden. Häufig wird sich allerdings L bez. p nicht hinreichend variiren lassen, um vom positiven bis zum negativen Maximum in den Angaben der Gleichstrominstrumente zu gelangen.

Es konnte z. B. unter Anwendung von technischem Wechselstrom mit etwa 104 Polwechseln jener Maximalwert des Gleich-

stromniveau durch folgende continuirliche Veränderung von L herbeigeführt werden: zwei gleiche Spulen mit je 0,0872 Henry und etwas über 5 Ω Ohm'schen Widerstand wurden *parallel* geschaltet; bei einem activen Querschnitt von ungefähr 15 qmm wurden mit der in Fig. 1 angegebenen Schaltung ohne Benutzung des Wattmeters folgende Werte beobachtet.

a) Beide Spulen parallel ohne Eisenkern bei sehr starkem Entladegeräusch:

Zwischen den Punkten	J_w Amp.	J_g Amp	E_w Volt	E_g Volt
1 und 3	5,3	– 0,08	82,0	0
1 „ 2	5,15	um 0	150,0	+ 0,5
2 „ 3	5,1	um 0	136,2	0

Wurde jetzt in die eine Spule ein unterteilter Eisenkern eingeführt, so stiegen die Angaben der bei a) praktisch Abwesenheit eines Gleichstromniveau anzeigenden Messinstrumente (J_g und E_g) und erreichten ein Maximum, wenn der Eisenkern etwa zur Hälfte in der einen Spule sich befand; in dieser Stellung festgehalten waren die abgelesenen Werte:

b) Eine Spule ohne Eisenkern, die zweite parallelgeschaltete mit zur Hälfte eingeführtem Kern:

Zwischen den Punkten	J_w Amp.	J_g Amp.	E_w Volt	E_g Volt
1 und 3	4,90	+ 1,0	90,0	+ 5,5
1 „ 2	4,89	+ 1,0	73,0	+ 10,5
2 „ 3	4,89	+ 1,0	122,0	– 3,5 [5,0]

Hierzu ist zu bemerken, dass die unstäten Angaben von J_g sich während der ganzen Dauer zwischen den äussersten Grenzen + 0,6 und + 1,4 Amp. bewegten. Die Umkehr der Spannung bei der Messung an den Punkten 2, 3 ist beachtenswert.

Wurde der Eisenkern noch tiefer eingesenkt, so nahmen die Werte von J_g und E_g wieder ab und betrugen bei

c) eine Spule ohne Eisenkern, die andere mit Eisenkern:

Zwischen den Punkten	J_w Amp.	J_g Amp.	E_w Volt	E_g Volt
1 und 3	4,23	+ 0,6	95,0	+ 3,5
1 „ 2	4,20	+ 0,7	54,0	+ 7,0
2 „ 3	4,19	+ 0,7	107,0	– 3,0 [3,5]

Bei weiterer Vergrösserung von L, sei es durch Einführen eines Eisenkerns in die zweiten Spule, sei es durch Abschalten der einen Spule, war eine Herbeiführung des Wellenstromstadiums ohne Verkleinerung von Q unmöglich. Bei Reducirung von Q auf nahezu die Hälfte folgte bei einer Spule

d) eine Spule ohne Eisenkern, die andere abgeschaltet.

Zwischen den Punkten	J_w Amp.	J_g Amp.	E_w Volt	E_g Volt
1 und 3	3,70	– 0,25	98,5	etwa 0
1 „ 2	3,80	– 0,25	166,2	– 2,0
2 „ 3	3,75	– 0,25	166,6	+ 1,5

Wurden endlich beide Spulen in Serie geschaltet, so ergab sich bei sehr unregelmässigen Entladungen und Ausschlägen

e) beide Spulen ohne Eisenkern in Serie:

Zwischen den Punkten	J_w Amp.	J_g Amp.	E_w Volt	E_g Volt
1 und 3	1,90	+ 0,2	103,2	0
1 „ 2	1,90	+ 0,2	103,2	+ 3,0
2 „ 3	1,90	+ 0,2	104,4	– 3,0

Die Erklärung dieser eigentümlichen Erscheinung dürfte in folgendem liegen: durch die „Entladungen“, welche eine gewisse Einseitigkeit in den elektrischen Ausgleichvorgang hineinbringen, wird der ursprünglich symmetrische Wechselstrom innerhalb des Messbereiches eine Deformation erfahren, so zwar, dass die übergelagerten Entladungsstösse sich je nach dem Rhythmus beider verschieden bemerkbar machen. Bei constanter Maschinenwechselzahl wird also mit der langsamen Veränderung von L nebst zugehöriger Entladungszahl bez. zugehörigem Wert p eine Unsymmetrie zu Gunsten des volta-

metrischen Wertes, bald der oberen, bald keiner von beiden, bald der unteren Curvenhälfte entstehen. Bei schematischer Auftragung der Curven in Cartesianischen Coordinaten würde die Verschiebung gegen die ursprüngliche Symmetrieaxe SW des Maschinenwechselstromes im Falle b) etwa wie in Fig. 7 vorzustellen sein, wodurch eine teilweise (oder in anderen Fällen völlige) Compensation der Unsymmetrie in den Spannungen nach aussen mit einer erheblichen Unsymmetrie der Teilspannungen (vgl. oben $E_g^{1,2}$ und $E_g^{2,3}$ im Falle e) vereinbar ist; hiermit würde nicht nur das Auftreteten eines Gleich-

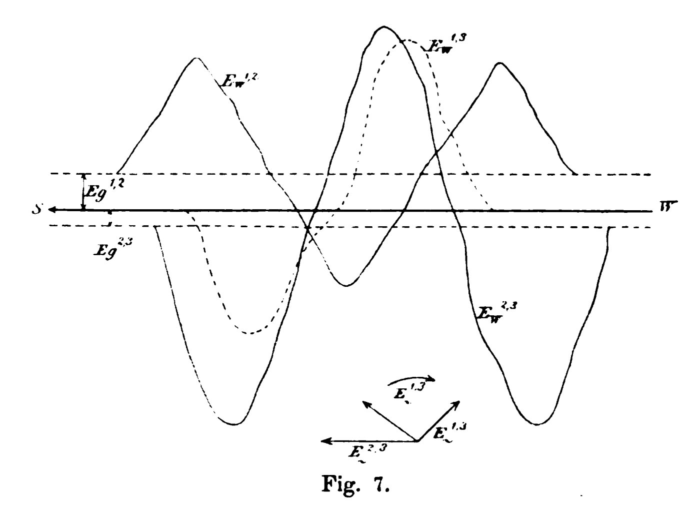


Fig. 7.

spannungsniveau, sondern auch die anfangs überraschende Gegensätzlichkeit der Spannungen von $E_g^{1,2}$ und $E_g^{1,3}$ eine Erklärung finden.

Für äquivalente Sinuswellen würde bei Drehung im Uhrzeigersinn Richtung und Grösse der Wechselspannungen im Falle b) etwa durch die drei Pfeile des in Fig. 7 beigefügten Polardiagramms dargestellt sein, wie es sich auf Grund der notwendigen Ergänzung der drei Wechselspannungen zum Dreieck jederzeit construiren lässt. Da $E_w^{1,3}$ ein gleichsfalls oberhalb von SW liegendes Niveau hat, wie auch die Combination der beiden Curven in Fig. 7 ergiebt, so erklärt sich daraus die Einseitigkeit oder das positive Niveau des aus $E_w^{1,3}$ resultirenden Stromes J_w, d. h. der Wert von J_g.

VI. Die Verhältnisse am Ruhmkorffinductor.

Eine Thatsache, welche zu Gunsten der unter I. entwickelten Auffassung zu sprechen scheint, bildet der Umstand, dass bei einem mit Condensator versehenen Ruhmkorff den obigen ganz ähnliche Strom- und Spannungsverhältnisse auftreten, wie die Messungen zeigen. Das Schema der Ruhmkorffschaltung ist in seinen wesentlichen, hier in Betracht kommenden Bestandteilen aus Fig. 8 ersichtlich. In Serie mit der Primärwickelung zwischen den Punkten 2, 3 befindet sich zwischen den Punkten 1, 2 in Parallelschaltung: die Capacität des Condensators C und die primäre Funkenstrecke F des Wagner-Neff'schen Hammers, welche als variabler Widerstand aufgefasst werden kann. Auch hier weist der grosse Unterschied der galvanometrisch (J_g) und effectiv (J_w) gemessenen Stromstärken auf das Eintreten von Wellenströmen in Verbindung mit Resonanz hin, wie die effectiven Spannungen $E_w^{1,2}$ zeigen, welche trotz des vorübergehenden Kurzschlusses zwischen 1 und 2 während des Contactes bei F doch erheblich grösser als die zugeführte Gleichspannung der Accumulatoren sind; hierbei ist noch zu berücksichtigen, dass die gemessenen Werte von E_w wegen der Selbstinduction des benutzten Weston-Wechselstromvoltmeters (vgl. unter III.) offenbar ein wenig zu klein sind. Die Grösse der Verschiedenheit

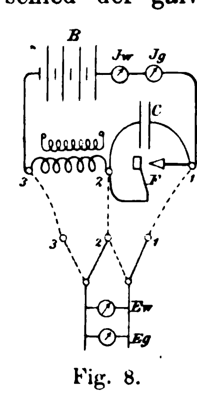


Fig. 8.

zwischen J_g und J_w lässt auch hier erkennen, dass mit dem Formfactor allein eine Erklärung kaum angängig ist, sondern dass auch hier eine Schwingungserscheinung vorliegt, bei welcher zeitweilige Stromumkehr, d. h. Unterschreitung des Nullniveau durch die Stromcurve eintritt. Auch hier kann eine dem Gleichstromniveau J_g aufgelagerte äquivalente Sinuswelle berechnet werden als ein Maass für die im Inductorium wirksame bez. nutzbare Stromstärke. Die angeführten Werte lassen erkennen, dass dieser unter $J_\sim$ in Ampère effectiv aufgeführte Wert grösser als J_g sein kann. Die an einem gewöhnlichen kleinen Ruhmkorffinductor ausgeführten Messungen ergaben, je nach den secundären Belastungsverhältnissen, folgende Werte mit der in Fig. 8 angedeuteten, der früheren ent-

sprechenden Messanordnung. Von den berechneten äquivalenten Wechselcomponenten dürfte $E_\sim$ etwas zu kleine Werte angeben wegen der ein wenig zu niedrigen Werte von E_w.

Tabelle VII.

Messungen am Ruhmkorffinductor.

Zwischen den Punkten	E_w Volt	E_g Volt	J_w Amp.	J_g Amp.	$E_\sim$ Volt	$J_\sim$ Amp.	Bemerkungen.
1 u. 3	8,86	8,25	4,57	2,45	3,23	3,86	Inductorium secundär offen, Funken bei F beträchtlich.
1 u. 2	11,1	7,73	4,9	2,7	7,96	4,09	
2 u. 3	6,6	0,31	4,98	2,80	6,6	4,12	
1 u. 3	8,32	7,55	5,05	2,90	3,5	4,14	Inductorium secundär kurzgeschlossen, Funken bei F klein.
1 u. 2	8,52	7,21	5,10	3,00	4,55	4,13	
2 u. 3	1,6	0,35	5,05	2,85	1,57	4,17	
1 u. 3	8,51	7,88	4,48	2,60	3,34	3,64	Funkenstrecke secundär, 2,5 bis 3 cm lang.
1 u. 2	9,4	7,48	4,50	2,59	5,7	3,68	
2 u. 3	4,6	0,296	4,35	2,35	4,6	3,66	

Um auch hier von den energetischen Verhältnissen ein ungefähres Bild zu bekommen, wurde neben den Spannungs- und Stromwerten noch die dem ganzen Inductorium zugeführte Leistung in Watt mit Hülfe eines direct zeigenden, compensirten Westonwattmeters gemessen, allerdings unter anderen Betriebsverhältnissen mit Rücksicht auf die bei letzterem zulässigen Maximalstromstärken. Die unter $P^{1,3}$ angeführten Ablesungen in Watt sind aber um etwa 0,30 Watt zu gross wegen des mitgemessenen Wattverbrauches der beiden Voltmeter E_w und E_g.

$E^{1,3}_w$ Volt	$E^{1,3}_g$ Volt	J_w Amp.	J_g Amp.	$P^{1,3}$ Watt	$P_g = E_g . J_g$	$E_\sim$ Volt	$J_\sim$ Amp.	Bemerkung.
5,15	4,67	2,43	1,385	4,5	6,6	2,17	2,01	
5,17	4,67	2,42	1,37	4,4	6,53	2,2	2,0	
5,21	4,67	2,50	1,37	4,0	6,53	2,31	2,09	
4,95	4,44	2,78	1,75	5,6	7,77	2,19	2,16	andere Einstellung der Schraube bei F
4,71	4,02	3,2	2,15	6,3	8,65	2,45	2,37	

Die Messungen lassen ohne weiteres erkennen, dass hier, wie bei allen sonstigen als Wellenstrom charakterisirten elek-

trischen Ausgleichvorgängen man durchaus den Satz zu beachten hat: die zur Umsetzung gelangende Leistung darf trotz Benutzung einer Gleichstromquelle weder durch das Product $P_g = E_g \cdot J_g$, noch weniger durch dasjenige der effectiv gemessenen Werte $E_w \cdot J_w$ oder eine Mischung wie $J_g \cdot E_w$ gebildet werden, da durch Einsetzen einer dieser beiden Leistungen erhebliche Fehler entstehen würden; ihre Bestimmung wird elektrisch nur durch eine Wattmetermessung ermöglicht, oder ist, falls diese unausführbar, durch eine calorimetrische Bestimmung ersetzbar, wenn man sich des Umstandes versichern kann, dass alle elektrisch zugeführte Energie innerhalb des Messbereiches endgültig in Wärme übergeführt wird.

VII. Ueber Gasentladungen mit Wellenstromcharakter.

Neben den bisher betrachteten zwei Klassen von Wellenstromerregern: den mechanischen „Unterbrechern", welche in die elektrische Ausgleichsbahn ausser metallischen Leitern nur noch *vorübergehend* Funkenstrecken einführen, und den Flüssigkeitsunterbrechern, welche die gewünschte Unterbrecherwirkung durch den Uebergang von metallischem Leiter zum Elektrolyten, oder allgemeiner durch periodische Aenderung des Aggregatzustandes am geringsten Querschnitt des Elektrolyten erzielen, wäre noch eine dritte Klasse von Wellenstromerregern zu erwähnen, nämlich diejenigen mit der Leiterkreiscombination aus metallischen Leitern und *dauernd* eingeschalteten Gasstrecken.

Wenn man auch in neuerer Zeit, wohl mit Recht, das Gebiet dieser sog. Gasentladungen mit Hülfe der Dissociationshypothese in engere Verbindung mit der elektrischen Leitfähigkeit des Elektrolyten zu bringen sucht, indem man das Leitvermögen der Gase von ihrer Ionisirung abhängig macht, d. h. auf ionisirte Gasteilchen beschränkt, so scheint es doch angezeigt, derartige, als Wellenstromerreger wirkende Combinationen des elektrischen Leitungsweges in eine dritte Klasse unterzubringen und gesondert zu behandeln. Ihre Wellenstromerregerwirkung dürfte sich nämlich in wesentlichen Punkten von derjenigen der elektrolytischen Unterbrecher unterscheiden.

Zunächst ist aber bezüglich der Gasentladungen überhaupt eine Unterscheidung in „discontinuirliche" und „continuirliche"

nötig, da nur die ersteren hier in Betracht kommen können, d. h. Wellenstromcharakter aufweisen. Die Discontinuirlichkeit bei vielen Gasentladungen dürfte unzweifelhaft nachgewiesen sein, die Continuirlichkeit, d. h. ihr Gleichstromcharakter mit praktisch ausreichender Constanz der Ausgleichstärke (Stromstärke), bei anderen sehr wahrscheinlich sein, wenn auch, wie unten zu beweisen, das hierfür als das beste angesehene Kriterium von Hertz in der bisherigen Messanordnung als nicht stichhaltig angesehen werden kann.

Beschränkt man sich für das Folgende nur auf diejenigen Fälle, in denen Gleichspannung für die Gasentladungen Verwendung findet, da die Wellenstromerregung bei Benutzung von Gleichstromquellen weitaus im Vordergrund des Interesses steht, nicht nur praktisch, sondern auch als physikalische Erscheinung, so ist zunächst eine scharfe Unterscheidung erforderlich, ob die elektrische Energiequelle bez. die zugeführte Gleichspannung die Ursache der Wellenstromerregung bildet, oder ob auch bei ausreichender Constanz der Gleichspannung der Wellenstromcharakter durch periodische Widerstandsänderung innerhalb einer Leiterstrecke erzeugt wird. Diese wichtige Unterscheidung scheint gerade auf dem Gebiet der Gasentladungen nicht immer hinreichend gemacht worden zu sein. Die gerade hier häufiger vorkommende Verwendung von Gleichspannungsquellen mit zu geringem Energiegehalt, um bei eintretender Strombildung nicht ein vorübergehendes Zusammenknicken oder Auslassen der Spannung mit nachfolgender Erholung, also eine periodische Spannungsschwankung zu verursachen, fällt nicht unter die vorliegende Betrachtung. Sonach werden bei Annahme constanter Gleichspannung nur Leiterstrecken mit *periodischer Aenderung des Ausgleichwiderstandes* als Wellenstromerreger zu gelten haben, und ihre Wirkung würde als gesonderte Erscheinungsgruppe den Erscheinungen in Leiterkreisen mit *praktisch unveränderlichen Widerstandscoefficienten* des Leitungsweges aber periodisch veränderlicher Spannung gegenüberzustellen sein. Dieser Möglichkeit einer periodischen Widerstandsänderung der leitenden Gasstrecken bei Gasentladungen scheint bisher noch nicht die genügende Aufmerksamkeit zugewendet worden zu sein, indem meist ausdrücklich oder stillschweigend der Gasstrecke ein bestimmter

Widerstand zugeschrieben wurde. Die Erscheinungen am „elektrolytischen Unterbrecher“ sind vielleicht geeignet, die Aufmerksamkeit nach dieser Richtung zu lenken. Hier wird, durch den „activen Querschnitt“ in Verbindung mit der Leitfähigkeit und Temperatur des benutzten Elektrolyten bedingt, eine Grenze des einseitig stationären Ausgleichs (Gleichstromes) erreicht und eine weitere Steigerung der Spannung vermag keine Steigerung dieses „Sättigungsstromes“ zu erzielen, sondern führt zum periodisch veränderlichen Ausgleich (Wellenstrom) und den durch Einhaltung der Energiegleichung bedingten Phasen- bez. Energieverschiebungen. Auch bei den Gasentladungen dürfte der Eintritt des „discontinuirlichen“ Ausgleiches mit einer derartigen Sättigungserscheinung am „activen Querschnitt“ zusammenhängen, wenn auch der Grund der Sättigung ein anderer ist. Beim Elektrolyten hängt die Sättigungsdichte ab von dem Uebergang der Leiterstrecke am activen Querschnitt in den höheren Aggregatzustand mit völlig anderer, d. h. viel geringerer oder gar praktisch verschwindender Leitfähigkeit und jener wird durch Wärmewirkung in etwaiger Verbindung mit elektrolytischer Zersetzung veranlasst. Bei der Gasentladung dürfte die Herbeischaffungsfähigkeit oder auch Bildungsfähigkeit von gasförmigen Ionen die Sättigungsgrenze und damit den Uebergang zur „discontinuirlichen“ Entladung oder Wellenstromerregung verursachen. Dieser als Sättigungsstrom bezeichnete *Grenz*wert ist, wie W. Kaufmann in seinem Vortrag über Ionenwanderung in Gasen[1]) anführt, in erster Linie durch den activen Querschnitt, welchem man ein gewisses einseitig begrenztes Ausbreitungs- oder auch Zuleitungsvermögen zuschreiben kann, und nicht durch das weitere Anwachsen der Gleichspannung an den Enden der Entladungsröhre bedingt. Es liegt daher nahe, sich hier wie dort vorzustellen, dass *bis zur Erreichung* jenes Vermögens ein continuirlicher Ausgleich mit Einhaltung des Ohm'schen Gesetzes, d. h. *Constanz* des Leitungswiderstandes der Strecke, sowie proportionales Anwachsen mit der Spannung vorliegt, dass bei weiterem Anwachsen der Spannung jedoch der Sättigungsstrom nicht weiter wächst, vielmehr durch *periodische Widerstandsänderung* der Strecke jener weiteren Spannungssteigerung das Gleichgewicht

1) W. Kaufmann, Physikal. Zeitschr. 1. p. 23. 1899.

gehalten wird unter Hervorrufung von Wellenstrom und der damit verbundenen energetischen Anpassungsfähigkeit mit Hülfe der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannungscurve (vgl. hierzu Tab. II, Messung 31 bis 36 die Werte unter E_g und J_g Sättigungsstrom).

Nur so scheint es auch auf ungezwungenem Wege möglich zu sein, den Anforderungen der Energiegleichung gerecht werden zu können. Die bei Gasentladungen gefundene Beziehung zwischen Wärmemenge und den elektrischen Grössen, welche zu dem Schluss geführt hat, dass die umgesetzte Energie proportional nicht mit $J^2 R$, sondern $J.R$ wachse, dürfte auf den Umstand zurückzuführen sein, dass der als constant eingeführte Ohm'sche Widerstand R der Gasstrecke keine constante, sondern eine periodisch veränderliche Grösse ist und umgekehrt proportional mit J variirt. Ob diese *periodische Widerstandsänderung* nebst dem durch sie erregten Wellenstrom, welche beim elektrolytischen Unterbrecher durch periodische Verdampfung bez. Vergasung veranlasst wird, bei Gasentladungen durch periodische Ionenleere um den activen Querschnitt, z. B. die Elektrode, zu erklären ist oder auf anderem Wege, hätten erst nähere Untersuchungen zu lehren. Hierfür wäre in erster Linie ein einwurfsfreies Kriterium für das Vorhandensein von Wellenstrom Voraussetzung. Nach den Untersuchungsergebnissen des Verfassers über den Wellenstrom kann aber die Verwendung des Ladestromes eines Condensators in Verbindung mit einem Hitzdrahtspiegelinstrument, wie sie von H. Hertz[1]) angegeben und seither vielfach verwendet wurde, in der bisher benutzten Anordnung nicht als ausreichend angesehen werden. Schaltet man nämlich, wie dort angegeben, Condensator mit vorgeschaltetem empfindlichen Hitzdrahtstromzeiger parallel zu der auf Wellenstrom zu untersuchenden Strecke x, z. B. Entladungsrohr (vgl. Fig. 9), so kann, hinreichende Empfindlichkeit des quadratisch wirkenden Stromzeigers $J_\sim$ vorausgesetzt, der Nachweis eines Ladestromes von C nur das Vorhandensein einer Wellen*spannung*

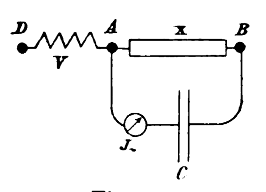


Fig. 9.

1) H. Hertz, Wied. Ann. 19. p. 782. 1883.

zwischen A und B anzeigen, nicht aber eines Wellenstromes in x; letzterer kann bei Benutzung einer Batterie mit kleinem innerem Widerstand z. B. Accumulatoren mit (praktisch) constanter Gleichspannung zwischen A und B verbunden sein, oder bei Vorhandensein eines Vorschaltwiderstandes V mit verhältnismässig sehr kleinem Unterschied zwischen E_w und E_g, d. h. kleiner aufgelagerter Wechselspannung $E_\sim$. In diesem Falle würde bei zunehmendem V und Constanz der Spannung zwischen B und D die Wellenspannung zwischen A und B immer mehr von der Gleichspannung abweichen (vgl. hierzu Tab. VI, Messung 77 und 78, sowie 104 und 105) und einen Nachweis durch den Ladestrom erst von dem Punkte an gestatten, an welchem die wegen ihrer quadratischen Wirksamkeit immerhin recht beschränkte Empfindlichkeit der Hitzdrahtinstrumente einen merkbaren Ausschlag zulässt. Die in Fig. 9 angedeutete Schaltung würde daher für die offenbar auch von Hertz angenommene Constanz des Widerstandes in x zum Nachweis ausreichen, nicht aber bei *periodischer Veränderlichkeit* desselben, wenigstens nicht ohne grossen Vorschaltwiderstand V, der ausserdem hinreichend constant, d. h. von der Stromstärke unabhängig sein müsste. Die aus dieser Beobachtungsmethode gezogenen Schlüsse bezüglich der Continuität der Entladung dürften daher vielfach nicht einwurfsfrei sein.

Schlussbemerkung.

Zusammenfassend sei nochmals bemerkt, dass die Ursachen, welche einen Wellenstrom veranlassen, in zwei Hauptklassen zerfallen; die eine umfasst die elektromotorischen Kräfte mit Wellenspannungscharakter, welche vielleicht als primäre Wellenstromerreger oder auch Wellenstromerreger erster Ordnung von der zweiten Hauptklasse als secundäre oder zweiter Ordnung zu unterscheiden wären; diese zweite würde die *periodisch veränderlichen* Ausgleichswiderstände umfassen, welche auch bei zugeführter Gleichspannung Wellenstrom erregen. Weiterhin kann man die Wellenstromerreger zweiter Ordnung wiederum in mechanische, elektrolytische und gasförmige, von denen die beiden ersteren gewöhnlich als Unterbrechervorrichtungen bezeichnet zu werden pflegen, unterscheiden. Alle Wellenstromerreger mit selbstthätigem Cha-

rakter, d. h. solche, deren Auslösung oder Bethätigung durch den Wellenstrom selbst erfolgt — namentlich aber die elektrolytischen (Flüssigkeitsunterbrecher) und die gasförmigen — bedürfen für ihren Betrieb, d. h. zum Uebergang vom Gleichstrom zum Wellenstrom als unterer Grenze der zur Hervorrufung des „Sättigungsstromes" erforderlichen Spannung. Weitere Spannungssteigerung beeinflusst, von Nebenwirkungen oder indirecten Einflüssen abgesehen, nur die Wellenzahl in der Zeiteinheit, nicht aber den praktisch constant bleibenden Sättigungsstrom, oder unter Berücksichtigung der Dimensionen des activen Querschnittes die Sättigungsstromdichte.

Bei den Messungen wurde mir von den Herren Bäumler, Lorenz und Wunder, Assistenten bez. Hülfsassistenten am elektrotechnischen Institut der techn. Hochschule in München, auf das Bereitwilligste Beihülfe geleistet, wofür ich auch an dieser Stelle meinen besten Dank ausspreche.

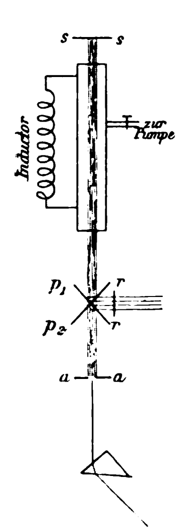
(Eingegangen 8. October 1899.)

2. *Versuch über die Absorption des Lichtes in elektrisch leuchtenden Gasen; von Mathias Cantor.*

Für die Theorie der Spectralerscheinungen schien es mir von Interesse zu sein, zu untersuchen, ob Gase, welche durch elektrische Entladungen zum Leuchten gebracht werden, durchgesandtes Licht zu absorbiren vermögen.

Diese Versuche wurden in der folgenden Weise ausgeführt:

Eine würfelförmige Kammer ist durch ein dünnes Blech in zwei Hälften getrennt. In der oberen und unteren Hälfte ist je eine Spiegelglasplatte p_1 und p_2 (vgl. Figur) in den Diagonalenrichtungen so aufgestellt, dass die beiden Platten senkrecht aufeinander stehen. Das Licht einer Bogenlampe ging durch ein Linsensystem und beleuchtete als paralleles Bündel die beiden Platten. An drei Seitenflächen der Kammer w ren je zwei Klappen angebracht, um das Licht der beiden Hälften nach Belieben abblenden zu können. Die Kammer wurde vor einem Spectralapparate aufgestellt, welcher mit einem Vierordt'schen Doppelspalt versehen war. Jenseits der Kammer befand sich ein 50 cm langes Glasrohr, das durch Spiegelglasplatten verschlossen, mit Elektroden versehen und mit einer Kahlbaum'schen Pumpe in Verbindung stand.



Das Rohr wurde so weit evacuirt, dass es beim Durchgang der Entladungen eines Inductoriums möglichst intensiv leuchtete.

Durch entsprechend angebrachte Schrauben konnte der Apparat so justirt werden, dass Licht, welches auf die obere

Glasplatte fiel, unmittelbar nach a reflectirt wurde und die *obere* Hälfte des Spaltes beleuchtete. Das Lichtbündel, welches die untere Glasplatte traf, wurde von dieser in das Rohr geworfen, an dem Spiegel ss reflectirt und gelangte, nachdem es nochmals die Röhre durchsetzt hatte, an die *untere* Hälfte des Spectralspaltes.

Es wurde nun zunächst die Schwächung, welches dieses letztere Bündel durch Absorption und Reflexion erleidet, dadurch compensirt, dass vor die obere Hälfte der Kammer ein passend gewähltes Rauchglas rr geschoben wurde, sodass die beiden übereinander gelagerten Spectra *gleiche* Helligkeit J besassen. Wenn dann das evacuirte Rohr durch elektrische Entladungen zum Leuchten gebracht wurde, so war die Intensität des Lichtes in der oberen Spalthälfte

$$J_1 = J + E.$$

Die untere Spalthälfte wurde beleuchtet durch

$$J_2 = J\,(1 - A)^2 + E.$$

Hierbei bedeutet E die Emission, A die Absorption des elektrisch leuchtenden Gases und ist die Schwächung des Bruchteiles JA in den Glasteilen vernachlässigt, was sehr wohl geschehen kann.

Beim Vergleich beider Spectra hat man

$$\frac{J_2}{J_1} = 1 - \frac{2\,A\left(1 - \frac{A}{2}\right)}{1 + \frac{E}{J}}.$$

An denjenigen Stellen des Spectrums, an welchen eine merkliche Absorption des Lichtes stattfindet, muss $J_2 < J_1$ sein; für diese Wellenlänge konnte E/J und damit A bestimmt werden. Uebrigens ist E/J sehr klein gegen 1, wenn, wie bei meinen Versuchen, als Lichtquelle eine kräftige Bogenlampe benutzt wird.

Bei wiederholten Versuchen konnte indes *keine irgend merkliche Absorption beobachtet werden.* Auch eine andere Versuchsanordnung führte zu dem gleichen Ergebnis.

Der Spectralapparat wurde so weit von dem evacuirten Rohr aufgestellt, dass das Licht der Entladung, welches sich

nach allen Seiten ausbreitet, so geschwächt an den Apparat gelangte, dass seine Intensität gegen das fast ungeschwächte einfallende parallele Licht der Bogenlampe unmerklich war.

Der Apparat wurde so justirt, dass das Licht die Röhre durchsetzen musste, um zur unternen Spalthälfte zu gelangen, während die obere Hälfte direct beleuchtet war. Durch diese Anordnung konnte die Absorption, welche das paralle Lichtbündel in dem elektrisch leuchtenden Gase eventuell erfährt, fast unbeeinflusst von dem Lichte der Entladung beobachtet werden. Allein auch bei diesen Versuchen *konnte kein Anzeichen einer Absorption* entdeckt werden.

Man gelangt sonach zu dem Ergebnis, *dass durch die elektrische Entladungen zum Leuchten gebrachte Gase trotz ihrer bedeutenden Emission das Licht nicht merklieh zu absorbiren vermögen.*

Wiederholt ist das Kirchhoff'sche Gesetz auf die Lichterscheinungen angewendet worden, welche unter dem Einfluss elektrischer Entladungen zu Stande kommen, obgleich die Voraussetzungen, unter welchen jenes Gesetz abgeleitet wird, bei diesem Vorgang gar nicht erfüllt sind.

Würde auf diese Leuchterscheinung das Kirchhoff'sche Gesetz anwendbar sein, so müsste nach dem Ergebnis des hier mitgeteilten Versuches $E/A = e$ einen ausserordentlich hohen Wert haben. e ist aber die Emission eines schwarzen Körpers von der gleichen Temperatur wie der leuchtende. Den elektrisch leuchtenden Gasen müssten demzufolge extrem hohe Temperaturen zukommen. Nun zeigen aber die Versuche von E. Wiedemann[1]) u. a., dass die Gase durch elektrische Entladungen nur sehr geringe Temperatursteigerungen erfahren. Für die betrachteten Leuchtvorgänge ist demnach das Kirchhoff'sche Gesetz *nicht* gültig, wie dies schon E. Wiedemann[2]) angenommen hat, welcher diese Lichterscheinungen als von der „normalen" wesentlich verschieden, als Luminescenz erkannte. Dass man durch elektrisch leuchtende Gase keine Umkehrung des Spectrums erhält, hat schon Hittorf[3]) be-

1) E. Wiedemann, Wied. Ann. **6.** p. 298. 1879.
2) E. Wiedemann, Wied. Ann. **34.** p. 746. 1888.
3) W. Hittorf, Wied. Ann. **7.** p. 553. 1879.

obachtet, worauf Hr. Prof. E. Wiedemann mich aufmerksam zu machen die Güte hatte.

Es folgt aber auch ferner, dass es durchaus unzulässig ist, von der in Geisslerröhren oder unter ähnlichen Verhältnissen beobachteten Emission auf eine dem Kirchhoff'schen Gesetze entsprechende Absorption oder umgekehrt zu schliessen, wie dies verschiedentlich geschehen ist.

Diese Lichtentwickelungen scheinen vielmehr die von Voigt[1]) theoretisch untersuchten „*regelmässigen*“ Erregungen zu realisiren.

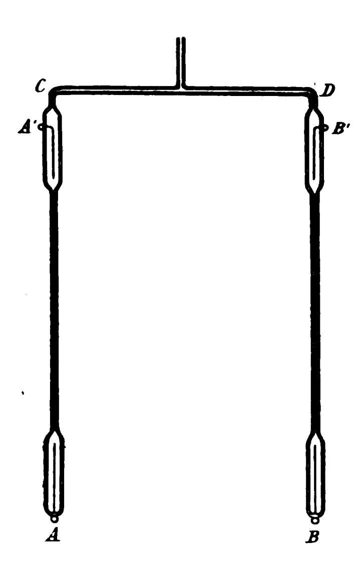
Strassburg, Physikal. Institut, December 1899.

1) W. Voigt, Wied. Ann. **67**. p. 366. 1899.

(Eingegangen 24. December 1899.)

3. *Ein Versuch zur Hypothese der elektrolytischen Leitung in Geisslerröhren;* *von H. Morris-Airey.*

Prof. J. J. Thomson beschreibt in seinem Buche: Discharge of electricity through gases einen Versuch, welcher die Convection von Chlor durch Wasserstoff unter dem Einfluss elektrischer Entladungen beweisen soll. Eine kleine Menge Chlor wird in ein Capillarrohr gebracht, welches mit Wasserstoff unter geringem Druck gefüllt ist, und die Entladung eines Inductionsapparates durchgeschickt. Das Spectroskop zeigt das Chlor nur an der Anode; kehrt man den Strom um, so erscheint das Chlor nur an der neuen Anode etc., so oft man auch den Strom umkehren mag.



Thomson zieht daraus den Schluss, das Chlor werde wirklich durch den Strom von einem Ende des Rohres zu dem andern durch das Wasserstoffgas hindurch transportirt. Aber dieser Schluss scheint nicht berechtigt zu sein, da wir wissen, dass an den beiden Elektroden eine Temperaturdifferenz vorhanden ist, und diese vielleicht für die beobachtete Wirkung genügt, indem die Chlorlinien nur an der heissesten Stelle des Rohres sichtbar werden. Es schien daher von Interesse zu versuchen, ob man eine Bewegung des Chlors auf andere Weise zeigen könne.

Es wurde daher ein Versuch mit einem Rohr gemacht, dessen Form die nebenstehende Figur zeigt, in welches bei A, A', B und B' Platindrähte als Elektroden eingeschmolzen waren. Wasserstoff mit ein wenig Chlor wurden eingelassen

und *A* und *B* mit dem Inductorium verbunden, welches Funken von etwa 6 cm gab. Bei einem Gasgemisch mit 7 Proc. Chlor bei einem Druck von etwa 2 mm Quecksilber war das Chlorspectrum in einem kleinen Teile des Rohres um die Anode sichtbar, während es in dem übrigen Teil des Rohres nicht zu entdecken war. Bei wiederholtem Wechsel der Stromrichtung ergab sich die von Thomson beschriebene Erscheinung.

Nun wurde *B* zur Anode gemacht, und wenn bei sorgfältiger Beobachtung in *A' A* keine Chlorlinien zu sehen waren, wurden die Röhren *A A'* und *B B'* an den Punkten *C* und *D* abgeschmolzen, während die Entladung hindurchging. Indem man nun auch die beiden Elektroden *A'* und *B'* benutzte, wurden beide Röhren mit dem Inductorium verbunden.

Wenn die elektrolytische Theorie von Thomson richtig wäre, so dürfte kein Chlor in dem Teile *A A'* sichtbar sein. Statt dessen erhielt man das Chlorspectrum von *A A'* leicht, und bei einem Vergleich mit *B B'* zeigte sich die Intensität der Chlorlinien in beiden Röhren identisch. Die Röhren wurden nun wieder angeschmolzen und neu gefüllt; machte man dann *A* zur Anode, so wiederholten sich die gleichen Erscheinungen.

Damit ist bewiesen, dass wenn überhaupt eine Convection des Chlors vorhanden ist, sie jedenfalls ausserordentlich gering ist und nicht genügt, um die Erscheinung zu erklären.

Hrn. Prof. H. Kayser statte ich an dieser Stelle meinen besten Dank ab für seine Anregung und Unterstützung beim vorstehenden Versuche.

Bonn, Physikal. Institut, Februar 1900.

(Eingegangen 3. Februar 1900.)

4. *Analyse oscillirender Flaschenentladungen vermittelst der Braun'schen Röhre; von F. Richarz und W. Ziegler.*

(Demonstrirt in der Sitzung des Greifswalder naturw. Vereins vom 6. December 1899.)

Bei der Wichtigkeit der oscillirenden Entladungen überhaupt, und der Entladungen von Leydener Flaschen insbesondere für die Teslaströme, ist es dringend wünschenswert, die Oscillationen möglichst anschaulich und vollständig demonstriren zu können. Die in den Entladungskreis eingeschaltete Funkenstrecke, welche O. Lodge, wie schon Feddersen, direct im rotirenden Spiegel betrachtet, nachdem er die Schwingungsdauer durch eingeschaltete Spulen mit Eisenkernen hinreichend vergrössert hat, zeigt zwar Auflösung des Gesamtbildes in einzelne Entladungen; es bedarf aber einer besonderen Ueberlegung zur Erkenntnis, welcher Teil des Bildes zusammengenommen jedesmal einer Partialentladung entspricht, und welches andererseits die einzelnen Oscillationen innerhalb *einer* Partialentladung sind; denn die abwechselnde Richtung der Oscillationen ist dabei nicht ohne weiteres erkennbar. Der Methode von Lodge ist besonders auch in dieser Hinsicht die sehr hübsche Demonstrationsweise von Walter König[1]) überlegen, welche sogar eine sehr einfache absolute Bestimmung der Oscillationsdauer ergiebt, bei welcher aber doch noch nicht der ganze Verlauf der Schwingungen, einschliesslich der Intensitätsverhältnisse, direct zur Anschauung gelangt. Die Braun'sche Röhre[2]), welche auch sonst für das Studium von Wechselströmen so ausgezeichnete Dienste leistet, führt auch hier zum Ziel.

Wir beschreiben die Erscheinungen in der Folge, wie wir sie beobachteten. Eine Batterie Leydener Flaschen von der

---

1) W. König, Wied. Ann. 67. p. 535. 1899.

2) F. Braun, Wied. Ann. 60. p. 552. 1897.

Capacität gleich 1400 elektrostatischen C.G.S.-Einheiten wurde geladen durch die Schläge eines grossen Inductoriums, welches Funken bis zu 35 cm Länge liefern konnte, aber stets weit schwächer beansprucht wurde. Die Flaschen entluden sich durch ein Funkenmikrometer und durch die Spule, welche unter der Braun'schen Röhre befindlich die Ablenkung des Fluorescenzfleckes hervorrief, dessen Bild im rotirenden Spiegel betrachtet wurde. Ausserdem war dann in den Entladungskreis immer noch eine andere Spule von grösserer Selbstinduction eingeschaltet. Die fluorescenzerregenden Kathodenstrahlen in der Braun'schen Röhre wurden erzeugt durch eine kräftige Influenzmaschine.

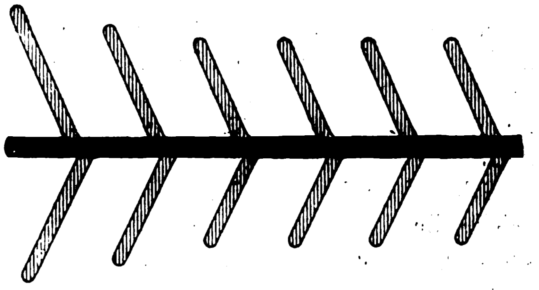


Fig. 1.

Schon bei directer Betrachtung, ohne Spiegel, zeigt sich der oscillatorische Charakter der Flaschenentladungen dadurch an, dass der Fluorescenzfleck nach oben *und* unten zu einem verticalen Streif auseinandergezogen wird.

Bei den ersten Versuchen wurde das Inductorium mit dem Neef'schen Hammer betrieben und die Kugeln des Funkenmikrometers bis auf einige Zehntel Millimeter zusammengeschraubt. Jeder Schlag des Inductoriums gab im rotirenden Spiegel das in Fig. 1 wiedergegebene Bild.

Die Zeit als Abscisse wächst in dieser und in allen folgenden Figuren von links nach rechts. Der helle horizontale Streif in der Mitte entspricht der unabgelenkten Lage des Fluorescenzfleckes während der stromlosen Zeiten; infolge Nachleuchtens zieht sich der Streif aber störend durch das ganze Bild hin; vielleicht lässt sich dieser Uebelstand vermeiden durch Verwendung einer weniger stark nachleuchtenden Substanz. (Bei

der vorliegenden Röhre, von Dr. Geissler Nachf., F. Müller in Bonn hergestellt, ist eine von ihm vor Jahren aus Paris bezogene Leuchtsubstanz von unbekannter chemischer Zusammensetzung zur Verwendung gekommen.)[1]) Welches war nun aber die Erklärung der schräg gestellten Querrippen? Wenn bei einer Reihe von aufeinanderfolgenden Oscillationen jedesmal die Entfernung aus der Ruhelage ausserordentlich viel schneller geschieht, als die Rückkehr, so würde erstere keine merkliche Fluorescenz erregen im Vergleich mit letzterer, und die Wiederholung dieser würde eine ähnliche Reihe von schrägen Rippen ergeben, wie Fig. 1 sie zeigt. Aber die Länge der Rippen müsste doch infolge der Dämpfung fortschreitend abnehmen, und die oberen Rippen müssten mit den unteren alterniren; beides ist nicht der Fall: vielmehr sind von etwa der dritten Rippe ab alle folgenden gleich gross, und jeder oberen Rippe entspricht nahe zu derselben Zeit eine untere. Dagegen würde folgende Erklärung allen Einzelheiten des Bildes entsprechen.

Jeder Schlag des Inductoriums liefert eine Elektricitätsmenge, welche die Flaschen mehrere Male auf die am Funkenmikrometer eingestellte Schlagweite zu laden im Stande ist, so dass bei jedem Inductionsschlag mehrere Partialentladungen stattfinden. Jedes Paar von Rippen, eine obere und eine untere, sind das Bild *einer* solchen Partialentladung. Bei den ersten dieser Partialentladungen liefert das Inductorium so schnell neue Ladung an die Flaschen nach, dass noch Ladung nachschiebt während der Dauer eines Funkens nach der im Moment des Funkenbeginns bereits vorhandenen; infolge dessen sind die ersten der Partialentladungen etwas stärker als die folgenden, für welche jedesmal die Flaschen gerade bis zur betreffenden Schlagweite geladen werden. — Eine jede Partialentladung, dargestellt durch ein Rippenpaar, besteht nun aus

1) Auch liesse sich der leuchtende Fleck in der Ruhelage ganz beseitigen dadurch, dass an seine Stelle auf dem Fluorescenzschirm ein kleiner Stanniolkreis aufgeklebt würde; durch einen neben die Röhre gelegten Magneten lassen sich dann die Kathodenstrahlen so dirigiren, dass sie auf den Stanniolkreis fallen, wenn die Spule stromlos ist. Müller-Geissler ist bereits mit der Herstellung einer derartigen Röhre beschäftigt.

einer Reihe von Oscillationen. Bei diesen ist die Geschwindigkeit des Fluorescenzfleckes in der Nähe der Umkehrpunkte verschwindend klein, in den Umkehrpunkten gleich Null. Infolge dessen wird die Lichtstärke in den Umkehrpunkten und in deren Nähe weit grösser sein, als während des übrigen Teiles der Hin- und Hergänge. Der Unterschied kann so gross werden, dass man nur die Umkehrpunkte sieht; da die Schwingungen stark gedämpft sind, und da der Fluorescenzfleck eine gewisse Ausdehnung hat, verschmelzen dann die Bilder der Umkehrpunkte *a*, *b*, *c* . . . in der schematischen Fig. 2 zu den beiden beobachteten schrägen Rippen. Die letzten Oscillationen einer jeden Partialentladung, bei welcher die Rippen sich asymptotisch der Ruhelage nähern sollten, gehen unkenntlich in den nachleuchtenden Horizontalstreif über, welcher von dem unabgelenkten Fluorescenzfleck herrührt. — Diese Erklärung hat sich durch die folgenden Versuche als richtig bestätigt.

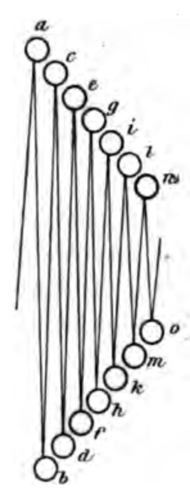


Fig. 2.

Um den schweren Neef'schen Hammer in Bewegung zu setzen, war eine ziemlich grosse primäre Stromstärke erforderlich; es wurde daher statt seiner ein durch besondere Trockenelemente betriebener Quecksilberunterbrecher genommen; dann konnte die primäre Stromstärke so weit herabgesetzt werden, dass bei gleichzeitiger Vergrösserung der Funkenstrecke zwischen den Mikrometerkugeln (auf etwa 1 mm) ein Schlag des Inductoriums auch nur *eine* Ladung und Entladung der Flaschen bewirkte; der Erfolg war, dass ihr auch nur *ein* Rippenpaar entsprach. Dann wurde in den Entladungskreis der Flaschen die secundäre Spule eines kleinen Inductoriums (von 15 cm maximaler Funkenlänge) eingeschaltet. Die grosse Vermehrung der Selbstinduction verlangsamte dann die Schwingungen derart, dass an Stelle des isolirten Rippenpaares eine sehr stark gedämpfte vollständige Sinuscurve sichtbar wurde (Fig. 3).

Unter Beihaltung der sehr grossen Selbstinduction wurden nun weiter die Kugeln des Funkenmikrometers wieder so weit zusammengeschoben (bis etwa $^1/_{10}$ mm), dass jeder Schlag

des Inductoriums wieder eine Reihe von Partialentladungen hervorrief. Bei ganz oberflächlichem Hinblicken konnte man dann glauben, auch wieder die Erscheinung vor sich zu haben, wie Fig. 1 sie zeigt; aber auch eben nur bei ganz oberflächlichem Hinblicken und bei langsamem Drehen des Spiegels. Denn bei nur etwas genauerem Zusehen erkennt man in jedem Rippenpaar bei den jetzt gegen Fig. 1 so sehr verlangsamten Schwingungen deren *ganzen* Verlauf wie er in Fig. 2 schematisch gezeichnet ist und welcher jetzt etwa das Aussehen von Fig. 4 darbietet, wenn der Spiegel hinreichend schnell rotirt. Natürlich überwiegt auch jetzt noch die Leuchtstärke in der Nähe der Umkehrpunkte; aber die verbindenden Hin- und Hergänge sind doch auch sehr deutlich zu erkennen. Von einer Oscillation bis zur nächsten nimmt jedenfalls die Amplitude bedeutend weniger ab, als im Falle von Fig. 3. Dies ist wohl darauf zurückzuführen, das jetzt, wo die Partialentladungen schnell aufeinanderfolgen, die von dem Funken durchbrochene Luftstrecke, zumal sie gleichzeitig kürzer ist, dauernd heiss und ihr Widerstand gering bleibt, während bei spärlicher Folge längerer Funken die Luft Zeit hat sich abzukühlen und ihr Widerstand gross wird. Dies könnte bewirken, dass im Falle von Fig. 4 mit dem Widerstand auch die Dämpfung gering ist gegen den Fall von Fig. 3. Es ist aber auch möglich, dass im letzteren Falle die Oscillationsdauer erheblich grösser gewesen wäre, als im Falle von Fig. 4, und dass zwar die Dämpfung auf gleiche Zeiten bezogen dieselbe wäre, dass sie

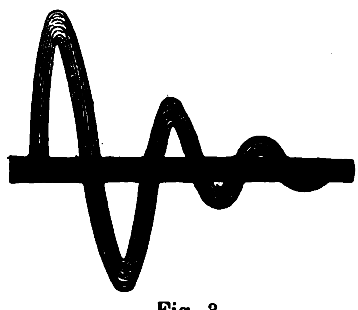


Fig. 3.



Fig. 4.

aber bei der längeren Oscillationsdauer stärkere Abnahme von Amplitude zu Amplitude bewirkt hätte. Da nun in beiden Fällen Capacität und Selbstinduction dieselbe war, müsste dann bei den selteneren und längeren Funken der Widerstand der im Mittel kälteren und längeren Luftstrecke so gross gewesen sein, dass er für die Schwingungsdauer neben dem Product: „Capacität mal Selbstinduction“ nicht zu vernachlässigen ist, wie gewöhnlich; sondern dass er erheblich in Betracht kommt und die Schwingungen verlangsamt. Diese Annahme ist von vornherein gewiss nicht abzuweisen. Vielleicht wirken auch beide aus derselben Quelle entspringenden Einflüsse zusammen.

Die durch Fig. 4 dargestellte Erscheinung dürfte die anschaulichste Demonstration der oscillatorischen Flaschenentladungen vermittelst der Braun'schen Röhre sein.

Inzwischen haben in dem am 15. d. M. ausgegebenen Decemberheft dieser Annalen die Herren Wehnelt und Donath sehr schöne photographisch aufgenommene Wechselstromcurven der Braun'schen Röhre publicirt. Ohne Zweifel wird ihr Verfahren auf die Flaschenentladungen angewandt, auch die Möglichkeit quantitativer Messung von Schwingungsdauer und Dämpfung darbieten, während der directe Anblick, wie wir ihn vorstehend beschrieben haben, für eine anschauliche Demonstration natürlich immer vorzuziehen ist.

Greifswald, Physikal. Institut, im December 1899.

(Eingegangen 19. Januar 1900.)

---

5. *Ueber ein Dreipulvergemisch zur Darstellung elektrischer Staubfiguren; von K. Bürker.*

Gelegentlich einer gemeinsam mit Hrn. Grützner vorgenommenen Nachprüfung der von W. König[1]) angegebenen elektrostatischen Methode der Stromaufzeichnung, wobei einer auf eine Metallplatte aufgetragenen Asphaltlackschicht elektrische Ladungen erteilt und diese durch das Villarsy'sche Gemisch[2]), Mennige und Schwefel oder Englischrot und Schwefel, sichtbar gemacht wurden, schien es mir wünschenswert, die Differenzen in der verschiedenfarbigen Zeichnung der Staubfiguren noch prägnanter hervortreten zu lassen, als dies mit den obigen Gemischen möglich ist. Ich hätte nun zu den von anderer Seite beschriebenen Gemischen wie Zinnober und Ultramarin, Zinnober und Schwefel, Ultramarin und Schwefel, Mennige und Schwefelantimon, Schweinfurter Grün und Mennige, Drachenblut und Gummigutti etc. meine Zuflucht nehmen können, allein eine Prüfung dieser Gemische ergab ebensowenig befriedigende Resultate. Nach einigen tastenden Versuchen ist es mir nun in der That gelungen, auffallend schöne und scharf gezeichnete Staubfiguren mit Hülfe eines Dreipulvergemisches zu erzielen, das sich, wie Untersuchungen ergeben haben, sowohl zur genaueren Analyse der Art einer Ladung, als auch ganz besonders zur Demonstration der Lichtenberg'schen und ähnlicher Figuren in Vorlesungen eignen dürfte, daher ich mich zu einer kurzen Mitteilung veranlasst fühle.

1) W. König, Elektrotechn. Zeitschr. (Centralblatt für Elektrotechnik) 1899, Heft 24 und Wied. Ann. 67. p. 535. 1899.

2) Ich bemerke, dass sowohl bei Riess (physikal. Abhandl. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1846, p. 5) als auch in Wiedemann's Lehre von der Elektricität (3. Aufl. 1. p. 221) die Litteraturangabe über das Gemisch, wenigstens was Voigt's Magazin für das Neueste aus der Physik und Naturgeschichte betrifft, falsch ist; statt 8 St. 4, p. 176 muss es heissen 5. St. 4, p. 176.

Bei der zuerst benutzten Versuchsanordnung wurden die mit Hülfe eines Pulvergemisches sichtbar zu machenden elektrischen Ladungen erteilt von einem kleineren Inductionsapparate, der durch ein Leclanchéelement betrieben, Funken von weniger als 0,5 mm gab. Von den Polen der secundären Spule war der eine mit einem etwa 1 mm dicken Messingbleche verbunden, das auf der oberen Seite mit einer dünnen Asphaltlackschicht überzogen war, während der andere Pol in Verbindung mit einer beweglichen, isolirt anzufassenden Kugelelektrode bei spielendem Wagner'schen Hammer über die Lackschicht, diese leise berührend, hinweggeführt wurde. Da bei nicht ganz übereinandergeschobenen Rollen nur der Oeffnungsinductionsstrom eine Ladung veranlasste, wenigstens soweit sich dies mit den Pulvergemischen nachweisen liess, so konnten durch entsprechendes Umlegen einer in den secundären Kreis eingeschalteten Wippe nach Wunsch positive und negative Ladungen erteilt werden, indem die Elektrode einmal zur Anode, das andere Mal zur Kathode des Oeffnungsinductionsstromes wurde. Bestäubte man nach einer solchen Ladung die Lackschicht mit dem zu ähnlichen Zwecken so vielfach benutzten Villarsy'schen Gemische, Mennige und Schwefel, so traten auf dem schwarzen Grunde in entsprechenden Abständen meist ringförmige Figuren bis zu 6 mm Durchmesser deutlich hervor, wobei freilich Differenzen in der Farbe nur schwer zu erkennen waren. Die positiven Figuren meist grösser, erschienen in der Hauptsache gelbrot gefärbt, die negativen kleiner mit rötlichem Ton. Dabei war oft im Centrum der Figur ein Punkt deutlich markirt, auch ein zweiter concentrischer Kreis, dem Hauptkreise umschrieben, kam vielfach hinzu. Noch um vieles regelmässiger wurden die Figuren, wenn die Elektrode nicht mit der Hand über die Lackschicht geführt, sondern wenn sie festgestellt wurde und unter ihr ein metallener Cylinder vorbeirotirte, auf dem mit einer Asphaltlackschicht überzogenes Stanniol zur Aufnahme der Fignren befestigt war.

Da, wie erwähnt, der Farbenunterschied der so erhaltenen positiven und negativen Figuren zu wünschen übrig liess, so suchte ich diesem Mangel durch Gebrauch eines anderen Pulvergemenges abzuhelfen. Nach Prüfung einer Reihe von Stoffen

stellte sich heraus, dass Karmin[1]) vorzüglich geeignet war, wenn diesem noch Lykopodium und Schwefel in ganz bestimmten Verhältnissen beigemischt wurde. Mit diesem Gemische bestäubt, erschien die positive Ladung schön dunkelrot, die negative hellgelb, wobei beide Farben auf dem schwarzen Grunde lebhaft hervortretend, scharf abgegrenzt waren. Allein noch weitere Details liess die Bestäubung mit dem Gemische erkennen: ausser dem roten Hauptkreise zeigte die positive Figur noch ein gelbes Centrum und dem Hauptkreise umschrieben einen gelben Hof, während die negative Figur neben dem gelben Hauptkreise deutlich durch ein rotes Centrum und einen roten Hof charakterisirt war.

Es ist nun in der That erforderlich, dass diese Mischung der drei Componenten in ganz bestimmten Verhältnissen vorgenommen wird. Man begnüge sich mit Karmin und Lykopodium allein und menge beide in allen möglichen Verhältnissen, und man wird keine befriedigenden Resultate erzielen. Man mache dasselbe mit Karmin und Schwefel und man wird ebenso unbefriedigt von weiteren Versuchen abstehen. Ich habe alle drei Componenten in über 50 verschiedenen Mischungsverhältnissen untersucht und dabei nur wenige brauchbar gefunden. Man mische alle drei etwa in dem Verhältnisse: 1 Volumenteil Karmin : 3 Volumenteile Lykopodium : 5 Volumenteile Schwefelblumen und man wird mit dem Gemische zufrieden sein, wobei freilich die Art und Weise, wie gemischt wird, noch zu berücksichtigen ist. Ich empfehle zuerst Karmin mit Schwefel gut zu zerreiben, und dann Lykopodium hinzuzufügen; denn mischt man zuerst Karmin mit Lykopodium und setzt dann Schwefel zu, so werden beim Bestäuben die Figuren um vieles undeutlicher. Als ein Kriterium für die Güte dieses Dreipulvergemisches gebe ich an, dass ein geriebener positiv elektrischer Glasstab genähert, aus dem Gemische fast nur das Karmin, ein geriebener negativ elektrischer Hartgummistab nur das hellgelbe Lykopodium-Schwefelpulver ausziehen darf; geschieht das nicht, dann ist das Pulver unbrauchbar.

---

1) Es ist dies pulverisirtes Karmin, welches in der Histologie zum Färben mikroskopischer Präparate Verwendung findet: ein Auszug aus Cochenille.

Ferner müssen schon beim Aufstreuen des Gemisches die roten Hauptkreise der auf die oben erwähnte Weise erzeugten positiven Figuren in viel dunklerem Rot hervortreten als das Rot der Mischung beträgt, und aus letzterer ebenfalls schon beim Aufstreuen die hellgelben Hauptkreise der negativen Figur intensiv hervorleuchten.

Was nun zunächst eine Analyse der Wirkungsweise des Dreipulvergemisches betrifft, so sei erwähnt, dass das Durchstäuben des Gemisches durch Leinwand oder andere Stoffe, wie es meist verlangt wird, sich nicht als notwendig erwiesen hat, indem bei directem Aufstreuen die Figuren gerade so deutlich hervortreten wie beim Durchstäuben, letzteres bietet nur insofern einen Vorteil, als eine gleichmässigere Verteilung des Gemisches über die Lackschicht ermöglicht wird. Daher dürfte also die Leinwand in Bezug auf die verschiedenartige Ladung der einzelnen Bestandteile des Gemisches eine wesentliche Rolle nicht spielen, aber auch die Reibung der Teilchen an der Luft nicht, wie man sich durch unmittelbares Auftragen des Gemisches auf die Lackschicht überzeugen kann, vielmehr wird wohl die innere Reibung der einzelnen Bestandteile aneinander die Quelle der Potentialdifferenz abgeben.

Auch eine Orientirung über die Art der Ladung der einzelnen Bestandteile wurde angestrebt, aber nicht mit Hülfe des Elektroskops; zwar sah ich bei einem solchen, das mit einer Zamboni'schen Säule armirt war, Ausschläge des Goldblattes, wenn Bestandteile des Gemisches auf die Elektroskopplatte gestreut wurden, allein es ist schwer zu sagen, ob und wieviel von dieser Ladung auf die Reibung an dem Metall fällt, abgesehen von vielen anderen Fehlerquellen, die schon Kortüm[1]) hervorgehoben hat. Dagegen hoffte ich in einfacher Weise mit Benutzung eines geriebenen Glas- und Hartgummistabes Aufschluss zu erhalten.

Wurde ein solcher Glasstab dem Karminpulver allein genähert, so begann ein lebhaftes Tanzen der Teilchen, indem diese zuerst angezogen, dann energisch abgestossen wurden, eine geringe Menge feineren Karminstaubes blieb am Glas-

1) Kortüm, Voigt's Magazin für das Neueste aus der Physik und Naturgeschichte **10.** (2) p. 1. 1795.

stabe dauernd haften. Ganz ähnlich war die Erscheinung, wenn ein geriebener Hartgummistab genähert wurde. Ob das Karmin zuerst durch Leinwand gestäubt wurde oder nicht, war auf den eben geschilderten Effect ohne bemerkbaren Einfluss.

Untersuchte man auf gleiche Weise Lykopodium, so sah man dieses sowohl vom Glas- wie vom Hartgummistabe angezogen werden, ähnlich wie Eisenfeilspäne von einem Magneten, geradeso blieb es auch haften; man konnte aber auch hier beobachten, dass die äussersten Teilchen des haftenden Lykopodiums gelegentlich geradezu abgeschossen wurden, also auch hier eine Anziehung von einer Abstossung gefolgt war.

Endlich verhielt sich Schwefel gegenüber dem elektrischen Glas- und Hartgummistabe völlig indifferent, selten, dass man ein Körnchen auf einen der Stäbe überspringen sah. Auch für Lykopodium und Schwefel schien es gleichgültig zu sein, wenigstens was die eben geschilderten Verhältnisse betrifft, ob sie vorher durch Leinwand durchgestäubt wurden oder nicht.

Gemische von Karmin + Lykopodium, Karmin + Schwefel, Lykopodium + Schwefel in den Verhältnissen, wie sie im Dreipulvergemische enthalten sind, wurden von beiden Stäben in der Hauptsache angezogen, also in ihnen auch der Schwefel, der sich vorher ablehnend verhielt. Man kann sich bei letzterem Gemisch von der Art der am Stabe haftenden Bestandteile, die sich ohne weiteres nicht so leicht unterscheiden lassen, überzeugen, wenn man den betreffenden Stab über einer nicht leuchtenden Bunsenflamme abklopft: die kleinen blauen Flämmchen in der grossen Flamme und der Geruch nach Schwefeldioxyd lassen über die Natur des Stoffes keinen Zweifel, Lykopodium dagegen verbrennt in mehr gelblichen Flämmchen.

Ich habe Grund anzunehmen, dass differente Ladungen bei diesen Zweipulvergemischen gar nicht, oder wenigstens nicht bis zur sichtbaren Wirkung stattfinden: dafür spricht ihr gleichartiges Verhalten gegen die beiden verschieden elektrischen Stäbe, dann aber auch der Umstand, dass sie auf den vom Oeffnungsinductionsstrom erzeugten positiven und negativen Figuren nicht different, sondern in der Farbe des Gemisches hafteten. Dass der Schwefel, der allein nicht an-

gezogen wurde, in den Zweipulvergemischen mit übersprang, hatte seinen Grund wohl darin, dass er von den anderen leicht beweglichen Stoffen mitgerissen wurde. Ohne Zweifel wird er allein auch angezogen, da er aber schwerer ist, auch die Kraft, mit welcher die Teilchen aneinander haften, grösser zu sein scheint, so erfährt diese Anziehung keinen sichtbaren Ausdruck.

Sofort traten aber differente Ladungen auf, sowie die drei Pulver in den obengenannten Verhältnissen gemischt wurden.

Zweifellos fällt dabei dem Lykopodium eine bestimmende Rolle zu. Man füge zu den Gemischen Ultramarin und Schwefel, Zinnober und Schwefel, Schweinfurter Grün und Schwefel, Mennige und Schwefel, die allein auf die Ladungen gestäubt, kaum Farbendifferenzen erkennen lassen, Lykopodium hinzu und man wird viel bessere Differenzirungen erhalten.

Das Gemisch Ultramarin—Schwefel—Lykopodium färbte dabei die vom Oeffnungsinductionsstrom erzeugten positiven Figuren gelb—blau—gelb, die negativen blau—gelb—blau, das Gemisch Zinnober—Schwefel—Lykopodium die positiven Figuren gelb—rot—gelb, die negativen rot—gelb—rot, das Gemisch Schweinfurter Grün—Schwefel—Lykopodium die positiven Figuren gelb—grün—gelb, die negativen grün—gelb—grün, das Gemisch Mennige—Schwefel—Lykopodium die positiven Figuren gelb—rot—gelb, die negativen rot—gelb—rot. Man sieht aus diesen Beispielen, dass das Schwefel—Lykopodiumpulver in der Hauptsache, wie bei den reinen Lichtenberg'schen Figuren besonders schön zu constatiren ist, die negative Ladung färbt, also selbst wohl positiv elektrisch wird, während der typische Farbstoff stets die positive Ladung überdeckt, also selbst zum Träger negativer Elektricität geworden ist.

Auffallend war nun folgende Thatsache. Bekanntlich färbt das Villarsy'sche Gemisch, Mennige und Schwefel, die positiven Lichtenberg'schen Figuren gelb, die negativen rot, daher wird Mennige selbst in dem Gemische positiv elektrisch sein, Schwefel dagegen negativ. Fügte man nun aber zu diesem Gemische Lykopodium hinzu, so kehrten sich, wie bei der Bestäubung zu erkennen ist, die Verhältnisse um, indem Mennige (wohl mit etwas Schwefel untermischt) jetzt die posi-

tive Figur rot, Lykopodium—Schwefel die negative Figur gelb färbte. Der Umstand, dass gerade die reichverästelte positive Lichtenberg'sche Figur in einer intensiveren Farbe erscheint, lässt die Schönheit derselben um so mehr hervortreten. Diese corrigirende und verbessernde Rolle, die das Lykopodium spielt, ist immerhin eine auffallende Erscheinung.

Eine zureichende Erklärung der Wirkungsweise des Dreipulvergemisches zu geben, dazu fehlen mir jetzt noch genügend experimentelle Daten und auch vorerst die Zeit, um diese beizubringen. Ich begnüge mich daher mit der Mitteilung der constatirten Thatsachen und füge nur noch einige Beobachtungen über Staubfiguren hinzu, die ich durch das Dreipulvergemisch sichtbar machen konnte.

Vollkommen reine positive Lichtenberg'sche Figuren habe ich erhalten, wenn eine mit dem positiven Pol einer Influenzmaschine verbundene Kugelelektrode auf einen etwa $^1/_2$ cm dicken dunklen Schellackkuchen während der Rotation der Maschine aufgesetzt wurde, wobei die negative Elektrode mit dem Kuchenblech in leitender Verbindung stand. Die reichverästelte Figur war nach dem Aufstäuben des Dreipulvergemisches intensiv rot gefärbt und auf dem dunklen Grunde scharf abgegrenzt.

Liess man aus einer mit dem einen Pol der Influenzmaschine verbundenen Kugelelektrode auf eine mit Asphaltlack überzogene Metallplatte, von der ein Draht zum negativen Pole der Maschine führte, Funken auf die Lackschicht überspringen, wobei diese, meist sichtbar, durchschlagen wurde, so traten nach dem Aufstäuben gelegentlich wunderschöne Staubfiguren hervor, die in Fig. 1 schematisch wiedergegeben sind. Bei den negativen Figuren (n) folgte auf ein rotes Centrum ein hellgelber Ring, der wiederum von einem roten eingefasst war. Die positiven (p) Figuren waren charakterisirt durch ein gelbes Centrum mit darauffolgendem roten Ring, den wieder ein hellgelber einschloss. Es entsprachen diese Figuren vollkommen den mit dem Inductionsapparate erhaltenen, nur waren sie viel grösser und meist regelmässiger gezeichnet.

Wählte man statt der Kugelelektrode eine Spitzenelektrode, dann veränderten die Figuren ihr Aussehen völlig. Fig. 2 giebt eine schematische Reproduction derselben. Die

negative Figur (n) präsentirte sich als hellgelbe Scheibe mit eingesprengten roten Punkten, von denen einer gewöhnlich die anderen an Grösse übertraf und gelegentlich auch noch ein hellgelbes Centrum erkennen liess. Dabei war die bei langsamer Rotation der Influenzmaschine meist kreisrunde Scheibe noch von einem roten Hofe umgeben. Die positive Figur (p) hatte denselben Charakter, was die Zeichnung betrifft, die Farben standen umgekehrt: der roten Scheibe waren hellgelbe Punkte eingesprengt und ein hellgelber Hof umgab die Scheibe. Wurden die überspringenden Funken zu gross, dann breiteten sich die Figuren oft weit aus, confluirten mit benachbarten und konnten merkwürdige Formen annehmen.

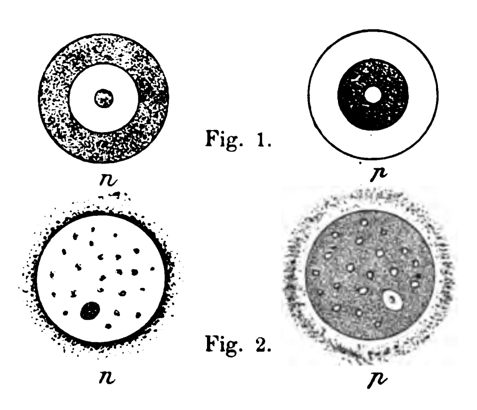


Fig. 1.

Fig. 2.

Wesentlich für das Zustandekommen der Figg. 1 und 2 scheint die Beschaffenheit der Lackschicht zu sein. Im allgemeinen sah ich die Figuren mit der Dicke der Lackschicht bis zu einer gewissen Grenze grösser werden, dabei hafteten die Ladungen sehr fest; selbst wenn die Platte durch eine Flamme gezogen war, zeigte die darauffolgende Bestäubung oft noch Spuren der vorhergegangenen Ladung.

Ich bemerke, dass es mir nicht gelungen ist, mit dem Villarsy'schen Gemische Mennige—Schwefel die Figuren auch nur annähernd in dieser Schönheit sichtbar zu machen, kaum, dass die Umrisse angedeutet sind, von Farbendifferenzen war nichts zu constatiren.

Es unterliegt wohl keinem Zweifel, dass die Figg. 1 und 2 ihrem inneren Wesen nach identisch sind mit den in Wiede-

manns „Lehre von der Elektricität[1])“ abgebildeten, auf einer Metallplatte erzeugten Pristley'schen Ring- oder Schmelzfiguren.

Ergebnisse.

Die Verwendung des Dreipulvergemisches, um elektrische Figuren sichtbar zu machen, scheint mir also auf Grund der damit gewonnenen Erfahrungen gegenüber dem bisher meist angewandten Villarsy'schen Gemisch Mennige—Schwefel wesentliche Vorteile zu bieten (abgesehen davon, dass das beim Aufstäuben unvermeidliche Einatmen des Mennigestaubes, einer Bleiverbindung, der Gesundheit nicht gerade zuträglich ist), denn:

1. die Farbendifferenzen der positiven und negativen Figuren sind viel ausgeprägter;

2. die thatsächliche Zeichnung tritt schärfer hervor, wohl auch deswegen, weil das Gemisch von allen den Stellen, wo es nicht haften soll, sich wieder leichter durch Abklopfen oder Wegblasen entfernen lässt; und

3. auch an Empfindlichkeit ist das Dreipulvergemisch dem Villarsy'schen Gemische entschieden überlegen, wie vergleichende Versuche ergeben haben.

---

1) G. Wiedemann, Lehre v. d. Elektricität 4. 3. Aufl. p. 727—729.

(Eingegangen 31. Januar 1900.)

6. *Die Dielektricitätsconstante des Wasserstoffsuperoxyds; von H. T. Calvert.*

Die Constitution des Wasserstoffsuperoxyds ist eine der vielen Fragen, welche das Studium dieses Körpers aufwirft, und die seit langer Zeit viel umstritten worden ist. Auf die verschiedenen Ansichten hierbei soll nicht näher eingegangen werden, da ich beabsichtige, sie an anderer Stelle ausführlicher zu behandeln.

Seine Dielektricitätsconstante gewinnt ein erhöhtes Interesse seit der Speculation von Brühl[1]), welche auf der Vierwertigkeit des Sauerstoffs beruht. Da ich während der Ausführung meiner Arbeit mir möglichst reines Wasserstoffsuperoxyd darstelle, so erschien eine Messung seiner Dielektricitätsconstante möglich.

Das Wasserstoffsuperoxyd wurde im wesentlichen nach der von Bredig und Müller von Berneck[2]) an zweiter Stelle angegebenen Methode aus dem rohen käuflichen dreiprocentigen Product erhalten. Dasselbe wurde bei einem Drucke von 30—50 mm Quecksilber bis zur Trockenheit auf dem Wasserbad abdestillirt; hierbei wird nur die zweite Hälfte des Destillats verwendet, weil sie allein eine in Betracht zu ziehende Menge Wasserstoffsuperoxyd enthält. Das Destillat wird mit Barytwasser alkalisch gemacht und dann reine Kohlensäure im Ueberschuss eingeleitet. Die nun erhaltene Lösung wurde bis auf ungefähr drei Viertel ihres Volumens durch Abdestilliren bei vermindertem Druck eingeengt, und nach dem Abfiltriren vom ausgeschiedenen Baryumcarbonat, wie bei dem rohen Product, bis zur Trocknen abdestillirt.

So erhielt ich ein 4,5 procentiges Destillat (d. h. 4,5 g H_2O_2 auf 100 ccm Lösung) von der specifischen Leitfähigkeit $k = 1,5 . 10^{-7}$,

1) J. W. Brühl, Ber. d. Deutsch. chem. Gesellsch. **28.** p. 2847 u. 2866. 1895; **30.** p. 162. 1897.

2) G. Bredig u. R. Müller von Berneck, Zeitschr. f. phys. Chem. **31.** p. 271. 1899.

bezogen auf Quecksilber. Dieselbe wurde nach der Methode von Kohlrausch bestimmt in einem Arrhenius'schen Gefäss mit blanken Platinelektroden, um die Zersetzung herabzudrücken. Das Präparat änderte noch seine Leitfähigkeit, wenn die Destillation wiederholt wurde, und erst nach zweimaliger Destillation bei gleichem Drucke von 30—50 mm verblieb kein fester Rückstand im Destillirkolben. Ich erhielt dann als specifische Leitfähigkeit $k = 2{,}89 \,.\, 10^{-8}$ bei einer gleichen Concentration von 4,5 Proc. Diese Leitfähigkeit ist grösstenteils dem Wasserstoffsuperoxyd zuzuschreiben, denn wenn man eine Probe in einer Schale von Platin eindampft, welches seine vollständige Zersetzung hervorruft, so erhält man einen Wert, welcher dem der Leitfähigkeit des Wassers sehr nahe liegt.

Zur Messung der Dielektricitätsconstante ist eine concentrirte Lösung vorteilhaft, welche auf folgenden zwei Wegen bereitet wurde:

Probe I wurde in einer Porzellanschale auf dem Wasserbad eingedampft bis die Concentration den Wert 29,58 Proc. erreicht hatte, welchen man durch Titration mit Kaliumpermanganat bestimmte. Ihre specifische Leitfähigkeit war schwer zu messen wegen der an den Platinelektroden stattfindenden Zersetzung. Unter Umrühren der Lösung wurde sie zu angenähert $2{,}6 \,.\, 10^{-6}$ bestimmt.

Probe II war durch Destillation bei 30—50 mm Quecksilber auf dem Wasserbad eingeengt; diese Methode erwies sich besser wie die erste, denn die Leitfähigkeit dieser Probe ergab sich zu $11 \,.\, 10^{-8}$ bei einer Concentration von 45,9 Proc. (d. h. 45,9 g H_2O_2 in 100 ccm Lösung). In diesem Falle diente als Leitfähigkeitsgefäss ein kleiner, dem Drude'schen Apparat[1]) angehöriger Condensatorkolben mit Platindrahtelektroden, wobei die Gasentwickelung eine äusserst minimale ist; durch Klopfen des Gefässes lassen sich die Sauerstoffbläschen vollständig von den Elektroden entfernen. Die Dichte dieser 45,9proc. Lösung war 1,144 bei 18°, bei welcher Temperatur sämtliche Messungen ausgeführt wurden. Die eigentliche Messung der Dielektricitätsconstante wurde von Hrn. Prof. Drude nach

1) P. Drude, Zeitschr. f. phys. Chem. **23.** p. 267. 1897.

seiner zweiten Methode[1]) ausgeführt, und für seine Freundlichkeit sei es mir an dieser Stelle gestattet, meinen besten Dank auszusprechen. Die erhaltenen Resultate sind folgende:

Bei Anwendung elektrischer Wellen der (in Luft gemessenen) Wellenlänge $\lambda = 75$ cm zeigte sich nur eine Spur elektrischer Absorption. Dieselbe war aber völlig normal, d. h. entsprach völlig der Leitfähigkeit der Lösung. Die Dielektricitätsconstante derselben ergab sich (bei 18^0 C.) zu 84,7. Wegen langsam eintretender Gasentwickelung an den blanken Platindrähten des Messkölbchens wurden die Gasblasen vor jeder Ablesung durch Klopfen entfernt. Ihr Einfluss würde sich darin geäussert haben, dass die Dielektricitätsconstante sich zu *klein* ergeben würde. In der That veränderten sich die Einstellungen des Messkölbchens langsam, aber continuirlich in diesem Sinne, wenn man eine längere Zeit (etwa 5 Minuten) am Kölbchen nicht klopfte. Es kann daher sein, dass die Zahl 84,7 vielleicht noch etwas (aber jedenfalls unter 1 Proc.) zu klein ist.

Um die Dielektricitätsconstante des reinen H_2O_2 zu finden, kann man mindestens sehr annähernd mit der Mischungsregel nach Volumenprocenten rechnen, da sich auch die beobachtete Dichte (1,144) nach dieser Regel berechnet, wenn man nach Spring[2]) die Dichte des reinen H_2O_2 zu 1,5 annimmt. Mit Benutzung dieser Zahl folgt, dass in der untersuchten Lösung das Verhältnis der Volumina von H_2O_2 zu H_2O gleich 27 : 60 war. Daher ergiebt sich nun mit Hülfe der Mischungsregel nach Volumenprocenten, da die Dielektricitätsconstante des H_2O (bei 18^0) gleich 81 ist, *die Dielektricitätsconstante des reinen* H_2O_2 *zu 92,8.*

Dieses Resultat, *dass Wasserstoffsuperoxyd eine wesentlich grössere Dielektricitätsconstante besitzt, als Wasser, und dass es keine anomale elektrische Absorption zeigt*, steht im Einklang mit den Erwartungen Brühl's, welcher keine Hydroxylgruppen im H_2O_2 annimmt und welcher für H_2O_2 wegen disponibler Valenz eine abnorm grosse Dielektricitätsconstante vermutet hat.

1) P. Drude, l. c.

2) W. Spring, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 8. p. 427. 1895.

(Eingegangen 9. Februar 1900).

7. *Ueber Wirkungen des ultravioletten Lichtes auf gasförmige Körper; von P. Lenard.*

1. Die Kathodenstrahlen waren ein erstes Beispiel einer Strahlung, welche die sie verschluckende Luft in einen eigentümlichen Zustand versetzt, dem ähnlich, welchen elektrostatische Kräfte in ihr hervorbringen können. Die Luft wird elektrisch leitend, ihr Sauerstoff wird teilweise zu Ozon und es bilden sich Kerne der Dampfcondensation in ihr. Mehrere andere Strahlungsarten von gleicher Wirkung sind seither aufgefunden worden, aber es ist, soviel mir bekannt, unbemerkt geblieben, dass auch eine dem sichtbaren Licht sehr nahe verwandte Strahlung dieser selben Wirkungen fähig ist.

I. Nebelkernbildung.

2. Versuche über das „Zerstäuben der Körper durch das ultraviolette Licht“ hatten Hrn. M. Wolf und mir vor längerer Zeit die folgende Erscheinung gezeigt.[1]) Das Licht elektrischer Funken trat durch ein Quarz- oder Gypsfenster in einen sonst von der Lichtquelle abgeschlossenen Raum, in welchen sich ein Wasserdampfstrahl befand, der aus der Spitze eines Glasrohres in die Luft trat. Mit dem Einsetzen des Lichtes erfolgte kräftig diejenige Wirkung auf den Dampfstrahl, welche nach Aitken's und R. v. Helmholtz' Untersuchungen[2]) das Vorhandensein von Condensationskernen in der ihn umgebenden Luft anzeigt: Die sonst nebelige und verwaschene Gestalt des Strahles wird wolkig und besser begrenzt und sein sonst mattes Grau geht in schimmernde Farben oder gar helles Weiss über, Veränderungen, welche dem etwas geübten Auge bei zweckmässiger Beleuchtung sehr auffällig sind. Es war unwesentlich für das Eintreten der Wirkung, ob der

1) P. Lenard u. M. Wolf, Wied. Ann. **37.** p. 447—451. 1889.

2) N. Aitken, Trans. Roy. Soc. Edinburgh **30.** p. 337. 1881. — R. v. Helmholtz, Wied. Ann. **32.** p. 1. 1887.

Dampfstrahl und sein Rohr in dem aus dem Fenster tretenden Lichtbündel sich befanden oder völlig ausserhalb desselben; um eine directe Wirkung des Lichtes auf den Dampfstrahl handelte es sich also nicht. Am kräftigsten war die Wirkung in unmittelbarer Nähe des Fensters und nur hier trat sie auch ohne Verspätung, gleichzeitig mit dem Einsetzen der Funken auf; je weiter aber der Dampfstrahl vom Fenster entfernt war, um so mehr war Verspätung der Wirkung nach Einsetzen und entsprechende Nachdauer derselben nach Aufhören der Belichtung zu bemerken. Aus diesen und den übrigen damaligen Beobachtungen schlossen wir, dass die Oberfläche des Fensters bei der Belichtung zur Quelle der vom Dampfstrahl angezeigten Condensationskerne werde und wir nannten diese Kerne daher kurz Quarzstaub, ohne übrigens damit, wie wir hinzufügten, etwas über ihre Natur aussagen zu wollen. Es gelang uns auch, die Wege der vom Quarzfenster ausgehenden Kerne zu verfolgen und ihre Geschwindigkeiten zu bestimmen, die von sehr geringer Grösse waren, rund 4—10 cm/sec. Da der Quarzstaub das besondere Vorhaben der damaligen Versuche störte, hielten wir ihn durch feste Schirme vom Dampfstrahl ab, was möglich war, ihn aber der weiteren Untersuchung entzog. Ich habe diese Untersuchung seither, und neuerdings mit Erfolg, wieder aufgenommen, worüber das Folgende berichtet.

3. Als Lichtquelle kam vorerst (3.—7.) wieder die von Zinkdrähten gebildete Funkenstrecke eines grösseren, mit Leydener Flaschen versehenen Inductoriums zur Verwendung[1]), als Fenster eine 3 mm dicke, planparallele Quarzplatte von 2 cm Durchmesser, luftdicht befestigt in der Oeffnung einer grossen, als Schirm wirkenden Zinkplatte, welche in allen Fällen leitend mit der Erde verbunden ist.

Zunächst ergab sich, wie schon bei den früheren Versuchen, dass eine dünne Glas- oder Glimmerplatte von der Grösse des Fensters, an beliebiger Seite an dasselbe gelegt, die Dampfstrahlwirkung völlig unterdrückt. Eine Wirkung des sichtbaren Lichtes ist dieselbe also nicht.

1) Als Unterbrecher des Primärstromes wurde der von Hrn. Wehnelt angegebene Flüssigkeitsunterbrecher mit Vorteil benutzt.

Weiter aber, was neu ist, verschwindet die sonst sehr kräftige Wirkung auch dann völlig, wenn der Abstand der Funken vom Fenster grösser gemacht wird als etwa 2 cm, woraus folgt, dass auch keine Wirkung des gewöhnlichen ultravioletten Lichtes vorliegt. Denn dieses Licht dringt in viel grössere Entfernungen hinter das Fenster, wie man erkennt, wenn man an Stelle des Dampfstrahles eine negativ geladene, mit einem Elektroskop verbundene Zinkplatte in das Lichtbündel bringt und die bekanntlich durch das ultraviolette Licht ausgeübte entladende Wirkung auf die Platte beobachtet; diese Wirkung, welche durch Glimmer und Glas ebenfalls abzuschneiden ist, reicht bis in die Entfernung mehrerer Decimeter von Funken.

4. Wir stellen nun die Funken ganz nahe am Fenster, etwa in 0,2 cm Entfernung von demselben auf. Die Wirkung ist jetzt intensiv, und befindet sich der Dampfstrahl dicht am Fenster, so erfolgt sie, wie zu erwarten, stets gleichzeitig mit dem Einsetzen des Lichtes. Das letztere bleibt nun aber auch dann noch der Fall, wenn der Dampfstrahl allmählich vom Fenster entfernt wird bis zu einem Abstande von etwa 2 cm; erst ausserhalb der Strecke von 2 cm ist deutliche Verspätung der Wirkung zu beobachten. Entfernen wir nun die Funken in kleinen Stufen mehr und mehr vom Fenster und wiederholen jedesmal den Versuch, so ergiebt sich, dass die Strecke der unverspäteten Wirkung in den nämlichen Stufen gegen das Fenster sich zurückzieht, sodass sie, von der Lichtquelle aus gemessen, in allen Fällen etwa 2 cm betrug. Steht die Lichtquelle selber 2 cm vom Fenster ab, so resultirt der in 2. beobachtete Fall der überall, ausser dicht am Fenster, verspäteten Wirkung; steht sie noch weiter ab, haben wir den Fall des Fehlens der Wirkung (3.).

Hiernach wird man nicht mehr geneigt sein, das Quarzfenster als Quelle der vom Dampfstrahl angezeigten Condensationskerne zu betrachten, vielmehr erscheint die durchstrahlte Luftstrecke innerhalb eines bestimmten Abstandes um den Funken herum — 2 cm in Obigem — als diese Quelle, ein Resultat, das später (11.) noch viel deutlicher hervortreten wird.

5. Dass die Wirkung nicht unmittelbar von den elektrischen Kräften der Funken selber ausgeübt wird, ist schon

durch die Undurchlässigkeit dünnen Glases und Glimmers angezeigt (3.) und wird durch die folgenden Versuche bestätigt.

Engmaschiges Drahtnetz, welches das Fenster bedeckt und dabei den Zinkschirm berührt, schwächt die Wirkung kaum und das Gleiche gilt von einer dünnen Schicht destillirten Wassers, mit welcher man die eine oder auch die andere Fläche des Fensters benetzt, oder welche zwischen dem Fenster und einer zweiten, aufgelegten Quarzplatte so gehalten wird, dass sie in dem Zinkschirm eine leitende Fortsetzung zur Erde besitzt.

Auch andere Körper konnten durch Anlegen an das nötigenfalls durch Blenden aus schwarzem Papier verkleinerte Fenster auf ihre Durchlässigkeit geprüft werden. Welche Seite des Fensters dabei benutzt wurde, war ohne Einfluss.

Durchlässig waren Quarzschichten bis zu etwa 10 mm Dicke, gleichgültig welches die Richtung ihrer Krystallaxe und ihr optischer Drehungssinn war. Besonders auffallende Durchlässigkeit zeigten Krystallplatten aus Steinsalz, Gyps, Flussspat, durch welche die Wirkung sogar auf grössere Entfernungen fortgeleitet werden konnte als durch Luft; so durch Steinsalzschichten von 25 mm Dicke sehr deutlich, durch eine Gypsschicht von 22 mm Dicke fast ohne Schwächung, während doch 20 mm Luft die Wirkung ganz auslöschten. Unter einer Anzahl klarer Stücke farblosen Steinsalzes fanden sich indessen auch einige, die bei einer Dicke von nur 5 mm undurchlässig waren.

Undurchlässig waren auch gewöhnliches Blattaluminium, trockenes und feuchtes Seidenpapier, schwarzes Papier, Gelatine von 0,06 mm Dicke, dünnes klares Celluloid, dünner schwarzer Glimmer, klare Platten aus Beryll von 4 mm Dicke, Arragonit von 2 mm Dicke, Kalkspat von 4 mm Dicke.

Um Flüssigkeiten zu prüfen, wurde der Schirm mit dem Quarzfenster horizontal gelegt, die Funken unter, der Dampfstrahl in horizontaler Richtung über demselben angebracht. Die Flüssigkeiten konnten dann unmittelbar die obere Fläche des Fensters bedecken. Glycerin, Seifenlösung hielten so alle Wirkung ab, ebenso concentrirte oder verdünnte Kochsalzlösungen, letztere selbst in dünnster Schicht zwischen dem Fenster und einer aufgepressten ebenen Quarzplatte ein-

geschlossen.[1]) Das in dünner Schicht durchlässige Wasser wurde undurchlässig bei 1,3 mm Schichtendicke, die undurchlässige Seifenlösung durchlässig in Form von Lamellen, welche Farben, wenn auch hoher Ordnung, zeigten.

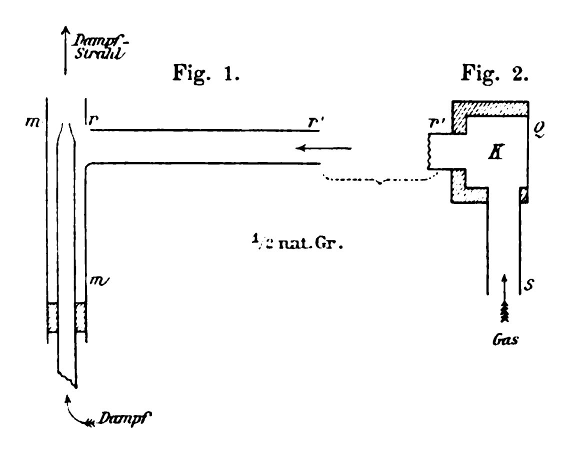
6. Trübung bewirkt Undurchlässigkeit. — Eine Steinsalzplatte von 3,5 mm Dicke verlor durch grobes Mattschleifen einer ihrer Flächen fast völlig ihre vorherige Durchlässigkeit; ob die matte oder die blanke Seite der Platte dem Dampfstrahl zugewendet war, war gleichgültig. Grobes Gypspulver, durch Zerdrücken eines sehr durchlässigen Krystalles hergestellt, war in 4 mm dicker Schicht völlig undurchlässig.

7. Die Wirkung geht durch das Vacuum. — An Stelle des bisherigen einfachen Fensters wurde ein Doppelfenster gesetzt, bestehend aus zwei planparallelen, 3 mm dicken Quarzplatten in 7 mm Abstand voneinander. Der Raum zwischen den Platten konnte mit der Quecksilberluftpumpe evacuirt werden. Solange er Luft enthielt war keine Wirkung der 3 mm von der ersten Quarzfläche entfernten Funken zu bemerken, bei allmählichem Evacuiren erst trat die Wirkung auf; sie war deutlich bei 300 mm Quecksilberdruck, kräftig bei 65 mm und allen geringeren Drucken bis zur erreichbaren Grenze herab. Einlassen von Luft brachte die Wirkung zum Verschwinden, neues Evacuiren liess sie wieder hervortreten. Einlassen von Wasserstoffgas, auch bis zu vollem atmosphärischen Druck, war dagegen kein Hindernis für kräftige Wirkung.

8. Nach den Resultaten der vorhergehenden Versuche gehört die Luft zu den nicht unbeträchtlich absorbirenden Körpern; sie ist undurchlässiger als Flussspat, Gyps, Steinsalz (5.), Wasserstoffgas (7.). In Bezug auf die hier studirte Wirkung erscheint diese Absorption als ein Umsetzungsprocess, denn es verschwindet in der Luft diejenige ursprüngliche Form der von den Funken ausgehenden Wirkung, welche für die Dampfstrahlwirkung als Ursache gilt und auf welche unsere Durchlässigkeitsangaben sich beziehen, und es erscheinen in ihr (4.) die Nebelkerne, welche der Dampfstrahl anzeigt.

1) Die Kochsalzlösung war aus einem durchlässig befundenen Krystallstück hergestellt. Ueber den Gegensatz in der Durchlässigkeit des festen und gelösten Kochsalzes für ultraviolettes Licht vgl. H. Hertz, Ges. Werke 2. p. 77.

Was aber jene ursprüngliche Form der Wirkung anlangt, so kann dieselbe, wenn sie mit Bekanntem überhaupt identisch ist, nach den mitgeteilten Erfahrungen nur ultraviolettes Licht aus demjenigen höchst brechbaren Spectralgebiete sein, dessen Erschliessung Hrn. V. Schumann's Verdienst ist. Für dieses Spectralgebiet ist charakteristisch die ungewöhnlich kräftige Absorption in fast aller Materie, die Luft eingeschlossen, während nur vereinzelte Körper, wie Flussspat, Gyps, Wasserstoffgas als gut durchlässig gefunden wurden.[1])



9. Den Nachweis der geradlinigen Ausbreitung und der Brechbarkeit zu versuchen, war es zunächst erwünscht, die Wirkung in grösseren Entfernungen als bisher zu erhalten. Hierin konnte zunächst Vorteil erzielt werden durch Anbringung einer zweckmässigeren Primärwickelung im Inductorium; es verfünffachte dies die bisher in Luft erreichte Entfernung. Eine weitere Verbesserung betraf den Dampfstrahl. Die Ansatzstelle desselben wurde mit einem gläsernen Mantel umgeben, *m m* Fig. 1, in welchen die zu prüfende Luft durch das Seitenrohr *r r'* vom Dampfstrahl selber eingesogen wird. Die Empfindlichkeit des Dampfstrahles an sich wird dadurch allerdings nicht vergrössert, aber es wird die Sicherheit erlangt, dass die dem Dampfstrahl zugeführte Luft wirklich der jeweils

---

1) V. Schumann, Sitzungsber. d. k. Akademie d. Wissensch. zu Wien. II. 102. p. 415 u. 625. 1893.

gewünschten Stelle des Raumes entstammt, an welche man nun die einsaugende Mündung *r'* zu bringen hat[1]), während der freie Dampfstrahl die Luft in etwas unregelmässiger Weise aus seiner Umgebung ansaugt. Die Wirksamkeit der Vorrichtung beruht offenbar darauf, dass die in einem Luftvolumen einmal erzeugten Nebelkerne nicht sofort aus demselben verschwinden (vgl. 2., 4., 11.). Endlich wird von jetzt ab als Fenster eine Quarzplatte von nur $^1/_2$ mm Dicke und 2 cm Durchmesser vorausgesetzt.

10. Mit den so verbesserten Mitteln wurde eine Reihe von Metallen als Funkenelektroden versucht. Folgendes sind die grössten Entfernungen, bis zu welchen die stets 2 mm langen Funken vom Fenster abgerückt werden konnten, ohne dass die Wirkung auf den dicht an der anderen Fensterseite befindlichen Dampfstrahl ganz verschwand.

Al	Cd	Sn	Pb	Zn	Mg
50	36	27	20	18	12 cm

Im Aluminium ist somit ein weitaus vorteilhafteres Elektrodenmetall gefunden, als das bisher benutzte Zink, welches wir daher für das nun Folgende verlassen. Ein anderer als nur der quantitative Unterschied zwischen den Lichtern der verschiedenen Funken kam übrigens nicht zum Ausdruck (vgl. 12c). So hielt eine 0,03 mm dicke Glimmerplatte auch die in kurzer Distanz ausgeübte, äusserst intensive Wirkung der Aluminiumfunken völlig ab und auch die anderen oben mit Zinkfunken auf ihre Durchlässigkeit geprüften Körper ergaben, zum grösseren Teil mit Aluminium- und Magnesiumfunken wieder versucht, nichts Neues.

11. Art der Ausbreitung. — Befinden sich die kurzen Aluminiumfunken in grösserer Entfernung vom Fenster, sagen wir 20 cm, so können undurchlässige Körper leicht so zwischen beide eingeschoben werden, dass deren sichtbarer Schatten auf der Fensterfläche scharf begrenzt erscheint. Ich habe den Versuch mit Diaphragmen und Schirmen von kreisförmiger

---

1) Es wird der Ort der einsaugenden Mündung im Folgenden manchmal kurz als Ort des Dampfstrahles bezeichnet. Auch soll es sich durchweg von selbst verstehen, dass Dampfstrahl und Lichtquelle auf entgegengesetzten Seiten des Fensters befindlich sind.

und geradliniger Begrenzung aus Papier und Metall durchgeführt und gefunden, dass dieselben solange ganz ohne Einfluss blieben auf die Dampfstrahlwirkung, als ihr Schatten keinen Teil der freien Fensteroberfläche bedeckte und dass die Wirkung jedesmal dann und nur dann völlig verschwand, wenn die ganze Fensteroberfläche beschattet war.

Das auf der Dampfstrahlseite aus dem Fenster dringende Lichtbündel ist bei obigem Abstand der Funken ebenfalls sehr scharf begrenzt; es liess sich an demselben, in Entfernungen bis zu etwa 15 cm vom Fenster, Folgendes beobachten. Befindet sich zuerst die einsaugende Mündung des Dampfstrahlmantels ausserhalb des Lichtbündels, in der Entfernung einiger Centimeter davon, so erhält man nur verspätete, oft unsichere Reaction. Wird zweitens die Mündung bis dicht an das Lichtbündel gebracht, so aber, dass noch immer kein Teil des Dampfstrahlrohres oder Mantels noch auch ein anderer fester Körper, oder der Dampfstrahl selber vom Lichte getroffen werden, so tritt die Reaction in aller Regelmässigkeit und ohne merkbare Verspätung zugleich mit dem Einsetzen der Funken auf. Ein Luft-, Sauerstoff- oder Leuchtgasstrom, welcher aus der Mündung eines Schnittbrenners zwischen dem Lichtbündel und der einsaugenden Rohrmündung quer an letzterer vorbeibläst, hält ganz die Wirkung ab. Wird aber endlich der Dampfstrahl so aufgestellt, dass das Licht in das Innere des einsaugenden Rohres strahlt, so ist der Luftstrom kein Hindernis mehr für die übrigens wieder ohne Verspätung eintretende Wirkung.

Diese Versuche scheinen mir deutlich zu zeigen, dass die wirksamen, vom Funken geradlinig ausgehenden Strahlen ihren Weg durch die Luft überall mit Kernen der Dampfcondensation erfüllen, welche, einmal entstanden, auch aus dem Strahlenbündel herauswandern und mit der Luft fortströmen können (vgl. 2., 4., 9.).

12. Brechbarkeit. — Schon mit den verstärkten Zinkfunken (9), welche in 10 cm Abstand noch Wirkung erzeugten, war festzustellen, dass die bei 20 cm Abstand verschwundene Wirkung wieder zum Vorschein kam, wenn eine Quarzlinse in geeigneter Stellung zwischen Funken und Dampfstrahl eingeschoben wurde.

Um die so nachgewiesene regelmässige Brechbarkeit der wirksamen Strahlen quantitativ zu erforschen, habe ich der sonst gebräuchlichen Spectrometeranordnung die einfache Linse vorgezogen. Je eine Quarz-, Steinsalz- und Flussspatlinse von kurzer Brennweite kam zur Verwendung, alle waren biconvex gleichgekrümmt und im Durchmesser auf 2,4 cm abgeblendet. Object-, bez. Bildabstand wurden so gewählt, dass die chromatische Aberration stark zur Geltung kam. Object sind die Funken; den Ort des Bildes kennzeichnet eine Blende aus Glimmer, jedesmal sehr nahe von solchem Oeffnungsdurchmesser, dass dieser sich verhielt zur Funkenlänge, wie der Bildabstand zum Objectabstand. Es wurde so erreicht, dass jedesmal nur diejenigen Strahlen ungehindert die Blende passiren konnten, in deren Bildebene sie sich befand, während die anders brechbaren Strahlen als Zerstreuungskreise auf ihr aufgefangen wurden. Die Blende selbst ist stets an der Fensterfläche befestigt, aus deren Nähe der Dampfstrahl die Luft entnimmt. Funken und Blende wurden der Einfachheit halber unverrückt belassen, nur die Linse verschoben.

Es zeigte sich sogleich, dass die wirksamen Strahlen weit brechbarer waren als die sichtbaren. Denn befand sich das sichtbare Bild der Funken in der Blendenöffnung, so fehlte die Wirkung und sie erschien erst nach solcher Verschiebung der Linse, dass das sichtbare Licht noch weit vor seiner Vereinigung als grosser Zerstreuungskreis auf die Blendenoberfläche fiel.

Folgendes waren die quantitativen Resultate:

a) Quarzlinse, senkrecht zur Axe geschliffen; centrale Dicke 0,70 cm. Beobachtung in freier Luft. Quarzplatte von $^1/_2$ mm Dicke als Fenster.

Aluminiumfunken von 2 mm Länge	Object-abstand	Bild-abstand	Brechungs-exponent n	Wellen-länge λ
	von der Linsenmitte			
	cm	cm		mm
Maximum der Wirkung	19,65	7,15	1,68	0,00018
Optische Einstellung mit Natriumlicht	15,65	11,15	(1,544)	—

Die Berechnung des in der vorletzten Columne angegebenen Brechungsexponenten stützt sich hier, wie in den folgenden Fällen, auf den in der letzten Zeile der Tabellen vermerkten Versuch, bei welchem eine durch Natriumlicht erhellte Kreisöffnung von etwa der Grösse der Funken Gegenstand, durchscheinendes Papier Bildschirm war und die Einstellung auf kleinsten Durchmesser des Bildes gesucht wurde. Der Brechungsexponent für Natriumlicht wurde mit dem eingeklammerten Werte in die Rechnung gesetzt, in welcher auch die Dicke der Linse berücksichtigt ist.

b) Steinsalzlinse; centrale Dicke 0,90 cm. Beobachtung in freier Luft. Quarzplatte von $^1/_2$ mm Dicke als Fenster.

Aluminiumfunken von 2 mm Länge	Object-abstand (von der Linsenmitte)	Bild-abstand (von der Linsenmitte)	Brechungs-exponent n	Wellen-länge λ
	cm	cm		mm
Aeussere Grenze der Wirkung	16,9	3,75	2,03	0,00016
Maximum der Wirkung	16,3	4,4	1,90	0,00017
Innere Grenze der Wirkung	15,5	5,15	1,80	0,00019
Opt. Einstellung m. Na-Licht	15,8	8,55	(1,544)	—

c) Flussspatlinse, farblos, jedoch nicht frei von Sprüngen und kleinen Trübungen; centrale Dicke 0,70 cm.

Hier wurden die Versuche etwas weitergehend variirt. Die Linse war dazu im Inneren eines mit mattschwarzem Papier ausgekleideten Glasrohres verschiebbar, dessen beide Enden mit klaren, farblosen, planparallelen Flussspatplatten von 3 mm Dicke verschlossen waren und welche evacuirt oder mit Gasen gefüllt werden konnte. In 1 cm Abstand von der einen Verschlussplatte, also stets in freier Luft, stand der Funke, an der äusseren Fläche der anderen Platte war die Glimmerblende befestigt.[1]) Es wurden Funken zwischen Al, Zn, Cd und Mg benutzt, die ersteren beiden bei Luft-, Wasser-

1) Wegen der Brechung in den Verschlussplatten waren die in der Tabelle gegebenen beobachteten Object- und Bildweiten zur Berechnung der n zu corrigiren. Es wurden beide vermindert um $D(n-1)/n$, wo D die Dicke der Platten, n der ohne die Correction berechnete bez. für Natriumlicht schon bekannte Brechungsexponent ist.

stoff- und Vacuumfüllung des Rohres, die letzteren beiden nur bei Vacuumfüllung, worunter hier eine mit der Wasserluftpumpe auf etwa 20 mm Quecksilberdruck gebrachte Wasserstofffüllung zu verstehen ist. Die verschiedenen Metalle ergaben keine deutlich verschiedenen Lagen des Maximums und der Grenzen der Wirkung (vgl. 10.), ebenso nicht Wasserstoff- und Vacuumfüllung des Rohres; die Resultate dieser Fälle sind daher in der folgenden Zusammenstellung zu Mittelwerten vereinigt. Das Gleiche gilt von der zweiten wirksamen Lage der Linse zwischen Object und Bild, welche hier in einigen Fällen aufgesucht wurde und wobei Vertauschung von Object- und Bildabstand resultirte.

Funken verschiedener Metalle von 0,5 bis 2 mm Länge	Füllung des Rohres	Object-abstand von der Linsenmitte	Bild-abstand von der Linsenmitte	Brechungs-exponent n	Wellen-länge λ
		cm	cm		mm
Aeussere Grenze der Wirkung	H_2 oder Vacuum	3,91	23,72	1,62	0,00014
Maximum " "	H_2 oder Vacuum	4,41	23,22	1,55	0,00016
Aeussere Grenze " "	Luft	4,51	23,12	1,54	0,00016
Maximum " "	Luft	4,76	22,87	1,52	0,00018
Innere Grenze " "	H_2, Vac. oder Luft	4,91	22,72	1,50	0,00019
Optische Einstellung mit Natriumlicht		5,87	21,76	(1,434)	—

13. Die gefundenen Brechungsexponenten zeigen, dass das Spectralbereich der Wirkung nahe dort beginnt, wo die vorhandenen Dispersionsmessungen im Ultraviolett enden. In der That sind so brechbare Strahlen, wie die hier wirksamen, bisher überhaupt nur in Hrn. Schumann's Spectralaufnahmen zur Untersuchung gelangt, welche, wie bekannt, im evacuirten Spectrographen erzielt wurden.

Die in der letzten Columne der Tabellen verzeichneten Wellenlängen sind nach der von Helmholtz aus der elektromagnetischen Lichttheorie gefolgerten, für nichtabsorbirende Medien geltenden zweiconstantigen Formel[1]) berechnet, wobei zu Grunde gelegt wurden für Quarz und Flussspat die Fraun-

1) H. Helmholtz, Wissensch. Abhandl. 3. p. 519. Gleichung (9).

hofer'sche Linie D und Cornu's Al_{32} im Ultraviolett[1]), für Steinsalz Rubens' b_5 im Ultrarot[2]) und Fraunhofer's H, zwischen welchen Stellen Zeichen von Absorption sich nicht zeigen. Ein Vergleich der Wellenlängen in den drei Tabellen zeigt Uebereinstimmung in den Aussagen der drei verschiedenen Körper, soweit die Genauigkeit der Versuche geht. Diese Uebereinstimmung war notwendig, wenn die wirksamen Strahlen Lichtstrahlen waren.

Dass die wirksamen Strahlen in der Luft absorbirt werden, ist schon festgestellt worden (8.). Wir finden nun den Anfang der Absorption — weil den der Wirkung — in Luft bei $\lambda = 0{,}00019$ und vollständige Absorption bei $\lambda = 0{,}000\,16$, über welche Grenze hinaus die Wirkung nach Durchsetzung der rund 28 cm langen Luftschicht nicht geht. Wasserstoff dagegen verhielt sich noch bei $\lambda = 0{,}000\,14$ gleich dem paritiellen Vacuum, lässt also bis dahin noch keine merkliche Absorption derjenigen wirksamen Strahlen erkennen, welche nach Durchsetzung der stets vorhandenen Luftschicht von 1 cm Dicke und der drei Flussspatschichten noch übrig geblieben waren. Hrn. Schumann's entsprechende Resultate[3]) scheinen mir hiermit gut übereinzustimmen, was wieder für die Lichtnatur der Wirkung spricht, denn bei Spectralaufnahmen, die Liniengruppirungen zeigen, welche ohne Bruch bis zum sichtbaren Gebiete sich fortsetzen, wird man in dieser Hinsicht kaum zweifeln.

14. Wirkung auf verschiedene Gase. — Die luftdichte Kammer K, Fig. 2 (p. 491), mit dem $^1/_2$ mm dicken Quarzfenster Q, welche an das Rohrende r' des Dampfstrahlmantels (Fig. 1) gesetzt werden kann, erlaubt beliebige Gase erst in K der Durchstrahlung und dann der Wirkung auf den Dampfstrahl zu unterwerfen. Die Gase wurden bei s alle mit nahezu gleicher und so geringer Geschwindigkeit eingeleitet, dass der Dampfstrahl sein ungestörtes Aussehen behielt, andernfalls er seine Empfindlichkeit verlieren würde.

---

1) E. Sarasin bez. A. Cornu nach Landolt und Börnstein's Tabellen. 2. Aufl. p. 386 und 398.

2) H. Rubens, Wied. Ann. 45. p. 254. 1892.

3) V. Schumann, l. c.

Es erwiesen sich bei 10 cm Funkenabstand vom Fenster als nahezu gleich wirksam Sauerstoff, Luft und Kohlensäure [1]), nur wenig wirksam war Leuchtgas und es fehlte jede Wirkung beim Wasserstoffgas. Die Gase waren durch Watte filtrirt; unterblieb diese Vorsicht, so änderte dies jedoch den Erfolg nicht. [2])

Das Verhalten des Wasserstoffgases ist erklärlich, denn wir fanden (13), dass es durch 1 cm Luft filtrirte Strahlen nicht absorbirt. Als durchaus unerregbar erwies sich das Gas indessen nicht, denn bei weniger als 1 cm Abstand der Funken vom Fenster erfolgte deutliche, bei 1 mm Abstand kräftige Wirkung. Man kann daraus schliessen, dass von den Funken auch Strahlen ausgehen, welche vom Wasserstoff merklich absorbirt werden. Glimmer hielt auch die Wirkung auf Wasserstoffgas völlig ab; Flussspat, Gyps, Steinsalz und Quarz in der Dicke einiger Millimeter liessen sie durch. Ausser den Aluminiumfunken waren auch Cadmiumfunken auf Wasserstoffgas wirksam; keine Wirkung sah ich bei Magnesium-, Zink-, Zinnfunken, auch wenn dieselben dem Fenster bis auf 1,5 mm genähert waren.

Um das Verhalten der anderen Gase zu beurteilen, habe ich deren Durchlässigkeit in 65 mm dicker, zwischen zwei dünne Quarzplatten eingeschlossener Schicht geprüft, wobei Luft den Dampfstrahl umgab. Sauerstoff und Kohlensäure waren nicht undurchlässiger als Luft, Leuchtgas dagegen völlig undurchlässig. Man wird also kräftige Absorption zwar als notwendige, jedoch, wie der Fall des Leuchtgases zeigt, nicht als hinreichende Bedingung für kräftige Wirkung ansehen dürfen.

Ruhte die Luft in der Vorkammer K während der Bestrahlung, so war keine Wirkung auf den Dampfstrahl zu bemerken. Wurde aber nach Aufhören der Belichtung die

---

1) In schnellerem Strome wirkte Kohlensäure auch ohne Belichtung auf den Dampfstrahl.

2) Dass die Wirkung nicht etwa auf Staub ausgeübt wird, welcher in unfiltrirtem Gase vorhanden wäre, schliesse ich besonders auch aus früheren Versuchen (P. Lenard u. M. Wolf l. c.), in welchen staubfreie Luft in einem sehr grossen Glasballon durchstrahlt und nachher nebelkernhaltig gefunden wurde.

Luft aus der Kammer durch eingeblasenes Gas zum Dampfstrahl getrieben, so erfolgte noch nachträglich die Wirkung auf denselben. Es konnten dabei selbst 30 sec zwischen Belichtung und Einblasen verstreichen. Dieses Andauern der Wirkung, das nach früherem (11.) zu erwarten war, habe ich auch in Sauerstoff und Leuchtgas beobachtet.

II. Elektrische Wirkung.

15. An elektrisch geladenen Leitern, welche dem Funkenlichte ausgesetzt sind, war folgendes zu beobachten.

Es sei zuerst eine Aluminiumplatte mit alter, oxydirter Oberfläche parallel der Fläche des dünnen Quarzfensters in etwa 3 cm Entfernung von demselben isolirt aufgestellt und mit dem Exner'schen Elektroskop verbunden; auf der anderen Seite des Fensters, in etwa 5 cm Entfernung davon, befinden sich die 3 mm langen Aluminiumfunken, deren Lichtbündel von der Platte ganz aufgenommen wird. Ist die Platte negativ elektrisch gemacht, so wird man die erfolgende rasche Entladung zunächst als wohlbekannten Hallwachs'schen Effect deuten; dass aber positive Ladungen im Licht fast ebenso schnell von der Platte verschwinden, stimmt nicht mit Bekanntem überein. Allerdings ist das Bestehen einer Wirkung solcher Art schon behauptet worden[1]), indessen konnten die Herren Elster und Geitel in diesem Falle sehr wahrscheinlich machen, dass wieder nur die bekannte lichtelektrische Wirkung vorliege, ausgeübt von reflectirtem Lichte auf die negative Ladung, welche an der der Platte gegenüberliegenden Schirmfläche gebunden ist.[2]) Diese Erklärung dürfte aber in unserem Falle nicht zutreffen. Denn ob die Schirmfläche, welche das Fenster trägt, von altem, stark oxydirtem Zink gebildet war, wie stets bisher, oder ob dieses bedeckt wurde mit altem Kupfer, mit Pappe, trockenem oder benetztem Filtrirpapier, und ob ausserdem noch das Fenster mit Drahtnetz überdeckt wurde, das mit Glycerin befeuchtet war, alles dies war für die Geschwindigkeit der Entladung der positiven Platte unwesentlich. Dafür, dass es nicht von der Schirmfläche aus-

1) E. Branly, Compt. rend. **120**. p. 829. 1895.

2) J. Elster u. H. Geitel, Wied. Ann. **57**. p. 24. 1896.

gehende negative Elektricität ist, welche die positive Ladung der Platte vernichtet, spricht auch der Umstand, dass ein kräftiger, breiter Sauerstoffstrom, zwischen Platte und Schirm hindurchgeblasen, die Entladung nicht vermindert, sondern beschleunigt.

Die Natur der bestrahlten Fläche selber war ebenfalls nicht von dem Einfluss, welcher für die bekannte Entladung der negativen Elektricität maassgebend ist. So änderte Blanksmirgeln der alten Aluminiumfläche nichts an der Geschwindigkeit der Entladung der positiven Elektricität. Es wurden beispielsweise von der alten Aluminiumfläche entladen 5,1 sc. des Elektroskops in 10 sec bei einer anfänglichen Divergenz von + 20 sc., von der blanken Aluminiumfläche 5,2 sc. und mit dem oben erwähnten Sauerstoffstrome 7,0 sc.; die Platte stand dabei 10 cm vom Fenster, 12 cm von den Funken entfernt. Auch Bedecken der bestrahlten Plattenfläche mit Filtrirpapier, das mit destillirtem Wasser benetzt wurde, verminderte die Entladung der positiven Elektricität nicht. Dieselbe blieb im besonderen auch dann kräftig bestehen, wenn sowohl die Platte als auch die Schirmfläche samt dem Quarzfenster mit Wasser benetzte Oberflächen darboten. Auch Zink- und Messingflächen verloren positive Ladungen.

Eine auch nur wenige Millimeter dicke Leuchtgasschicht, eine Glimmerplatte von 0,03 mm Dicke verhinderten ganz die Entladung der positiven, wie die der negativen Elektricität.

Funken anderer Metalle wie die des Aluminiums erwiesen sich ebenfalls als wirksam und zwar in denselben Abstufungen, welche mit dem Dampfstrahl gefunden wurden (10.). Platte und Schirm waren mit feuchtem Papier bedeckt, das Fenster mit befeuchtetem Drahtnetz, die Platte stand 1 cm vom Fenster ab; die Entfernungen der Funken vom Fenster, bis zu welchen in 2 sec deutliche positive Entladung bemerkt wurde, waren bei Al, Cd, Pb, Sn, Zn: 10, 5, 4, 4, 3 cm, Mg wirkte auch in 1 cm Entfernung nicht deutlich.

Eine unelektrische, mit nassem Papier bedeckte Platte nahm im Lichte der Aluminiumfunken keine am Exner'schen Elektroskop bemerkbare Ladung an.

16. Die obigen Beobachtungen scheinen anzudeuten, dass die durchstrahlte Luft elektrisch leitend wird. Als einwand-

freier wird man aber vielleicht die folgenden Versuche betrachten, welche das Leitvermögen ausserhalb des durchstrahlten Raumes zeigen und wobei verschiedene Gase sich verschieden verhalten.

Das stets $^1/_2$ mm dicke Quarzfenster mit seiner Schirmwand verschliesst das eine Ende eines 28 cm langen, 4,2 cm weiten Glasrohres, an dessen anderem Ende das zu untersuchende Gas eintritt. Dem Fenster zuströmend bleibt das Gas der Wirkung der daselbst eintretenden Strahlung unterworfen, bis es an einem Seitenrohre dicht vor dem Fenster wieder austritt, um alsdann den Zwischenraum zweier conaxialer Messingcylinder zu durchströmen, welche die beiden Belege eines elektrischen Condensators bilden.[1]) Der äussere Cylinder des letzteren ist stets mit der Erde verbunden, der innere mit dem Exner'schen Elektroskop; die Durchmesser der Cylinder sind 3,5 und 2,4 cm, ihre Längen 6 cm. Der Gasstrom passirt zuletzt eine Gasuhr, welche seine Geschwindigkeit misst.

Sind die 3 mm langen Aluminiumfunken nicht weiter als 10 cm vom Fenster entfernt, so ergiebt sich deutliche Abnahme einer Ladung des Condensators; die Abnahme wird sehr augenfällig, wenn die Funken dem Fenster auf Bruchteile eines Centimeters genähert werden. Ein Glimmerblatt oder eine 5 mm dicke Leuchtgasschicht hielten die Wirkung auch bei kleinstem Funkenabstande ab; ebenso blieb dieselbe aus, wenn das Gas im Rohrsystem ruhte. Positive und negative Ladungen verhielten sich genau gleich; nachdem dies bei Luft, Leuchtgas und Kohlensäure constatirt war, kamen nur mehr positive Ladungen zur Verwendung. Feuchte und sorgfältig getrocknete, durch Watte staubfrei gemachte und unfiltrirte Luft waren nicht deutlich verschieden. Von Einfluss war die Strömungsgeschwindigkeit des Gases; schneller strömendes Gas wirkte im allgemeinen stärker, doch war der Einfluss innerhalb der untersuchten Grenzen nur bei Kohlensäure und Leuchtgas auffallend.

---

1) Um den Versuch möglichst beweisend zu machen, war zuerst ein längerer, schwarzer Gummischlauch mit Krümmung zwischen Bestrahlungsrohr und Condensator geschaltet, welcher dann für die quantitativen Versuche ohne wesentliche Aenderung des Erfolges durch ein kurzes, gerades Schlauchstück ersetzt wurde.

In der folgenden Zusammenstellung ist die Wirkung (Columne 3—5) durch die Divergenzabnahme angegeben, welche bei einer Anfangsdivergenz von 20,0 sc. durch 15 sec währende Bestrahlung erfolgte. Die Isolation des Condensators war stets so gut, dass an dem mit Fernrohr abgelesenen Elektroskop ohne Licht eine Divergenzabnahme nicht zu bemerken war.

Gas	Zeit für das Durchströmen von 1 *l* Gas	Funkendistanz vom Fenster		
		3 mm	6 mm	60 mm
		Wirkung		
	sec	sc.	sc.	sc.
Kohlensäure	18 [1])	11,1	—	—
Kohlensäure	34	8,0	7,2	1,0
Luft	19—38	5,8	5,1	0,8
Sauerstoff	18—37	3,9	4,3	0,5
Leuchtgas	16	5,5	—	—
Leuchtgas	36	3,6	—	—
Wasserstoff	14—37	3,7	3,2	0,2

Die Zeit, welche das Gas brauchte, um aus dem Bestrahlungsrohre in den Condensator zu gelangen, beträgt nach den Angaben der Tabelle und den Ausmessungen des Verbindungsrohres 0,06 bis 0,14 sec. Es scheint das Gas seine Leitfähigkeit nach Aufhören der Belichtung ausserordentlich schnell zu verlieren, denn tauchte auch nur ein Stück des vom positiv geladenen Condensator zum Elektroskop führenden dünnen Leitungsdrahtes in das Lichtbündel, so wurde dadurch die Wirkung schon ganz bemerkbar verstärkt.

Die Tabelle giebt die Gase nach der Stärke ihrer Wirksamkeit geordnet. Soweit Vergleich möglich, gehen danach Dampfstrahlwirkung (14.) und elektrische Wirkung hierin ebenso parallel, wie in Hinsicht der Absorbirbarkeit, des gemeinsamen Bestehens einer Nachdauer und der Ergiebigkeit der verschiedenen Funken als Quellen.

17. Auch gegen die zuletzt beschriebenen Versuche kann man einwenden, dass mindestens ein Teil der beobachteten

1) Bei noch schnellerer Strömung erwies sich die Kohlensäure schon ohne Belichtung als schwach leitend.

Wirkung in der Bestrahlung der festen Wände des Glasrohres seinen Ursprung haben könnte, durch welches das Gas dem Fenster zuströmte. In dem Streben, die Wirkung völlig rein zu erhalten, so nämlich, dass dabei ein anderer Körper als die Luft vom Licht überhaupt nicht getroffen wird, habe ich Erfolg gehabt. Es liess sich elektrische Wirkung in der Umgebung eines scharf begrenzten Strahlenbündels beobachten und zwar in Entfernungen bis zu 40 cm vom Fenster. Ich möchte aber über diese Form der Wirkung in anderem Zusammenhange berichten.

III. Ozonbildung.

18. Schon lange war mir der Ozongeruch aufgefallen, welcher in der Nähe eines vollkommen dichten Quarzfensters bemerkbar wird, wenn Funkenlicht aus demselben dringt. Bei den hier benutzten stärkeren Funken ist dieser charakteristische Geruch so intensiv, dass Luft oder Sauerstoff, welche die Nähe des Fensters passirt haben, nicht mehr athembar erscheinen. Zum chemischen Nachweis wurde atmosphärische Luft in langsamem Strome durch das oben (16.) benutzte Bestrahlungsrohr und dann über stärkehaltige Jodkaliumlösung geleitet. Waren 3 mm lange Aluminiumfunken in 1 cm Abstand vom Quarzfenster des Rohres aufgestellt, so trat in 1 sec deutliche, in 5 sec intensive Blaufärbung des Reagenses ein. Bei Vorschaltung einer Glimmerplatte blieb jede Wirkung auch nach 30 sec aus. Bei 0,2 cm Abstand der Funken vom Fenster war die Blaufärbung intensiv in 1 sec, bei 10 cm Abstand deutlich in 15 sec. Bei grösserer Entfernung der Funken, 20,7 cm vom Fenster, war nach 5 sec noch keine Wirkung zu bemerken; wurde nun aber die früher benutzte Steinsalzlinse in 4,4 cm Entfernung vom Fenster eingeschaltet und so diejenige Strahlung der Funken auf dasselbe concentrirt, welche die stärkste Dampfstrahlwirkung ergab (12b), so trat innerhalb derselben Zeit kräftige Bläuung ein. Trockene und feuchte, staubfreie und unfiltrirte Luft verhielten sich wie bei der elektrischen Wirkung, so auch hier nicht deutlich verschieden.

Andere Quellen.

19. Die bisher ausschliesslich benutzten elektrischen Funken sind nicht die einzige und wohl auch nicht die mächtigste Quelle der als wirksam befundenen Strahlen.

Unwirksam waren freilich, mit dem Dampfstrahl hinter dem $^1/_2$ mm dicken Quarzfenster in 2 cm Abstand geprüft, die leuchtende Gasflamme eines Schnittbrenners, die blaue eines Bunsenbrenners, einer Gebläselampe, die Flamme des Wasserstoffgases in Luft oder auch mit Sauerstoff im Knallgasgebläse, brennender Schwefelkohlenstoff, brennendes Magnesium, Gasglühlicht frei brennend, Drummond'sches Kalklicht, Zirkonlicht.

Wirksam war dagegen bis zu Entfernungen von 35 cm das elektrische Bogenlicht. Die Wirkung ging dabei augenscheinlich von der leuchtenden Luft aus, denn sie war jedesmal am intensivsten, wenn der Lichtbogen am vollsten entwickelt war und sie verschwand beim Zusammendrücken der Kohlen sowohl, wie beim Abbrechen des Bogens durch plötzliches Auseinanderziehen derselben. Ersetzen der positiven Kohle durch Zink verbesserte die Wirkung nicht deutlich; dagegen Aluminium als positive Elektrode war wirksamer als Kohle.

20. Eine wichtige Frage scheint es mir zu sein, ob die Sonne Strahlen zur Erde sendet, welchen die hier studirten Wirkungen zukommen. Als möglicher Ursprung solcher stark absorbirbarer Strahlen könnten nur die äusseren Schichten des Sonnenkörpers in Betracht kommen. Diese Schichten aber, die Chromosphäre und die Protuberanzen, scheinen ihrem Spectrum nach aus Gasen, hauptsächlich Wasserstoffgas, in demjenigen Zustande der Lichtemission zu bestehen, welchen wir durch elektrische Entladungen herzustellen gewohnt sind. Dieser Zustand hat sich nicht nur in unseren Versuchen als wirksam erwiesen, sondern es ist nach Hrn. Schumann's Untersuchungen elektrisch leuchtendes Wasserstoffgas sogar die reichste Quelle des kurzwelligen, in der Luft absorbirbaren Lichtes.

Unmittelbare Wirkungen solcher Sonnenstrahlung dürften am ehesten in den oberen Schichten der Erdatmosphäre zu suchen sein. Vielleicht ist in diesem Zusammenhange die Mit-

teilung von Beobachtungen erlaubt, welche ich im Herbst des Jahres 1889 in den Alpen gemacht hatte und deren mir damals sehr auffälliges Resultat ich jetzt weniger geneigt bin einer Täuschung durch die Mängel der nur improvisirten Hilfsmittel zuzuschreiben.

Ein Elektroskop mit Blättern aus unechtem Goldschaum trug als Knopf ein stets blankgeschmirgeltes kleines Stück Zinkblech. Es wurden im Freien, bei Sonnenschein von tiefblauem Himmel die Zeiten beobachtet, in welchen die Divergenz des positiv oder negativ geladenen Elektroskopes um einen bestimmten Teil zurückging. Die Erwartung war [1]), dass überhaupt nur negative Ladungen entweichen würden, ich fand aber, dass mit nahe der gleichen Geschwindigkeit auch positive Ladungen entwichen, während doch die Isolation des Elektroskopes, so oft sie im Inneren eines Hauses oder hohlen Baumes geprüft wurde, grosse Mängel nicht zeigte. Die Zeiten zur Abnahme der Divergenz von 90 auf 60 Winkelgrade waren z. B. für positive oder negative Ladung in Ober-Gurgel (1900 m üb. Meeressp., 28. Aug., 12^h m.) 10 sec, in Vent (1890 m üb. Meeressp., 31. Aug., 10^h a. m.) 10 sec, auf der Kreuzspitze (3500 m üb. Meeressp., 30. Aug., 2^h p. m.) 2 sec. Beschattete man die Platte des Elektroskopes, was meist durch die in einiger Entfernung vorgehaltene Hand geschah, so wurden die Entladungszeiten vergrössert, z. B. auf der Kreuzspitze von 2 auf 5 sec, und zwar wieder ohne Rücksicht auf das Zeichen der Ladung. Eine Beobachtung bei Sonnenuntergang schien mir besonders bemerkenswert (Sölden, Thalsohle der Oetzer Ache, 1400 m üb. Meeressp., 31. Aug., 5^h bis $6^h\,45^m$ p. m.) Es waren die schiefen Strahlen der schon den Bergkämmen sich nähernden Sonne von der Platte des Elektroskopes abgeblendet, sodass nur Licht vom tiefblauen Himmelsgewölbe sie traf. Ich erwartete, dass die deutlich vorhandene entladende Wirkung erst mit dem Verblassen dieses Lichtes abnehmen würde; die Wirkung verschwand aber ziemlich plötzlich zu der Zeit, in welcher die letzten Sonnenstrahlen die

---

1) Entsprechend der von den Herren Elster u. Geitel damals kurz vorher festgestellten Thatsache, dass auch Sonnenlicht die Hallwachs'sche lichtelektrische Wirkung ausübt.

Nähe der Thalsohle verliessen, während doch das Himmelslicht noch immer unverändert die Platte des Elektroskopes beleuchtete.

Auch Hrn. Linss' Studien über die Zerstreuung der Elektricität von geladenen Körpern in der freien Luft des Tieflandes könnten hier in Betracht kommen (vgl. 16.). Diese verhältnismässig sehr geringe Zerstreuung wurde mit Hülfe des Quadrantelektrometers verfolgt, sie wurde für positive und negative Elektricität gleich gross gefunden, war unabhängig von der Menge der sichtbar trübenden Bestandteile in der Luft, grösser bei heiterem als bei trübem Wetter und wuchs im allgemeinen im Laufe des Tages wie des Jahres mit zunehmender Sonnenhöhe. [1])

21. Ist die bezüglich der Sonne aufgeworfene Frage zu bejahen, so dürfte dies nach Kenntnis des Vorhergehenden nicht ohne Einfluss bleiben für das Verständnis der elektrischen Vorgänge in der Erdatmosphäre. Die Absicht der gegenwärtigen Arbeit ging jedoch nur soweit, die Belege mitzuteilen, welche ich dafür erhalten habe, dass ultraviolettes Licht von der angegebenen Brechbarkeit die eingangs genannte dreifach sich äussernde Wirkung auf Gase ausübt und zwar auf das Innere der Gase selbst, ohne notwendige Vermittelung eines festen oder flüssigen Körpers. Die letztere Eigentümlichkeit ist es, durch welche diese Wirkung scharf geschieden erscheint von der schon früher bekannten, mit den Namen Hertz und Hallwachs verknüpften lichtelektrischen Wirkung, welche an der Oberfläche fester oder flüssiger Körper ihren Sitz hat.

Kiel, im Januar 1900.

1) Linss, Met. Zeitschr. 1887. p. 352 u. Elektrotechn. Zeitschr. 11. 1890.

(Eingegangen 6. Februar 1900.)

Nachschrift (17. Februar 1900). — Nachdem das Vorstehende dem Drucke übergeben war, erhalte ich einen Abdruck aus der Decembernummer von „Terrestrial Magnetism and Atmospheric Electricity“, worin die Herren Elster und

Geitel höchst wertvolle Studien über das Leitvermögen der Erdatmosphäre bekannt geben. Es kann darnach nicht mehr gezweifelt werden, dass solches Leitvermögen regelmässig und aller Orten in der freien Luft besteht, und in erfreulicher Uebereinstimmung mit den oben mitgeteilten Beobachtungen wurde dasselbe besonders gross an hoch gelegenen Orten gefunden. Als Folgen des constatirten Leitvermögens und der Eigenschaften leitender Luft werden auch schon die elektrischen Begleiterscheinungen der atmosphärischen Niederschläge und die negative Eigenladung des Erdkörpers gezeigt. Die Frage nach dem Ursprung des unter Umständen nicht geringen Leitvermögens wird dabei offen gelassen.

---

8. *Ueber die Funkenpotentiale in festen und tropfbarflüssigen Dielektricis;* *von J. E. Almy.*

(Nach der Berliner Inaugural-Dissertation für die Annalen bearbeitet, ein Auszug in den Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 1. p. 95. 1899 veröffentlicht.)

---

§ 1. Ueber das Funkenpotential in festen und tropfbarflüssigen Dielektricis liegen bereits verschiedene Untersuchungen vor [1]), doch verhältnismässig wenige Angaben, welche sich auf wohl definirtes Material beziehen; bei tropfbarflüssigen Körpern insbesondere scheint man den sehr bedeutenden Einfluss fester Fremdkörper nicht hinlänglich gewürdigt zu haben. Diese Erwägungen haben die vorliegende Untersuchung zunächst veranlasst.

Dieselbe zerfällt in zwei Teile, von denen der eine feste, der andere tropfbarflüssige Dielektrika behandelt.

I. Teil.
Feste Dielektrika.

§ 2. Der Funkenapparat, Fig. 1, war folgendermaassen eingerichtet: Die eine Elektrode, entweder eine Stahlspitze oder eine Messingkugel von 2 cm Durchmesser wurde auf dem Ende einer Kupferstange festgeschraubt und mit einem Kitte aus Wachs und Kolophonium in einer Glasröhre von 2,2 cm Durchmesser festgekittet. Dabei wurde die Elektrode so angebracht, dass die Kugel bez. die Spitze von der Ebene des abgeschliffenen Röhrenendes gerade berührt wurde. Die Glasröhre wurde vertical aufgestellt und die gut isolirte Elektrode

---

1) Vgl. Masson, Ann. de Chim et de Phys. (3) **30.** p. 25. 1850; Mac Farlane, Phil. Mag. (5) **10.** p. 389. 1880; Mac Farlane u. Pierce, Phys. Review, **1.** p. 161 u. **2.** p. 99. 1894; Monti, Beibl. **18.** p. **249.** 1894; L'Elettricista **2.** p. 226. 1893; Steinmetz, Trans. Amer. Inst. Electr. Eng. **10.** p. 84. 1893; Gray, Phys. Review **7.** p. 199. 1898; Edmonson, Phys. Review **6.** p. 65. 1898.

mit dem geladenen Pol der Elektrisirmaschine in Verbindung gebracht.

Ein Tropfen dicken, gut isolirenden Öls wurde unter die zu prüfende Platte aus Glas oder aus anderem Material gebracht und diese dann fest gegen die Elektrode und das Ende der Röhre gedrückt, wodurch Glimmentladung oder eine andere Art der Entladung der geladenen Elektrode durch die Luft verhindert wurde. Darauf wurde ein metallischer Cylinder *B*

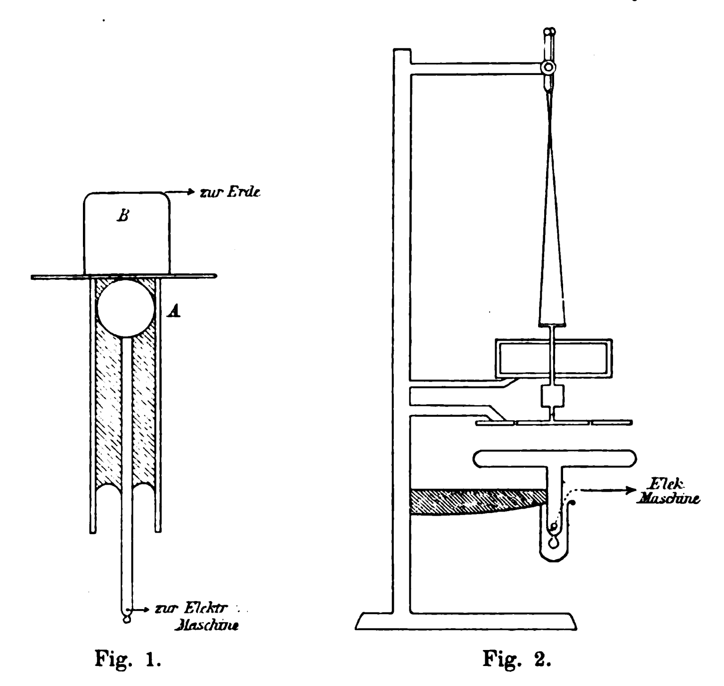


Fig. 1. Fig. 2.

mit ebenem, polirtem Ende als zweite Elektrode auf die Platte gesetzt; diese zweite Elektrode wurde zur Erde verbunden.

Eine durch einen kleinen Elektromotor betriebene Voss'sche Influenzmaschine lieferte die nötigen Potentialdifferenzen. Der Motor war mit einem Rheostaten versehen, sodass die Geschwindigkeit, mit der er lief, beliebig verändert werden konnte. Ein Pol der elektrischen Maschine wurde zur Erde abgeleitet, der andere wurde durch dicke Kupferdrähte mit einer Elektrode des Elektrometers und mit einer Elektrode des Funkenapparates verbunden. Eine mit der Erde in leitende

Verbindung gebrachte Stahlnadel konnte allmählich dem geladenen Pol der Influenzmaschine genähert oder von demselben entfernt, und dadurch das Potential des Pols langsam und stetig gesteigert werden. Es stellte sich dabei heraus, dass die Regulirung des Potentials am besten gelang, wenn der Pol der Maschine positiv geladen war; darum wurde, solange nicht die entgegengesetzte Polarität gebraucht wurde, immer diese Anordnung benutzt.

Elektrometer. [1])

§ 3. Das zur Anwendung gelangende Elektrometer, eine modificirte Form des Schutzringelektrometers, war von Hrn. Kaufmann construirt und mir zur Verfügung gestellt worden.

Die untere Scheibe, eine Messingplatte mit sorgfältig abgerundeten Kanten, deren Durchmesser 7 cm und deren Dicke 0,5 cm betrug, war auf einem isolirenden Ständer befestigt und diente als feste und geladene Scheibe des Instrumentes. Die bewegliche Platte, eine dünnere Messingscheibe von 4 cm im Durchmesser, hing bifilar in einem festen Schutzring 2,5 cm über der festen Platte. Ein dünner, ungefähr 5 cm langer Messingstab war an der beweglichen Platte befestigt senkrecht über ihrem Mittelpunkt und trug den Spiegel und den Dämpfer, an dessen oberem Ende die Drähte der bifilaren Aufhängung befestigt waren. Diese Drähte bestanden aus Platin; einer von ihnen wurde einer Torsion unterworfen, sodass die Scheibe in einer Stellung gehalten wurde, welche sich um 90° von derjenigen unterschied, die sie einnahm, wenn beide Fäden torsionslos waren. Infolge dessen ist, wenn die feste Platte des Instrumentes geladen wird und eine senkrecht nach unten gerichtete Anziehungskraft ausübt, die resultirende Bewegung der Platte eine Rotation. Die Grösse dieser Rotation wurde mit Hülfe von Fernrohr und Scala gemessen.

Die bewegliche Scheibe, der Schutzring und alle damit zusammenhängenden Teile des Apparates wurden zur Erde abgeleitet; die feste Platte war mit der geladenen Elektrode des Funkenapparates verbunden. Zur Dämpfung diente ein grosser Toepler'scher Luftdämpfer, mit welchem die Ab-

1) Vgl. Fig. 2.

lesungen schnell gemacht werden konnten. Diese Form des Apparates hat vor dem gewöhnlichen Schutzringelektrometer den Vorzug, direkte Ablesungen zu gestatten.

Das zu diesen Messungen benutzte Instrument war nicht genau genug construirt, um als absolutes Instrument dienen zu können, wie dies bei einem genau construirten und richtig justirten Instrument dieser Art möglich ist. Es wurde teils durch Vergleichung mit einer Luftfunkenstrecke nach den Angaben von Heydweiller[1]), teils durch Vergleichung mit der von Hrn. Orgler[2]) benutzten Potentialwaage geaicht. Die Aichung ergab, z. B.:

	Ablenkung, verursacht durch eine Potentialdifferenz von 104,3 elektrostatischen C.G.S.-Einheiten
Jan. 14	256 Scalenteile
„ 15	250 „
„ 17	255 „
„ 19	256 „
„ 20	255 „
„ 25	245 „

§ 4. Die Versuche der §§ 4—6 wurden mit Mikroskopdeckgläschen gemacht. Da jedoch beträchtliche Differenzen in Platten von nahezu derselben Dicke gefunden wurden, so wurde jede Reihe von Beobachtungen auf eine einzige Platte beschränkt, und es wurden unter zwei verschiedenen Bedingungen die beiden Prüfungen an Stellen vorgenommen, die einander so nahe wie möglich waren, um einen Mangel an Homogenität in der Platte zu vermeiden.

Zuerst wurde, mit einer Spitze und einer ebenen Platte als Elektroden, die Polarität der Elektroden verändert, um zu bestimmen, ob das Funkenpotential von der Polarität der Elektroden abhängt, wenn die Elektroden ungleich sind. Die hierunter mitgeteilten Versuchsergebnisse zeigen, dass eine ein wenig grössere Potentialdifferenz erforderlich ist, um eine Entladung durch eine gegebene Platte hervorzubringen, wenn die Spitze negativ, als wenn sie positiv geladen war; dass aber

1) A. Heydweiller, Wied. Ann. 48. p. 214. 1893.

2) A. Orgler, Ann. d. Phys. 1. p. 159. 1900. Ausführlich Berliner Dissertation.

der Betrag dieser Differenz klein, und für die verschiedenen geprüften Platten verschieden ist.

Tabelle I, 1.

Polarität der Spitzenelektrode	+	−	+	−	+	−
Funkenpotential in C.G.S.-Einh.	65,6	71,1	66,5	70	67	70,5
Dicke der Platte in cm	0,0655	0,0655	0,0654	0,0656	0,0656	0,0655
$\frac{\text{Funkenpotential}}{\text{Dicke}}$	1001	1080	1015	1070	1020	1070

Tabelle I, 2.

Polarität der Spitzenelektrode	+	−	+	−
Funkenpotential	86,4	87	85,6	86,4
Dicke der Platte	0,0725	0,0725	0,0725	0,0720
$\frac{\text{Funkenpotential}}{\text{Dicke der Platte}}$	1190	1200	1180	1200

Die bei allen geprüften Platten erhaltenen Differenzen waren Werte, welche zwischen den hier angegebenen, d. h. zwischen 2 und 6 Proc. lagen.

Sodann wurden mit einer Kugel von 2 cm Durchmesser und einer ebenen Platte als Elektroden ähnliche Beobachtungen angestellt; doch konnte kein merklicher Unterschied beobachtet werden, gleichviel ob die Kugel positiv oder negativ geladen war.

Tabelle II.

Polarität der Kugelelektrode	+	−	+	−	+	−
Funkenpotential	75	75,3	75,5	74,2	75,5	75,3
Dicke der Platte	0,067	0,067	0,067	0,067	0,0675	0,067
$\frac{\text{Funkenpotential}}{\text{Dicke der Platte}}$	1120	1124	1127	1109	1118	1124

§ 5. Das Funkenpotential ist grösser zwischen Kugel und Ebene, als zwischen Spitze und Ebene. Die Versuche stimmten nicht gut überein, ergaben aber in allen Fällen deutlich eine Differenz, nicht kleiner als etwa 5 Proc.

Tabelle III.

Elektroden	Spitze und Ebene				Kugel (Rad. = 1 cm) und Ebene			
Funkenpotential	66	65,7	68	68,5	69	71,7	72,6	74,2
Dicke der Patte (cm)	0,0655	0,0656	0,066	0,0665	0,0645	0,066	0,0665	0,0675
$\frac{\text{Funkenpotential}}{\text{Dicke der Platte}}$	1007	1001	1030	1030	1070	1080	1090	1120

§ 6. Um den Einfluss der Temperatur des Dielektricums zu bestimmen, wurde die Elektrode des Funkenapparates in geschmolzenem Schwefel eingebettet. Nachdem der Schwefel wieder hart geworden war, wurde der Apparat einer Temperatur von 100° C. ausgesetzt. Das Funkenpotential wurde für eine gegebene Glasplatte zuerst bei der Temperatur des Zimmers, 18° C., dann bei einer höheren Temperatur in der Nähe von 100° C. und schliesslich wieder bei der tieferen Temperatur bestimmt. Die Veränderungen mit der Temperatur waren nicht grösser als die Differenz zwischen aufeinander folgenden Beobachtungen bei constanter Temperatur.

§ 7. Das Funkenpotential ergiebt sich grösser, wenn ein constantes Potential langsam gesteigert, als wenn die Oscillationsweite eines oscillirenden Potentials allmählich erhöht wird. Dies geht aus folgendem Versuche hervor: Ein Luftfunkenmikrometer, welches Kugelelektroden von 2 cm Durchmesser hatte, wurde im Nebenschluss mit dem Funkenapparat verbunden, der Glas zwischen seinen Elektroden hatte. Das Entladungspotential für eine gegebene Platte wurde zuerst bestimmt, wenn der Nebenstromkreis vollständig ausser Betracht kam; demnächst wurden die Elektroden des Funkenmikrometers näher aneinander gebracht, sodass die Entladung ihren Weg eher durch die Luft nahm, als durch das Glas in dem anderen Stromkreis; wenn dann eine schnelle Folge von Funkenentladungen beständig statthatte, so wurden die Elektroden allmählich voneinander entfernt, bis die Entladung ihren Weg durch das feste Dielektricum in den anderen Zweigstromkreis nahm.

Nimmt man die Potentialdifferenz, welche der grössten Luftstrecke entspricht, die man erhält, ehe die Entladung ihren Weg durch das feste Dielektricum nimmt, als Entladungspotential für dieses, so erhält man, wenn das benutzte Potential oscillirt, einen kleineren Wert für das Funkenpotential, als wenn das benutzte Potential keinen Oscillationen unterworfen ist.

Die Beobachtungen wurden auf die verschiedenen, genügend bestimmten Arten von Jenenser Glas, die zur Hand waren, und auf Glimmer ausgedehnt. Die verschiedenen Glassorten, deren chemische Zusammensetzung in § 10 angegeben ist, sind hier durch eine Zahl bezeichnet. Die folgenden Reihen von Beobachtungen zeigen die Grösse der Aenderung in dem Funkenpotential für die verschiedenen Substanzen[1]):

Tabelle IV.

Dielektricum	Dicke der Platte in cm	Nicht oscillirendes Potential		Oscillirendes Potential		
		Funkenpotential in C.G.S.-Einh.	Funkenpotential / Dicke	Schlagweite in Luft bei 18° C. in cm	Entsprechende Potentialdifferenz / Funkenpotential	Funkenpotential / Dicke
Glas I	0,150	113,5	750	0,92	97,0	650
Glas IV	0,160	133,0	820	1,15	114,0	710
Glas V	0,076	128,0	1720	0,90	96,0	1260
Glas VI	0,041	111,8	2720	0,80	86,5	2110
Glas XI	0,041	138,0	3370	0,84	90,4	2200
Glimmer	0,0033	70,3	22000	0,17	24,4	7320
Glimmer	0,006	124,0	20600	0,255	32,5	5420

Es ist interessant, aus der Arbeit von Gray[2]), welcher Wechselstrom und Inductor anwandte, zu citiren, dass der Wert des Verhältnisses $\frac{\text{Funkenpotential}}{\text{Funkenlänge}}$, der für Glimmer — der einzigen Substanz, für welche Vergleichung möglich ist gefunden wurde, 6660 war, ein Wert von ungefähr derselben Grössenordnung, wie er hier mit oscillirendem Potential er-

1) Bei Paraffin wurde dieser Unterschied fast gar nicht bemerkbar.
2) T. Gray, Phys. Rev. 7. p. 65. 1898.

halten wurde, der ausserdem viel kleiner als der ist, welcher mit constantem, langsam gesteigertem Potential erhalten wird.

Würde auch die Luft das beschriebene Verhalten zeigen, so würden die für den Fall oscillirenden Potentiales angegebenen Werte des Funkenpotentiales zu klein sein, der gezogene Schluss aber jedenfalls richtig bleiben. Das Funkenpotential für constantes Potential ist also von den Funkenpotential für oscillirendes Potential, bei festen Dielektricis, wohl zu unterscheiden.

§ 8. Die Untersuchung verschiedener Substanzen (§§ 8 bis 10) wurde auf den Fall constanten Potentials beschränkt. Zu Elektroden wurden Kugel (Radius 1 cm) und Ebene genommen, da die Aenderungen, die durch Wechsel der Polarität entstehen, hier zu vernachlässigen sind. Zunächst wurden Platten sehr verschiedener Dicke aus Jenenser Glas I („709“) untersucht, dessen Zusammensetzung in § 9 angegeben ist. Dieses Glas hat den Brechungsexponenten 1,5632, sein Elasticitätsmodul ist $6,76 . 10^{11}$ C.G.S., sein specifischer Widerstand bei 220° C. ist $1,74 . 10^{10}$ Ohm.

Die benutzten Platten, welche, wie es schien, aus einem Stück geschnitten waren, wurden bis zu den verschiedenen verlangten Dicken abgeschliffen. Es wurden nachträglich auch kleine Teile der dickeren Platten bis zur Dicke der dünnsten abgeschliffen und untersucht; die so erhaltenen Resultate stimmen mit denen der anderen Platten überein. Die grösste erreichbare Genauigkeit, d. h. der Grad der Uebereinstimmung zwischen verschiedenen Beobachtungen an derselben Platte, übersteigt im allgemeinen nicht ca. 5 Proc. Alle Messungen sind in elektrostatischen C.G.S.-Einheiten angegeben (vgl. Tab. V).

Die Beobachtungen sind zum Teil Mittelwerte aus Beobachtungen an verschiedenen Platten gleicher Dicke.

Der Quotient $\frac{\text{Funkenpotential}}{\text{Dicke}}$ nimmt mit wachsender Dicke ab; die Beziehung zwischen Funkenpotential (V) und Plattendicke oder Schlagweite (d) lässt sich für die benutzten kleinen, im Verhältnis von 1:5 variirten Schlagweiten darstellen durch die empirische Formel $V = \alpha d + \beta$, wo $\alpha = 420$, $\beta = 41,5$.

Die vierte Columne enthält die nach dieser Formel berechneten Werte des Funkenpotentials.

Die Columnen 6 und 7 der Tabelle, welche aus Bestimmungen

Tabelle V.

Glas I. („709“) $\begin{cases} \alpha = 420 \\ \beta = 41{,}5. \end{cases}$

Dicke der Platte	Funken-potential beob.	$\frac{\text{Funken-potential}}{\text{Dicke}}$	Funken-potential berechnet	Differenz in Procenten	Funkenpotential für diese Schlag-weite in Luft (Paschen)	$\frac{\text{Funken-potential in Glas}}{\text{Funken-potential in Luft}}$	Luft-Schlagweite, welche dem Potential von Col. 2 entspricht	$\frac{\text{Schlagweite in Luft}}{\text{Schlagweite in Glas}}$
0,041	58,6	1430	58,7	−0,2	8,21	7,14	0,505	12,3
0,055	67,0	1220	64,6	3,6	10,20	6,56	0,591	10,7
0,061	71,1	1160	67,9	5,0	10,91	6,52	0,64	10,4
0,100	77,0	770	83,5	−7,6	15,86	4,90	0,695	6,95
0,110	87,5	795	87,7	−0,2	16,76	5,22	0,80	7,29
0,125	94,5	752	94,0	0	18,80	5,00	0,88	7,04
0,138	100,0	724	99,6	0,4	20,32	4,92	0,966	7,00
0,142	104,0	730	101,1	2,8	20,72	5,02	1,00	7,27
0,150	113,5	750	104,5	9,0	21,92	5,18	1,13	7,50
0,160	114,5	710	109,7	4,7	23,10	4,95	1,15	7,17
0,175	120,1	690	115,0	4,0	24,80	4,84	1,24	7,05
0,216	132,0	612	132,2	−0,1	29,30	4,50	1,47	6.80
0,220	133,0	605	133,9	−0,7	29,75	4,47	1,48	6,70
0,228	135,0	596	137,3	−1,7	30,60	4,41	1,55	6,80

von Paschen[1]) berechnet sind, sind beigegeben zur Vergleichung des Funkenpotentials von Luft und Glas bei gleichen Funkenlängen; die Columnen 8 und 9 dagegen dienen zur Vergleichung der Funkenlängen in beiden Medien für gegebene Potentialdifferenzen.

§ 9. Nunmehr wurde das Funkenpotential verschiedener Glassorten bestimmt. Von fünf verschiedenen Jenenser Gläsern wurden Proben von Hrn. Schott und Genossen freundlichst geliefert; es waren dies Glassorten, deren Zusammensetzung hinlänglich bekannt ist und von deren physikalischen Eigenschaften viele bestimmt sind.

Die Zusammensetzung dieser Gläser war folgende:

Glas	Procentgehalt									
	As_2O_3	BaO	B_2O_3	CaO	K_2O	Mn_2O_3	Na_2O	PbO	SiO_2	ZnO
I („709“)	0,4	—	—	—	—	0,06	17,0	—	70,54	12,0
IV („1722“)	0,4	5	—	—	—	0,06	17,0	2,6	69,54	5,3
V („512“)	0,3	—	2,5	—	15	0,04	5,0	—	70,37	13,5
VI (1675)	0,3	—	2,6	4,5	16	0,08	6,0	2,9	67,62	—
XI (1766)	0,2	3	—	—	8	0,10	4,5	36,0	48,2	—

Das Funkenpotential einiger dieser Glassorten war so gross, dass nur dünne Platten gebraucht werden konnten.

Tabelle VI.

Glas	Dicke der Platte in cm	Funkenpotential in C.G.S.-Einh.	Funkenpotential / Dicke der Platte
I („709“)	0,041	58,6	1430
	0,142	104,3	735
	0,228	135,0	596
IV („1722“)	0,149	118,6	800
	0,160	133,0	830
V („512“)	0,076	127,5	1710
VI („1675“)	0,041	109,8	2680
XI („1766“)	0,041	137,0	3350

Die folgende Tab. VII enthält den specifischen Ohm'schen Widerstand einiger dieser Glassorten nach Denizot[2]), ihren

1) F. Paschen, Wied. Ann. 37. p. 79. 1889.
2) A. Denizot, Inaug.-Diss., Berlin 1897.

Brechungsexponenten für Licht und ihre Leitfähigkeit für Wärme nach Focke[1]), ihren Elasticitätsmodul nach Winkelmann und Schott[2]); endlich den Quotient, $\frac{\text{Funkenpotential}}{\text{Dicke}}$ einer 0,041 cm dicken Platte.

Tabelle VII.

Glas	Brechungsexponent	Elasticitätsmodul in cm, g	Wärmeleitungsvermögen in C.G.S.-E.	Specifischer Widerstand bei 220° C. in Ohms	Funkenpot. / Schlagweite für eine Schlagweite von 0,041 cm
I	1,5132	$6,76 \cdot 10^{11}$	$2,46 \cdot 10^{-3}$	$1,74 \cdot 10^{10}$	1430
VI	1,5174*	$7,19 \cdot 10^{11}$*	$3,39 \cdot 10^{-3}$*	$2,41 \cdot 10^{13}$	2680
XI	1,5708*	$6,64 \cdot 10^{11}$*	$2,41 \cdot 10^{-3}$*	$3,7 \cdot 10^{14}$	3350

* Diese Werte gehören einigen Glasarten, die nicht ganz genau mit VI und XI identisch sind, aber sehr nahezu ihrer Zusammensetzung nach.

Man erhält also dieselbe Reihenfolge der Glassorten, mag man sie nach dem Ohm'schen Widerstand oder nach der elektrischen Festigkeit ordnen; doch wächst die elektrische Festigkeit verhältnismässig langsam mit zunehmendem Ohm'schen Widerstand.

§ 10. Unter den festen Dielektricis wurden noch Glimmer, Quarz, Paraffin und Ebonit untersucht.

Glimmer.

Das Vorhandensein von Luftzwischenräumen zwischen den verschiedenen Schichten einer Platte ruft einen beträchtlichen Unterschied in dem Funkenpotential hervor, biegt man die Platte so, dass die verschiedenen Schichten voneinander getrennt werden, so verkleinert man das Funkenpotential. Die folgende Beobachtungsreihe ist an Platten gemacht worden, die soweit wie möglich von Unvollkommenheiten frei waren. Die dritte Columne ist nach der Formel

$$V = \alpha d + \beta \text{ mit } \begin{cases} \alpha = 18800 \\ \beta = 10 \end{cases}$$

berechnet.

1) Th. M. Focke, Wied. Ann. **67.** p. 133. 1899.

2) A. Winkelmann u. O. Schott, Wied. Ann. **61.** p. 103. 1897; **51.** p. 697. 1894.

Tabelle VIII.

Glimmer $\begin{cases} \alpha = 18800 \\ \beta = 10. \end{cases}$

Dicke der Platte in cm	Funkenpotential in C.G.S.-Einheiten		Differenz in Procenten	Quotient, $\frac{\text{Funkenpot.}}{\text{Dicke}}$
	beob.	ber.		
0,0031	68,8	68,28	0,7	22 300 C.G.S.
0,0032	70,3	70,16	0,2	22 000 „
0,0035	77,5	75,96	2,0	22 100 „
0,0036	78,3	77,68	1,7	21 700 „
0,0060	122,3	122,8	−0,4	20 370 „

Quarz.

Es wurden parallel und senkrecht zur optischen Axe geschnittene Platten untersucht, wobei sich zeigte, dass das Funkenpotential im ersten Falle, also wenn die Entladung in der zur optischen Axe senkrechten Richtung stattfindet, grösser ist. In derselben Richtung ist, nach Warburg und Tegetmeier[1]), der Ohm'sche Widerstand des Quarzes am grössten.

Tabelle IX.

Quarz.

Quarzplatte, geschnitten	Dicke der Platte in cm	Funkenpotential in C.G.S.-Einh.	$\frac{\text{Funkenpotential}}{\text{Dicke der Platte}}$
senkrecht zur optischen Axe	0,020	76,4	3370
parallel zur optischen Axe	0,020	102,6	5130

Paraffin.

Die Herstellung dünner Paraffinplatten, die frei von Poren und anderen Unvollkommenheiten waren, ist mir nicht gelungen. Ich setze die folgenden Beobachtungen nur zur Vergleichung mit den Monti'schen hierher und berechne nur diese, denen ich den Vorzug vor den meinigen gebe, nach der Formel $V = \alpha d + \beta$. Die folgenden Messungen beziehen sich auf die

1) E. Warburg u. F. Tegetmeier, Wied. Ann. **32.** p. 447. 1887; auch **35.** p. 455. 1888.

besten Platten, welche ich erhielt und stimmen ziemlich gut mit den Ergebnissen von Monti, der sein Paraffin im luftleeren Raum schmolz, um Luftblasen zu vermeiden.

Tabelle X.

Paraffin $\begin{cases} \alpha = 3560 \\ \beta = 17{,}2. \end{cases}$

Schlagweite in cm	Nach Monti: Funkenpotential in C.G.S.-Einh. beob.*	ber.	Diff. in Proc.	F.-Pot. / Schlagw.	Meine Beobachtungen: Dicke d. Platte	Funkenpot. / Dicke d. Platte in C.G.S.-Einh.
0,0156	72,7	72,7	0	4660	0,015	4200
0,0219	95,8	95,1	0,7	4380	0,023	4290
0,0259	108,0	111,4	− 3,1	4170	0,030	4290
0,0281	118,3	117,2	0,9	4200	0,0335	4240
0,0359	145,0	145,0	0	4040	—	—

* Mit Kugelelektroden von 0,8 cm Durchmesser.

Ebonit.

Die Platten, welche mir zur Verfügung standen, konnten nicht bis auf Dicken kleiner als 0,015 cm abgeschliffen werden, ohne dass kleine Poren auftraten. Eine 0,015 cm dicke Platte wurde jedoch von der grössten messbaren Potentialdifferenz — ca. 140 C.G.S.-Einh. — nicht durchschlagen, sodass Bestimmungen des Funkenpotentiales nicht vorgenommen werden konnten.

II. Teil.

Flüssige Dielektrica.

§ 11. Die Hauptschwierigkeit bei der Bestimmung des Funkenpotentiales in einem tropfbar flüssigen Dielektricum — eine Schwierigkeit, welche, soweit aus den veröffentlichten Arbeiten geschlossen werden darf, bisher noch nicht überwunden ist — liegt in der Reinigung der Flüssigkeit von kleinen, festen Bestandteilen, wie vom atmosphärischen Staub oder sonstigen Fremdkörpern, die sich stets in einer Flüssigkeit finden. Derartige feste Teilchen werden sofort dorthin gezogen, wo die elektrische Kraft am grössten ist, d. h. gerade zwischen die Elektroden, und daher erleichtern sie, entweder

weil sie infolge ihrer Eigenschaft als gute Leiter wie Elektroden wirken, oder weil die Funkenentladung längs der Berührungsfläche beider Dielektrica eher einzutreten scheint[1], die Entladung, sodass die Funkenentladung bei einer viel niedrigeren Potentialdifferenz stattfindet, als dies der Fall sein würde, wenn die festen Teilchen entfernt wären. Auch entstehen durch die Funkenentladung neue feste Teilchen, wahrscheinlich aus Kohlenstoff, da die benutzten Dielektrica gewöhnlich Kohlenwasserstoffe sind.

Ein flaschenförmiges Gefäss (vgl. Fig. 3) hatte einen weiten Hals, der eine poröse Zelle gerade aufnehmen konnte; der Hals des Gefässes verengte sich gerade über dessen Bauch, sodass die poröse Zelle nicht in den Bauch hinabsinken konnte; ein Gummiring um den oberen Rand der Zelle verschloss den Zwischenraum zwischen Zelle und Flasche. Der Bauch der Flasche war mit mehreren Oeffnungen versehen; zwei an entgegengesetzten Seiten waren durch Stopfen verschlossen, welche die Elektroden hielten; eine dritte am oberen Ende stellte eine Verbindung mit einer Luftpumpe her, mittels welcher der Apparat teilweise luftleer gemacht und das Filtriren beschleunigt werden konnte. Die Elektroden, Messingkugeln von 2 cm Durchmesser, wurden auf die Enden von dicken Messingstangen geschraubt, und diese gingen durch die Gefässöffnungen, durch die Glasstopfen des Apparates, in die sie auch eingekittet waren. Eine auch durch einen Stopfen verschliessbare Oeffnung den Elektroden gegenüber erlaubt eine genaue Messung der Entfernung beider Elektroden mittels des Ophtalmometers. Schliesslich diente eine Röhre, welche von dem Boden der Flasche ausging und durch einen Hahn verschliessbar war, zur Leerung des Apparates. Alle Oeffnungen waren luftdicht

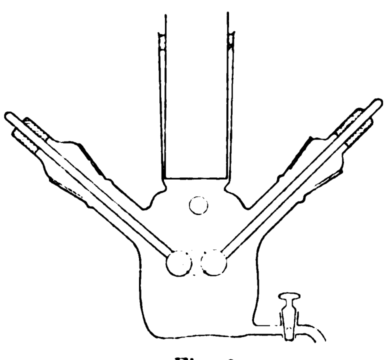


Fig. 3.

1) E. D. Pierce, Phys. Rev. 2. p. 99. 1894.

verschliessbar. Wenn Luft in den Apparat gelassen wurde, um die Flüssigkeit herauszutreiben, um den Apparat zu spülen etc., so musste sie erst durch feine Gaze und durch eine Reihe von Wasser- und Schwefelsäureflaschen streichen, um frei von Staub und trocken zu werden.

Es stellt sich heraus, dass ein einziger Funke bereits feste Teilchen bildete, sodass nochmaliges Filtriren der Flüssigkeit und nochmaliges Ausspülen des Apparates nach jeder Beobachtung nötig wurde. Späterhin erwies sich, selbst nach vollständigem Ausspülen, das Funkenpotential kleiner als vor dem ersten Funken.

Eine Untersuchung der Elektroden ergab, dass sich infolge der Entladung ein oder mehrere kleine, hervorstehende Punkte gebildet hatten. Erst nachdem die Elektroden wieder polirt worden waren, war das Funkenpotential wieder so hoch wie für die erste Entladung.

Folgende Beobachtungen, welche sich auf Xylol und eine Funkenlänge von 0,04 cm beziehen, zeigen wie sehr das Funkenpotential durch die Reinigung der Flüssigkeit und auch der Elektrode erhöht wird.

Bedingungen:	Funkenpotential:
1. Gewöhnliches reines Xylol in offenem Gefäss	10—20 C.G.S.-Einheiten
2. Durch Seide filtrirt, in offenem Gefäss	25—40 „ „
3. Durch Thonzelle filtrirt, in geschlossenem Gefäss nach einem Funken	55—65 „ „
4. Desgleichen, ehe ein Funke überging, Elektrode nicht frisch polirt	80—85 „ „
5. Desgleichen, ehe ein Funke überging, Elektrode frisch polirt	93 „ „

Die Werte des Funkenpotentiales, die von früheren Experimentatoren [1]) erhalten wurden, sind von derselben Grössenordnung wie die, welche unter den obigen Bedingungen 1. und 2. erhalten wurden; zum Beispiel sind die für eine Funkenlänge von 0,06 cm angegebenen Werte folgende:

1) Vgl. MacFarlane, Gray, Pierce, Edmonson, l. c.

	Edmonson	Mac Farlane
für Xylol	14 C.G.S.-Einh.	—
„ Terpentinöl	23 „ „	18 C.G.S.-Einh.
„ Petroleum	—	10 „ „

Daraus darf man wohl schliessen, dass diese Bestimmungen durch die Gegenwart fester Teilchen in hohem Maasse beeinflusst waren. Nach dem Vorstehenden ist es notwendig, zwischen aufeinander folgenden Beobachtungen den Apparat auseinander zu nehmen, die Elektroden wieder zu poliren, die Entfernung der Elektroden zu messen und schliesslich den Apparat sorgfältig mit filtrirter Flüssigkeit auszuwaschen.

§ 12. In der dem beschriebenen Reinigungsprocesse unterworfenen Flüssigkeit konnten mit blossem Auge oder mit einer Lupe keine festen Teilchen gesehen werden. Lichtstrahlen, durch die Flüssigkeit geschickt, erleuchteten dieselbe zwar noch, aber in sehr viel geringerem Maasse als Flüssigkeit, welche durch Filtrirpapier oder durch Destillation gereinigt war, und nicht mehr zwischen den geladenen Elektroden als an anderen Stellen. Das senkrecht zur Strahlenrichtung ausgesandte Licht war vollständig geradlinig polarisirt, was gegen die Gegenwart gröberer Teilchen spricht, endlich hat dieses Licht einen bläulichen Ton, was auf Reflexion an Teilchen deutet, die klein sind gegen die Wellenlänge des Lichtes, sei es an fremden Teilchen, sei es an Flüssigkeitsmolecülen.

Diese optische Prüfung, welche nur an dem nicht fluorescirenden Benzol vorgenommen werden konnte, spricht dafür, dass Störung durch feste Fremdkörper vermieden ist.

Beobachtungen.

§ 13. Die Elektroden hatten 1 cm Radius. Verschiedene Beobachtungen bei gleicher Schlagweite stimmten bis auf etwa 3 Proc. überein. Auch bei den untersuchten tropfbaren Flüssigkeiten liessen sich die Ergebnisse durch die Formel $V = \alpha d + \beta$ darstellen.

Terpentinöl.

Käufliches Terpentinöl wurde in einem Glasapparat destillirt und dann, wie beschrieben, im Funkenapparat verwandt.

Tabelle XI.

Terpentinöl $\begin{cases} \alpha = 1410 \\ \beta = 20. \end{cases}$

Schlagweite in cm	Funkenpot., C.G.S.-Einh. beobachtet	Funkenpot., C.G.S.-Einh. berechnet	Differenz in Procenten	$\frac{\text{Funkenpotential}}{\text{Schlagweite}}$
0,0184	46,0	45,94	0,1	2500
0,0354	69,0	70,19	− 1,7	1950
0,046	86,9	84,9	2,0	1890
0,065	111,7	111,7	0	1720
0,067	119,0	114,6	4,0	1770
0,086	135,7	140,7	− 3,6	1570

Petroleum.

Es wurde käufliches Petroleum verwandt; Destilliren desselben veränderte das Funkenpotential nicht.

Tabelle XII.

Petroleum $\begin{cases} \alpha = 1920 \\ \beta = 20,16. \end{cases}$

Schlagweite in cm	Funkenpot., C.G.S.-Einh. beobachtet	Funkenpot., C.G.S.-Einh. berechnet	Differenz in Procenten	$\frac{\text{Funkenpotential}}{\text{Schlagweite}}$
0,016	46,0	51,1	− 10,0	2870
0,026	72,0	70,1	2,7	2770
0,028	74,5	73,9	0,8	2660
0,0341	86,5	85,7	1,0	2530
0,046	105,7	108,4	− 2,6	2300
0,052	121,0	120,0	0,9	2320
0,053	118,5	121,9	− 2,8	2270

Xylol.

Es wurde chemisch reines Xylol benutzt, und dieses von mir frisch überdestillirt.

Tabelle XIII.

Xylol $\begin{cases} \alpha = 1340 \\ \beta = 40. \end{cases}$

Schlagweite in cm	Funkenpot., C.G.S-Einh. beobachtet	Funkenpot., C.G.S-Einh. berechnet	Differenz in Procenten	$\frac{\text{Funkenpotential}}{\text{Schlagweite}}$
0,024	72,0	72,1	−0,1	3000
0,032	83,2	82,9	0,4	2600
0,044	97,0	98,9	−2,0	2200
0,054	110,0	112,3	−2,0	2040
0,0595	118,0	119,7	−1,0	1990
0,0635	125,0	125,4	0,1	1985
0,064	125,6	125,8	−0,1	1990
0,067	131,5	129,8	−1,3	1950

Tabelle XIV.

Benzol.

Schlagweite in cm	Funkenpotential, C.G.S.-Einh.	$\frac{\text{Funkenpotential}}{\text{Schlagweite}}$
0,045	98,5	2180
0,054	114,0	2130

An dieser Flüssigkeit wurde festgestellt, dass die Potentialdifferenz, welche erforderlich war, damit ein zweiter Funke in dem noch ungereinigten Apparat überging, nur ungefähr ein Zehntel der Potentialdifferenz des ersten Funkens betrug.

§ 14. Die Resultate des § 9 veranlassten mich, das Funkenpotential einer 5proc. Lösung von Anilin in Xylol zu prüfen, welche ein erheblich grösseres Ohm'sches Leitungsvermögen als das reine Xylol besitzt.

Schlagweite in cm	Funkenpotential, C.G.S.-Einh.	$\frac{\text{Funkenpotential}}{\text{Schlagweite}}$	Werte d. Quotients für reines Xylol
0,044	96,0	2180	2200
0,0455	97,0	2085	2090

Der Anilinzusatz hat also das Funkenpotential kaum verändert; dabei zeigte sich die vergrösserte Ohm'sche Leitung durch die sehr starke Strömung zwischen den Elektroden, und dadurch, dass das Funkenpotential nur mit Mühe erreichbar war.

Es ist dabei indessen zu beachten, dass die besser leitende Flüssigkeit von der Stelle vertrieben wird, wo die elektrische Intensität am grössten ist und wo daher Funkenentladung stattfindet, wie dies nachweislich unter anderen Bedingungen der Fall ist [1]), und dass infolge dessen die Flüssigkeit, für welche das Entladungspotential wirklich bestimmt wurde, auch in diesem Falle ganz oder sehr nahezu reines Xylol sein kann.

§ 15. Bei der Untersuchung an festen Dielektricis haben wir gesehen (§ 5), dass das Entladungspotential für eine gegebene Dicke verschieden ist, wenn verschieden gestaltete Elektroden angewandt werden. Baille [2]) und Paschen [3]) haben gezeigt, dass sich die Funkenpotentiale in Luft bei Anwendung von Kugelelektroden beträchtlich mit der Grösse der Elektroden ändern, und zwar, dass bei kleinen Schlagweiten das Entladungspotential mit abnehmendem Kugelradius wächst. Etwas Aehnliches findet auch bei tropfbar flüssigen Dielektricis statt, wie die folgenden Beobachtungen zeigen:

Tabelle XV.

Xylol.

Schlagweite in cm	Mit Kugelelektroden, Radius 0,1 cm		Mit Kugelelektroden, Radius 1 cm	
	Funkenpot. in C.G.S.-Einh.	Potential / Schlagweite	Funkenpot. in C.G.S.-Einh.	Potential / Schlagweite
0,0132	58,6	4440	—	—
0,0245	82,0	3345	13,5	3000
0,030	96,0	3170	79,0	2630
0,034	107,0	3140	85,0	2600
0,042	122,0	2900	97,0	2310
0,050	135,0	2700	106,0	2120

§ 16. Maxwell [4]) hat die elektrische Festigkeit eines Dielektricums definirt als „den Wert der elektrischen Intensität, welche in einem Dielektricum bestehen kann, ohne dass Funkenentladung stattfindet“. Eine Betrachtung der hier be-

1) E. Warburg, Wied. Ann. **54**. p. 306. 1895.

2) J. B. Baille, Ann. de Chim. et de Phys. (5) **25**. p. 531. 1882.

3) E. Paschen, Wied. Ann. **37**. p. 79. 1889.

4) J. C. Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism **1**. § 51. 1873.

stimmten Werte des Funkenpotentiales zeigt, dass die so definirte elektrische Festigkeit keineswegs eine Constante für die untersuchten festen oder flüssigen Dielektrica ist.

Bei allen mit Kugeln von 2 cm Durchmesser gemachten Beobachtungen ist der Abstand der Elektroden in allen Fällen so klein im Verhältnis zur Grösse der Elektroden dass der Quotient $\frac{\text{Potential}}{\text{Funkenlänge}}$ der elektrischen Intensität nahezu gleich ist. Doch wächst dieser Quotient bei den verschiedenen untersuchten festen und tropfbarflüssigen Körpern mehr oder weniger mit abnehmender Schlagweite.

Für die mit Xylol gemachten Versuche habe ich auch die grössten Werte der elektrischen Intensität (Feldstärke) zwischen den Kugeln nach den von Schuster[1]) gegebenen Formeln berechnet, welche auf die Kirchhoff'sche Lösung des Problems der Verteilung der Elektricität auf zwei Kugeln sich gründen.

Für die Berechnung auf meine Dissertation verweisend, gebe ich hier die Resultate:

Tabelle XVI.

Xylol.

Schlagweite in cm	Funkenpotential		Elektrische Intensität	
	mit Elektroden von Radius 1 cm in C.G.S.-Einh.	mit Elektroden deren Radius = 0,1 cm in C.G.S.-Einh.	mit Elektroden, deren Radius = 1 cm in C.G.S.-Einh.	mit Elektroden, deren Radius = 0,1 cm in C.G.S.-Einh.
0,024	72,0	80,5	3020	3610
0,032	83,2	103,0	2626	3470
0,044	97,0	126,0	2230	3340
0,050	106,0	135,0	2075	3240
0,0635	125,0	—	2020	—
0,067	131,5	—	2005	—

Die an anderen Flüssigkeiten gemachten Berechnungen ergeben ähnliche Resultate; in allen Fällen nimmt die elektrische Festigkeit mit wachsender Schlagweite ab, was seinen Ausdruck in der empirischen Formel $V = \alpha\, d + \beta$ findet. Diese Aenderungen der elektrischen Festigkeit oder besser der grössten elektrischen Intensität sind in Fig. 4 graphisch dargestellt.

1) A. Schuster, Phil. Mag. (5) 29. p. 182. 1890.

§ 17. In der Tab. XVII stelle ich die für α und β gefundenen Werte zusammen; Tab. XVIII enthält für die verschiedenen untersuchten Substanzen die elektrische Festigkeit

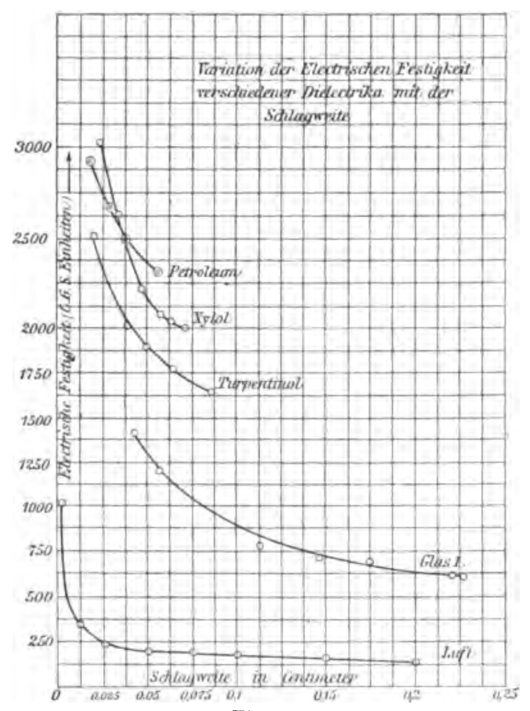


Fig. 4.

für die gegebenen Dicken und das Funkenpotential für dieselbe Dicke, zusammen mit dem geschätzten Funkenpotential für eine Dicke von 0,1 cm.

Tabelle XVII.
Constante.

Substanz	α	β
Glas I („709")	420	41,50
Glimmer	18800	10,0
Paraffin (nach Monti)	3560	17,2
Terpentinöl	1410	20,0
Petroleum	1920	20,16
Xylol	1340	40,0
Benzol	1750	21,1

Tabelle XVIII.

Zusammenstellung.

Substanz		Schlagweite in cm	Entladungspotential in C.G.S.-Einh.	Elektrische Festigkeit (C.G.S.)	Funkenpot. für Schlagweite von 0,1 cm in C.G.S.-Einh.
Glas I	{	0,041	58,6	1440	} 83,5
		0,220	133,0	645	
Glas IV		0,149	118,0	800	—
Glas V		0,076	127,0	1710	—
Glas VI		0,041	110,0	2710	—
Glas XI		0,041	138,0	3410	—
Glimmer	{	0,0032	70,3	22000	} 1890
		0,006	124,0	20600	
Quarz: Schnitt					
⊥ zur opt. Axe		0,02	77,5	3870	—
‖ „ „ „		0,02	101,0	5050	—
Paraffin	{	0,0156	72,7	4660	} 375
		0,0359	145,0	4030	
Ebonit		0,015	>140	>9000	—
Terpentinöl	{	0,0184	46,0	2520	} 161
		0,066	112,0	1730	
Petroleum	{	0,026	72,0	2800	} 212
		0,052	121,0	2370	
Xylol	{	0,024	72,0	3020	} 174
		0,0675	181,5	2005	
Benzol	{	0,045	98,5	2225	} 194(?)
		0,054	114,8	2170	

Ich möchte zum Schluss Hrn. Prof. Dr. E. Warburg für seine Anregung zu der vorliegenden Arbeit und vielfache Unterstützung bei der Durchführung meinen wärmsten Dank ausdrücken.

(Eingegangen 5. Februar 1900.)

---

9. *Ueber die Quincke'schen Rotationen im elektrischen Feld; von L. Graetz.*

1. Die von Hrn. Quincke zuerst beobachteten und ausführlich dargelegten Rotationen von Körpern im constanten elektrostatischen Felde[1]) haben das überraschende, das sie zuerst boten, durch die darauf folgenden Erklärungen der Herren Heydweiller[2]), Boltzmann[3]) und v. Schweidler[4]) einigermaassen verloren. Nach diesen Erklärungen beruhen diese fortdauernden Rotationen auf der Abstossung der auf die Oberfläche der Körper durch Leitung eingeführten und der auf den benachbarten Elektroden vorhandenen Elektricität. Die einmal eingeleitete Bewegung muss, wenn die Ladungen des rotirenden Körpers periodisch neutralisirt werden, darnach fortdauern, sie wird unterhalten durch die Energie der Stromquelle, welche die Elektroden des Feldes trotz des Leitungsverlustes geladen erhält. Das bekannteste Analogon zu diesen Quincke'schen Rotationen ist darnach der Versuch, bei welchem die Scheibe einer Influenzmaschine, deren Polen man von aussen, etwa durch eine gedrehte Influenzmaschine, Elektricität zuführt, dauernd rotirt (Kraftübertragung durch Influenzmaschinen). Die fortgesetzte Drehung der Scheibe beruht auch auf der Abstossung der auf der Scheibe liegenden und von ihr mitgeführten Elektricität durch die auf den Elektroden vorhandene und der Ausgleich der Ladungen, sowie die Zufuhr von Energie geschieht bei diesem Versuch in ganz analoger Weise, wie bei den Quincke'schen Rotationen.

1) G. Quincke, Wied. Ann. **59.** p. 417. 1896.

2) A. Heydweiller, Verhandl. d. Physikal. Gesellsch. zu Berlin **16.** p. 32. 1896.

3) L. Boltzmann, Wied. Ann. **60.** p. 399. 1897.

4) E. v. Schweidler, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **106.** Abt. IIa. p. 1. 1897.



Nach der von v. Schweidler gegebenen Theorie lässt sich das Drehungsmoment, welches auf eine Kugel in einem Felde von bekannter Stärke wirkt, angeben. Die vollständige Behandlung aber der von Hrn. Quincke und von Hrn. Heydweiller[1]) angestellten Beobachtungen führt auf eine Differentialgleichung, deren Lösungen kaum zu ermitteln sind. Bei der Versuchsanordnung der genannten Forscher machen nämlich die isolirenden Körper, die sich in dem dielektrischen, etwas leitenden Medium befinden, nicht fortdauernd Rotationen nach derselben Richtung, sondern Oscillationen, da sie an einem Faden aufgehängt sind und durch die Torsion des Fadens nach bestimmten Zeiten die Bewegung wieder umgekehrt wird.

2. Weit einfachere Verhältnisse, sowohl für das Experiment, wie für die Theorie, erzielt man, wenn man versucht, die Körper nicht an Faden aufzuhängen, sondern um feste Axen sich drehen zu lassen.

Dann muss nämlich der Körper nach einiger Zeit constante Rotationsgeschwindigkeit annehmen, wenn das Drehungsmoment der reibenden Kräfte dem elektrischen Drehungsmoment gleich geworden ist. Da man das erstere für jeden Versuch ohne Schwierigkeit bestimmen kann, so hat man zunächst dadurch ein Mittel, die Theorie zu prüfen und weiter die Leitung der einzelnen Medien zu bestimmen. Um die Experimente in dieser Weise zu vereinfachen, wurde zunächst versucht, die Körper um eine feste Axe sich drehen zu lassen, wobei diese Axe in zwei Punkten, oben und unten, gelagert wurde. Indess zeigte sich hierbei die Reibung im allgemeinen zu gross. Wohl aber gelang es leicht, die Körper sich auf einer Spitze drehen zu lassen. Um berechenbare Verhältnisse zu erlangen, wurden die Körper in Kugelform genommen. Kugeln aus Schwefel, Ebonit, Paraffin von ca. 1 cm Durchmesser wurden in der Richtung eines Durchmessers eng durchbohrt, und die Bohrung auf einer Seite durch ein Achatstückchen, das fest eingesetzt, bez. eingeschmolzen wurde, verschlossen. Mit diesen Achathütchen konnten dann die Kugeln auf eine Nähnadelspitze gesetzt werden und sie rotirten unter den Bedingungen der Quincke'schen Versuche dauernd in

1) A. Heydweiller, Wied. Ann. **69.** p. 531. 1899.

derselben Richtung, wobei sie sehr rasch constante Geschwindigkeiten erlangten.

3. Die Reibung, die bei dieser Versuchsanordnung ins Spiel tritt, ist, wie die Versuche lehren und wie es auch von vornherein wahrscheinlich ist, hauptsächlich diejenige an der Spitze und dem Achat. Die Reibung der Flüssigkeit kommt nur in verhältnismässig geringem Betrage ins Spiel. Die Reibung an der Spitze aber, da sie von uncontrollirbaren Oberflächenbeschaffenheiten abhängt, ist keine, während aufeinanderfolgender Versuche constant bleibende Grösse, sondern ändert sich bei jedem neuen Aufsetzen der Kugel auf die Spitze. Zuweilen ist auch während eines Versuches diese Spitzenreibung veränderlich, wenn der Auflagepunkt des Achathütchens nicht vollständig unveränderlich bleibt. Ein Schwanken der Kugel braucht dabei mit dem blossen Auge durchaus nicht erkennbar zu sein. Man erkennt dann aber, wenn man die Umdrehungsgeschwindigkeiten der Kugel misst, ein periodisches Abnehmen und Zunehmen derselben, welches sich auf solche minimale Verlagerungen zurückführen lässt. Bei guter Spitze und sorgfältiger Auflage der Kugel erreicht man aber in gegebenem elektrischen Felde leicht nach einiger Zeit eine constante Rotationsgeschwindigkeit für längere Zeit, womit die Unveränderlichkeit der Reibung eo ipso mitgegeben ist. Um die Grösse dieser Reibung, die von Versuch zu Versuch veränderlich ist, zu bestimmen, braucht man nur, nach Ausschalten des elektrischen Feldes, d. h. nach Entladung der Condensatorplatten, die Bewegung abklingen zu lassen und die Zeiten zu bestimmen, in welchen die Kugel eine Anzahl Umdrehungen noch ausführt. Aus der Messung dieser Zeiten, die mit einem Chronographen ausgeführt wurden, erhält man den Wert des in Frage kommenden Reibungscoefficienten b, dividirt durch das Trägheitsmoment K der Kugel, da die Bewegung nach der Gleichung

$$K \frac{d^2 \omega}{d t} = \frac{b \, d \omega}{d t}$$

geschieht. Zu diesem Wert muss man noch wegen der Hysteresis[1]) der Kugeln eine Correction fügen, die man erhält, wenn

1) W. Schaufelberger, Wied. Ann. **65**. p. 635. 1898; **67**. p. 307. 1899.

man das Abklingen einer rotirenden Bewegung in Luft einmal ohne und einmal mit Ladung der Condensatorplatten bestimmt. Diese Correction für b betrug hier annähernd 0,0038. Unter Umständen kann b bei verschiedenen Versuchen in derselben Flüssigkeit ziemlich gleich ausfallen, in anderen Fällen aber ist es von Versuch zu Versuch sehr verschieden. So ergab sich in mehreren Versuchen, bei denen eine Schwefelkugel in Aether rotirte, b zu 0,03913, 0,03886, 0,03976, schwankte aber in anderen Versuchen zwischen 0,03370 und 0,04587. Bei einer Ebonitkugel in Aether fanden sich sogar bei verschiedenen Versuchen Werte von b zwischen 0,02951 und 0,04046, je nachdem eben die Spitze etwas schärfer oder etwas stumpfer war.

4. Ist die Reibung, d. h. die Grösse b aber für jeden Versuch besonders bestimmt, so lässt sich aus der Messung der Umdrehungsgeschwindigkeit, bez. aus der Zeit τ einer ganzen Umdrehung der Kugel eine Prüfung der Theorie und eine Bestimmung der sehr kleinen Leitungsvermögen der angewendeten schlecht leitenden Flüssigkeiten vornehmen, letzteres allerdings nur in dem Fall, dass das Leitungsvermögen des benutzten festen Körpers so klein ist, dass es gegen das der Flüssigkeit vernachlässigt werden kann. Nach der Berechnung von v. Schweidler ist nämlich das Drehungsmoment der elektrischen Kräfte, die auf eine Kugel vom Radius R in einem Felde von der elektrostatischen Kraft F und bei einem Medium von der Leitungsfähigkeit λ_a wirken,

$$D = \frac{c_1 \dfrac{d\,\omega}{d\,t}}{1 + c_2 \left(\dfrac{d\,\omega}{d\,t}\right)^2},$$

wobei

$$c_1 = \frac{3}{16\,\pi} \, \frac{R^3 F^2}{\lambda_a}, \qquad c_2 = \frac{9}{64\,\pi^2} \, \frac{1}{\lambda_a^2}$$

ist.

Die Gleichung, welche die Bewegung der Kugel unter dem Einfluss dieses Drehungsmomentes und des der Reibung bestimmt, lässt sich allgemein integriren und giebt, wenn mit v die Winkelgeschwindigkeit bezeichnet wird, als Lösung

$$\frac{(v^2 - m)^n}{v} = D\,e^{-\varepsilon t},$$

wo m, n, ε bestimmte Constanten, D eine Integrationsconstante ist.

Wenn der stationäre Zustand erlangt ist, ist

$$v^2 = m$$

oder

$$\left(\frac{d\,\omega}{d\,t}\right)^2 = \frac{c_1 - b}{c_2\,b}.$$

Daraus berechnet sich die Leitungsfähigkeit aus einer quadratischen Gleichung.

Wenn bei verschiedenen Werten von F und $d\,\omega/d\,t$ sich angenähert constante Werte von λ_a ergeben, so ist das ein nachträglicher Beweis für die Richtigkeit der Theorie.

5. Es wurde die Zeit einer Umdrehung der Kugel dadurch bestimmt, dass die Zeit für 10 oder 20 Durchgänge einer auf der Kugel angebrachten Marke durch eine Visirlinie beobachtet wurde. Die Kugel befand sich auf einer Spitze zwischen zwei Condensatorplatten, die durch die Wände eines Glastroges hindurchgesteckt waren. Die Platten wurden durch eine Hochspannungsbatterie geladen. Bei vielen Beobachtungen war der Bereich der anzuwendenden Spannungen dadurch sehr beschränkt, dass bei kleinen Spannungen die Kugeln sich nicht, bei grossen aber so rasch sich bewegten, dass eine Zählung der Durchgänge unmöglich war. Die Rotationsgeschwindigkeit der Kugeln blieb übrigens, auch wenn die Reibung an der Spitze sich in längerer Zeit als unveränderlich ergab, nicht immer gleich. Vielmehr wurde fast regelmässig eine Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit nach längerer Versuchsdauer constatirt. Es beruht das offenbar auf der Veränderlichkeit der Leitfähigkeit dieser Substanzen, welche von dem allmählichen Aufzehren der vorhandenen Ionen herrührt und welches von Quincke[1]), Kohlrausch und Heydweiller[2]), Warburg[3]) festgestellt und aufgeklärt ist. Auch bei verschieden grossen elektrischen Kräften ist das Leitvermögen nicht dasselbe, sondern wächst mit zunehmender Kraft. Trotzdem aber geben die Beobachtungen innerhalb dieser Grenzen übereinstimmende Werte, wie man hauptsächlich daraus erkennt, dass es un-

---

1) G. Quincke, Wied. Ann. **28.** p. 545. 1886.

2) F. Kohlrausch u. A. Heydweiller, Wied. Ann. **53.** p. **209.** 1894; **54.** p. 385. 1895.

3) E. Warburg, Wied. Ann. **54.** p. 396. 1895.

abhängig ist, aus welcher Substanz die sich drehende Kugel gewählt wird, wenn sie nur die Bedingung der sehr geringen Leitfähigkeit gegenüber der der Flüssigkeit erfüllt.

6. So ergab eine Schwefelkugel von 0,575 cm Radius und dem Gewicht $G = 1{,}387$ g in Aether folgende Werte der Dauer τ einer Rotation, wobei eine Potentialdifferenz V (in Volt) der Platten, bei $d = 2$ cm Abstand, derselben angewendet wurde. Die elektrische Kraft F im elektrostatischen Maass ist, gleich V, dividirt durch $300 \,.\, d$. Die aus der oben angeführten Formel berechneten Werte der Leitfähigkeit λ des Aethers sind in elektrostatischem Maass ausgedrückt. Um sie auf die Leitfähigkeit des Quecksilbers als Einheit zu beziehen, sind sie mit 10^{-16} zu multipliciren.

Schwefelkugel in Aether.

$V =$	1700	1800	1900	1800	1900	Volt
$F =$	2,933	3,000	3,167	3,000	3,167	$\left(\frac{g^{\frac{1}{2}}}{cm^{\frac{1}{2}}\, sec}\right)$
$\tau =$	1,136	0,867	0,630	0,870	0,640	sec
$\lambda \,.\, 10^{16} =$	3,927	4,257	4,735	4,358	4,606	(Hg = 1)

Ebonitkugel in Aether.

Die Ebonitkugel hatte einen Radius von 0,58 cm und ein Gewicht $G = 0{,}902$ g. Der Abstand der Condensatorplatten war $d = 1{,}8$ cm. Es ergab sich:

$V =$	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	Volt
$F =$	2,407	2,593	2,778	2,963	3,148	3,333	3,519	$\left(\frac{g^{\frac{1}{2}}}{cm^{\frac{1}{2}}\, sec}\right)$
$\tau =$	2,445	1,223	0,846	0,807	0,523	0,500	0,477	sec
$\lambda \,.\, 10^{16} =$	2,245	2,511	2,787	3,215	3,384	3,871	4,381	

Die Zahlen in dieser und der vorigen Tabelle schwanken nicht mehr, als es bei solchen schlechten Leitern gewöhnlich der Fall ist. Dagegen ist die Ordnung des Leitungsvermögens des Aethers nach diesen Beobachtungen eine andere, als man bisher annahm. Ich habe allerdings nur eine Angabe über die Grössenordnung der Leitungsfähigkeit des Aethers gefunden.

Von Koller[1]) wird der specifische Widerstand des Aethers gleich dem des Alkohols zu 200.10^8 bezogen auf Quecksilber angegeben, wonach λ von der Grösse wäre 5.10^{-11} (Hg = 1). In einer Arbeit von Pfeiffer[2]) wird dagegen die Leitungsfähigkeit seines Alkohols zu $1,876.10^{-11}$ bestimmt, während die Leitungsfähigkeit des Aethers unmessbar klein war, jedenfalls lag sie weit unterhalb 3.10^{-13}, welches die unterste messbare Grenze bei seinem Apparat war. Es dürfte daher die Angabe von Koller sich auf einen stark verunreinigten Aether beziehen, und die aus den obigen Versuchen ermittelten Zahlen erscheinen daher nicht unwahrscheinlich.

7. Es wurden dieselben Kugeln auch in Benzol untersucht. Die Leitungsfähigkeit des Benzols wurde nach mehrmaligem Stromdurchgang merklich geringer. Es zeigte sich schon bei jedem einzelnen Versuch, dass bald nach Anbringung der elektromotorischen Kraft die Kugeln rasch liefen, ihre Geschwindigkeit aber im Laufe weniger Minuten verlangsamten, um nach einiger Zeit einen ziemlich constanten Wert zu bekommen. So wurde bei $F = 3,519$ und der Schwefelkugel die Rotationsdauer τ folgendermaassen gefunden. Zehn Umdrehungen fanden statt

nach	1	halben	Minute	in	12,8	sec
„	2	„	„	„	13,5	„
„	3	„	„	„	14,5	„
„	4	„	„	„	15,1	„
„	5	„	„	„	15,6	„
„	6	„	„	„	15,4	„

Bei einem anderen Versuch mit $F = 4,785$ ergab sich, dass zehn Umdrehungen stattfanden

nach	1	halben	Minute	in	15,6	sec
„	2	„	„	„	17,0	„
„	3	„	„	„	20,0	„
„	4	„	„	„	20,5	„
„	5	„	„	„	20,5	„

1) A. Koller, Exner Rep. **26.** p. 1. 1890.
2) G. J. Pfeiffer, Wied. Ann. **26.** p. 226. 1885.

Bei Anwendung höherer Spannung findet dann auch wieder erst eine raschere, dann eine langsamere Rotation statt. Es erklärt sich dies alles durch die geringe Zahl von Ionen, die die Leitung hervorbringen und die durch den Strom verbraucht werden. Eine Berechnung einiger Versuche ergab folgende Werte von λ.

Schwefelkugel in Benzol.

Abstand der Platten	$d =$	1,8	2,02	2,02 cm
Spannung in Volt	$V =$	1900	2900	3900
Dauer einer Umdrehung	$\tau =$	1,516	2,00	1,00
Elektrische Kraft	$F =$	3,519	4,785	6,435
	$\lambda . 10^{16} =$	0,015	0,017	0,027

Die Werte der Leitungsfähigkeit ca. 2.10^{-18} stimmen recht gut mit den von Koller angegebenen Zahlen. Doch hängt auch hier die Leitungsfähigkeit wesentlich ab von der vorgängigen Behandlung des Benzols.

Durch diese Berechnungen ist wohl die Theorie Schweidler's im grossen und ganzen, soweit dies bei der Inconstanz des Leitungsvermögens möglich ist, bestätigt. Es dürfte umgekehrt nun die Beobachtung der Rotationsgeschwindigkeit solcher Kugeln ein sehr empfindliches Mittel abgeben zur Bestimmung der Grösse und der Veränderlichkeit des Leitungsvermögens sehr schlecht leitender Substanzen.

8. Nach der interessanten Ausdehnung, die Heydweiller[1]) den Quincke'sche Versuchen gegeben hat, indem er sie auf verdünnte Gase anwendete, lag der Gedanke nahe, zu versuchen, ob solche Kugeln in Luft von Atmosphärendruck, die durch Röntgenstrahlen leitend gemacht wird, ebenfalls rotiren, um auf diese Weise die Leitfähigkeit der bestrahlten Luft zu bestimmen. Es gelang dies ohne weiteres und es gehen sogar diese Versuche in ionisirter Luft von Atmosphärendruck sehr regelmässig vor sich. Zur Betrahlung wurde eine Voltohmröhre angewendet, die ihre Strahlen zwischen die Condensatorplatten von oben oder von der Seite hineinwarf. Im Folgenden ist eine Beobachtungsreihe für verschiedene Spannungen an-

1) A. Heydweiller, Wied. Ann. **69**. p. 531. 1899.

gegeben. Die Reibung der Schwefelkugel in Luft ergab sich in den verschiedenen Versuchen zu

$b = 0{,}03095$ $b = 0{,}03254$
$b = 0{,}02857$ $b = 0{,}03461$
$b = 0{,}02592$

Das Mittel 0,03051 wurde zur Berechnung benutzt.

Die erhaltenen Resultate sind folgende:

Potentialdifferenz der Platten V in Volt	Atmosphärische Luft mit Röntgenstrahlen bestrahlt		
	Elektrische Kraft F (elektrostatisch)	Dauer einer Umdrehung τ in Secunden	Leitungsfähigkeit $\varDelta\, 10^{16}$ (Hg = 1)
2700	4,455	0,465	0,250
2500	4,126	0,532	0,225
2400	3,960	0,585	0,206
2200	3,630	0,65	0,200
2100	3,465	0,72	0,186
1900	3,135	0,765	0,193
1700	2,805	0,830	0,208
1500	2,475	0,845	0,255
1300	2,145	0,895	0,308
1100	1,815	0,980	0,400
			Mittel 0,242

Die Leitungsfähigkeit der durch die Strahlen ionisirten Luft liegt also in der Nähe von $0{,}244 \,.\, 10^{-16}$, d. h. bestrahlte Luft hat eine Leitungsfähigkeit, die zwischen der des Aethers und des Benzols liegt, etwa 10 mal kleiner ist, als die des Aethers.

Aus den bisher vorliegenden Beobachtungen ist ungefähr dieselbe Grössenordnung für die Leitungsfähigkeit zu berechnen, die sich naturgemäss mit der Entfernung der Röntgenröhre von dem Condensator, mit der Stärke der von ihr ausgesendeten Strahlung und auch mit der Stromstärke ändert. So fand Winkelmann[1]) für eine bestrahlte Luftschicht von 1 cm Dicke zwischen zwei Platten von 528 und 305 qcm Fläche den Widerstand $8{,}8 \,.\, 10^8$ Ohm. Daraus ergiebt sich λ zu etwa $4 \,.\, 10^{-16}$ (Hg = 1). Bei 8 cm Abstand der Platten war der Widerstand nur $24{,}2 \,.\, 10^8$ Ohm, sodass dabei sich λ zu ungefähr 10^{-15}

1) A. Winkelmann, Wied. Ann. **66.** p. 21. 1898.

ergiebt. Bei 0,5 cm Abstand war der Widerstand $5,6 \cdot 10^8$, daher $\lambda = 3 \cdot 10^{-16}$. Aus den Versuchen von Hillers[1]) berechnet sich ein ähnlicher Wert. Bei einem Querschnitt von 425 cm^2 und einem Abstand der Platten von ca. 5 mm ergab sich der Widerstand der bestrahlten Luftschicht zu $0,67 \cdot 10^9$, woraus sich λ zu $2 \cdot 10^{-16}$ berechnet. Sind auch diese Werte von λ grösser als der aus den obigen Versuchen berechnete, so ist der Unterschied doch kein allzu erheblicher, in Anbetracht der notwendigen Verschiedenheiten der Versuche. Die Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes, die zur Berechnung der Leitfähigkeit aus Spannung und Stromstärke notwendig vorausgesetzt wird, wird bei der Bestimmung derselben aus Rotationsversuchen nicht vorausgesetzt. Bei längerer Einwirkung einer hohen Spannung auf die ionisirte Luft nimmt die Rotationsgeschwindigkeit erheblich ab, offenbar weil auch hierbei mehr Ionen pro Zeiteinheit durch den Strom verbraucht werden, als von der Strahlung neue erzeugt werden.

9. Da diese Rotationen ein sehr empfindliches Reagenz auf sehr kleine Leitungsfähigkeiten und deren Veränderung sind, so wurde versucht, die Frage zu entscheiden, ob die Röntgenstrahlen auch andere Substanzen als die Gase ionisiren, eine Frage, die bekanntlich von verschiedenen Seiten verschieden, hauptsächlich aber bisher im negativen Sinne, beantwortet wurde.[2]) Es wurde eine Schwefelkugel in Benzol durch Anwendung verschiedener Spannungen zur Rotation gebracht, die Dauer einer Umdrehung bei constanter Rotation gemessen, dann die Flüssigkeit durch die Röntgenröhre bestrahlt, wieder die Dauer der Rotation gemessen und dasselbe mehrfach wiederholt. Es ergaben sich bei 3500 Volt Spannung zwischen den Condensatorplatten von 2,02 cm Abstand die aufeinanderfolgenden Werte von τ.

Ohne Röntgenstr.:	5 Umdr. in	11,0	9,8	11,0	11,0	11,2	—	sec,	daraus	$\tau = 2,16$
Mit „	5 „ „	9,6	9,6	9,6	9,4	9,8	9,0	„	„	$\tau = 1,90$
Ohne „	5 „ „	10,6	10,6	9,0	10,2	10,6	—	„	„	$\tau = 2,04$
Mit „	5 „ „	9,6	9,6	9,6	9,6	—	—	„	„	$\tau = 1,92$
Ohne „	5 „ „	11,0	10,6	10,6	10,8	10,2	—	„	„	$\tau = 2,13$

1) W. Hillers, Wied. Ann. **69**. p. 196. 1899.

2) O. Lodge, Electrician **38**. p. 161. 1896; Beattie u. Smolan, Phil. Mag. **43**. p. 418. 1897.

Es zeigt sich also jedesmal die Rotationsgeschwindigkeit grösser bei der Bestrahlung als ohne Bestrahlung.

Ein anderer Versuch mit 3900 Volt Spannung gab dasselbe Resultat. Um dem Einwand zu entgehen, dass etwa die über der drehbaren Kugel angebrachte Röhre vermöge ihrer elektrostatischen Wirkung die Kugel etwas hebt und dadurch die Reibung an der Spitze vermindert, wurde hier die Röntgenröhre so aufgestellt, dass sie von der Seite ihre Strahlen zwischen die Condensatorplatte warf. Es ergab sich hierbei, bei einer ähnlichen Zahl von Einzelbeobachtungen, wie oben:

1. Mit Bestrahlung: $\tau = 1{,}74$ sec
2. Ohne „ $\tau = 2{,}07$ „
3. Mit „ $\tau = 1{,}76$ „
4. Ohne „ $\tau = 2{,}00$ „

Also ergab sich auch hierbei eine Vergrösserung der Leitfähigkeit durch Bestrahlung.

Aehnlich verliefen die Versuche bei einer Schwefelkugel in Aether. Dabei ergaben sich bei 2500 Volt Spannung und 2,56 cm Abstand der Platten folgende Zahlen:

1. Ohne Bestrahlung: $\tau = 0{,}76$ sec
2. Mit „ $\tau = 0{,}60$ „
3. Ohne „ $\tau = 0{,}73$ „
4. Mit „ $\tau = 0{,}55$ „
5. Ohne „ $\tau = 0{,}69$ „
6. Mit „ $\tau = 0{,}55$ „

Ebenso waren bei 2100 Volt Spannung die Zeiten τ:

1. Ohne Bestrahlung: $\tau = 1{,}46$ sec
2. Mit „ $\tau = 1{,}12$ „
3. Ohne „ $\tau = 1{,}30$ „
4. Mit „ $\tau = 1{,}07$ „

Es zeigt sich also eine Beeinflussung der Leitfähigkeit der Flüssigkeiten in dem Sinne, dass die Leitung besser wird, wenn die Bestrahlung stattfindet, dass also auch hier eine Ionisation stattfindet.

Dieselbe Vergrösserung der Drehungsgeschwindigkeit zeigte sich auch, wenn der Versuch in der ursprünglichen Quincke'schen Weise, mit an Fäden aufgehängten Kugeln, ausgeführt wurde.

Die Leitfähigkeit des angewendeten Benzols berechnet sich bei diesen Versuchen ungefähr zu $0{,}598 \,.\, 10^{-18}$, wenn dasselbe nicht bestrahlt war, dagegen zu $0{,}730 \,.\, 10^{-18}$, wenn es bestrahlt war. Es ist sehr wohl möglich, dass solche geringe Aenderungen der Leitfähigkeit bei den anderen bisher angestellten Untersuchungen der Beobachtung entgangen sind, da ja die Luft unter denselben Umständen von einem vollkommenen Nichtleiter zu einem Leiter von derselben Ordnung wird, wie es die angewendeten Flüssigkeiten überhaupt sind.

Einige Versuche, die zeigen sollten, ob auch bei Bestrahlung mit ultraviolettem Licht oder mit radioactiver Substanz Aenderungen der Leitfähigkeit der Luft oder der obigen Flüssigkeiten sich ergeben, gaben für die Luft gar keine, für die Flüssigkeiten unsichere Resultate. Bei der radioactiven Substanz liegt das vermutlich an der geringen Wirksamkeit des benutzten Präparates.

10. Die obigen Darlegungen haben ein sehr vereinfachtes Verfahren zur Beobachtung und Messung der Quincke'schen Rotationen ergeben, sie haben gezeigt, dass die Erklärung dieser Rotationen durch die Abstossung der geladenen Teile des rotirenden Körpers von den gleichnamig elektrischen Elektroden auch quantitativ die Erscheinungen darstellt, dass infolge dessen die Rotationen dazu dienen können, für sehr schlecht leitende Substanzen die Leitfähigkeit und ihre Aenderungen unter verschiedenen Umständen zu bestimmen. Es wurde diese Methode insbesondere angewendet zur Messung der Leitfähigkeit der Luft, die durch Röntgenstrahlen ionisirt wurde und es zeigte sich, dass auch bei den Flüssigkeiten, Benzol und Aether, nach dieser Methode eine Vergrösserung der Leitfähigkeit durch Bestrahlung nachzuweisen war.

München, Physik. Inst. d. Univ., Februar 1900.

(Eingegangen 17. Februar 1900.)

10. *Ueber den Einfluss von Oberflächenschichten auf das Kerr'sche magneto-optische Phänomen;*
von F. J. Micheli.

(Hierzu Taf. III, Figg. 1—4.)

(Auszug aus der Leipziger Inaugural-Dissertation.)

§ 1. Einleitung.

Seitdem Kerr[1]) die wichtige Entdeckung gemacht hat, dass das von den Seiten oder Polflächen eines Magnetes reflectirte Licht eine Drehung seiner Polarisationsebene erleidet, haben sich viele Beobachter mit dieser Erscheinung beschäftigt.

Kurz zusammengefasst sind die beobachteten Thatsachen folgende: Geradlinig polarisirtes Licht, welches von einem nicht magnetisirten Metallspiegel unter irgend einem Einfallswinkel reflectirt wird, bleibt, wie bekannt, in zwei Fällen geradlinig polarisirt, nämlich, wenn die Polarisationsebene des einfallenden Lichtes in der Einfallsebene liegt oder senkrecht dazu steht. Diese beiden Fälle sollen hier allein berücksichtigt werden: Die Polarisationsebene des reflectirten Lichtes liegt dann auch in, bez. senkrecht zur Einfallsebene. Wenn nun ein Spiegel aus stark magnetisirbarem Metall (Fe, Ni, Co) verwendet wird, so tritt bei Magnetisirung desselben eine Erhellung des Gesichtsfeldes ein, wenn vorher Polarisator und Analysator gekreuzt waren. Diese Aufhellung des Gesichtsfeldes kann man als eine durch die Magnetisirung erzeugte Drehung der Polarisationsebene des reflectirten Lichtes ansehen. (Eine strengere Untersuchung zeigt allerdings, dass das reflectirte Licht überhaupt nicht mehr streng linear polarisirt bleibt.) Die Richtung und der Betrag dieser Drehung hängen nicht nur

1) J. G. Kerr, Phil. Mag. (5) **3.** p. 321. 1877; **5.** p. 161. 1878.

vom Einfallswinkel ab, sondern auch von der Stellung der Polarisationsebene des einfallenden Lichtes gegen die Einfallsebene. (Ob sie parallel oder senkrecht zu ihr ist.)

Für „äquatoriale" Magnetisirung (damit wird der Fall bezeichnet, dass die magnetischen Kraftlinien parallel der Oberfläche des Spiegels und parallell der Einfallsebene verlaufen) ergiebt sich bei Eisen folgendes: Ist das Licht parallel zur Einfallsebene polarisirt, so ist der Sinn der Drehung für alle Einfallswinkel der nämliche, und zwar der Richtung der Ampère'schen Molecularströme des reflectirenden magnetisirten Spiegels entgegengesetzt. Steht dagegen die Polarisationsebene senkrecht zur Einfallsebene, so ist der Sinn der Drehung demjenigen der Ampère'schen Molecularströme gleich für Einfallswinkel von 0^0 bis etwa 80^0; wechselt dann aber und ist von $80-90^0$ dem Sinne der Ampère'schen Molecularströme entgegengesetzt. Der Einfallswinkel, bei welchem dieser Zeichenwechsel der Drehung eintritt, wird aber von den verschiedenen Beobachtern nicht genau übereinstimmend angegeben.

Von der Stärke der Magnetisirung hängt φ' nicht ab, wie sowohl experimentell, als auch aus theoretischen Gründen folgt. Es ist daher die Frage, ob φ' durch die verschiedene Natur der Stahlspiegel oder durch Oberflächenschichten des Spiegels beeinflusst wird. Der kritische Einfallswinkel φ' hat insofern theoretische Wichtigkeit, weil sich aus ihm in relativ einfacher Weise das Verhältnis der beiden charakteristischen magnetooptischen Constanten des Spiegels berechnen lässt.

Der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist nun, zu untersuchen, ob der Wert jenes kritischen Einfallswinkels bei Stahl, Nickel und Kobalt durch Oberflächenschichten beeinflusst wird; ferner soll untersucht werden, ob bei möglichst reinem Spiegel sich die magneto-optischen Reflexionsphänomene bei äquatorialer Magnetisirung durch die vorhandenen Theorien innerhalb der Beobachtungsfehler darstellen lassen oder nicht.

Was diese Theorien anbelangt, so ist zu bemerken, dass die zunächst aufgestellten (von Lorentz, Voigt u. a.) zur Darstellung des Kerr'schen Phänomen nicht ausreichten, denn, einerseits fand Sissingh [1]) zwischen den beobachteten und be-

1) R. Sissingh, Wied. Ann. 42. p. 115. 1891.

rechneten Werten für die Phase der magneto-optischen Componente bei Eisen einen Unterschied von etwa 85°; andererseits wies auch Drude nach, dass jene Theorien nicht mit der Existenz eines kritischen Einfallswinkels φ' verträglich waren. Später erschienen Theorien von Goldhammer[1]) und Drude[2]), welche den erwähnten Sissingh'schen Phasenunterschied erklären, falls derselbe für alle Einfallswinkel constant ist, was der Fall zu sein scheint, und welche überhaupt die Beobachtungen an Eisen gut darstellen. Die Drude'sche Theorie unterscheidet sich dadurch von der Goldhammer'schen, dass in ersterer nur *eine* magneto-optische Constante eingeführt wird, in letzterer dagegen *zwei.* Die Beobachtungen an Kobalt und Nickel sprechen aber entschieden zu Gunsten der allgemeinen Goldhammer'schen Theorie. Die Drude'sche Theorie lässt sich dadurch sehr einfach mit den Resultaten der Goldhammer'schen Theorie in Uebereinstimmung bringen, dass die bei Drude eintretende reelle magneto-optische Constante als complex angenommen wird. Neuerdings zeigte Drude[3]), dass man nach theoretischen Ueberlegungen im allgemeinen immer zu einer complexen magneto-optischen Constanten, d. h. zu zwei Constanten geführt wird, wenn man von bestimmten physikalischen Vorstellungen, nämlich von Ampère'schen Molecularströmen und der elektromagnetischen Grundlage der Dispersionstheorie ausgeht. Die Theorie scheint nun sichergestellt zu sein, insofern verschiedene Ausgangspunkte (auch der Halleffect) immer zu denselben Endresultaten führen.[4]) Man muss also im allgemeinen mit *zwei* magneto-optischen Constanten rechnen.

Immerhin ist es bemerkenswert, dass die bisher zu den Beobachtungen benutzten Nickel- und Kobaltspiegel, welche gerade zu der Benutzung von zwei magneto-optischen Constanten nötigten, sicher Oberflächenschichten besassen, wie aus dem zu kleinen Werte ihrer Haupteinfallswinkel hervorgeht, während die Stahlspiegel viel reiner waren. Dadurch

1) A. Goldhammer, Wied. Ann. **46.** p. 71. 1892.
2) P. Drude, Wied. Ann. **46.** p. 353. 1892.
3) P. Drude, Verhandl. d. Deutsch. Physik. Gesellsch. **1.** p. **107. 1899.**
4) Vgl. darüber Drude, l. c.

liegt die Vermutung nahe, dass *reine* Kobalt- und Nickelspiegel sich vielleicht dem Verhalten der Stahlspiegel mehr nähern würden, oder dass wenigstens das aus den Beobachtungen zu berechnende Verhältnis der beiden magneto-optischen Constanten des Spiegels durch die Reinheit des Spiegels beeinflusst wurde. *Letzteren Schluss haben in der That die hier angestellten Beobachtungen bestätigt, aber es mag gleich bemerkt werden, dass auch für reine Nickel- und Kobaltspiegel die Annahme nur einer magneto-optischen Constante nicht genügt.*

§ 2. **Apparat und Messungen.**

Der benutzte Apparat war von Dietrich in Göttingen bezogen. Derselbe hatte die Gestalt eines Spectrometers; Collimator und Fernrohr desselben waren mit drehbaren Nicol'schen Prismen versehen, welche, von der Lichtquelle aus betrachtet, hinter der Collimatorlinse, bez. vor dem Objectiv des Fernrohres liegen. Die Drehungen dieser Nicols können mit Hülfe eines Nonius bis auf 1' bestimmt werden. Die Spiegel wurden an die Schliffflächen eines schmiedeeisernen Ringes von kreisförmigem Querschnitt angelegt, welcher als Elektromagnet diente. Die Fig. 1 deutet die Gestalt des Ringes an. *ss* sind die Schliffflächen, an denen die Spiegel angelegt wurden. Der Durchmesser des Ringes war 16 cm; die Dicke 3 cm; die Oeffnung zwischen *ss* 1,2 cm. Der Ring war mit sechs Lagen Windungen von 1,5 mm starkem Kupferdraht umwickelt. Jede Lage enthält 200—250 Windungen. Der Magnetisirungsstrom wurde von der städtischen Leitung geliefert. Die Intensität war constant 25—26 Amp. Der Strom wurde mittels eines Commutators umgekehrt, und die Ablesungen der Nicolstellungen stets für beide Stromrichtungen gemacht.

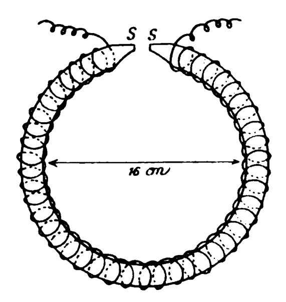


Fig. 1.

Als Lichtquelle diente das Zirkonplättchen eines Linnemann'schen Brenners.

Die in meinen Versuchen benutzten Spiegel habe ich durch die Güte des Hrn. Prof. Voigt aus Göttingen bekommen. Die optischen Constanten. sowie die Werte der Haupteinfallswinkel und Hauptazimute wurden durch die Reflexionsmethode mittels eines vor den Analysator gesetzten Babinet-Soleil'schen Compensators[1]) in derselben Weise ermittelt, wie sie von Drude[2]) beschrieben und angewendet worden ist. Nach jeder Versuchsreihe wurden die Werte der Constanten controlirt, da ja für meinen Zweck eine genaue Controle über den Zustand der Oberfläche des Spiegels von ganz besonderer Wichtigkeit war. Zwischen den Anfangs- und Endwerten habe ich nur sehr selten einen Unterschied von mehr als 8 bis 10 Trommelteilen der Compensatorschraube gefunden, was einer Aenderung von nur einigen Minuten des Haupteinfallswinkels entspricht. Dieses sehr constante Verhalten der Oberfläche des Spiegels habe ich dadurch erhalten, dass ich darauf achtete, dass der Elektromagnet und mit ihm der Spiegel sich nie stärker als etwa 60—70° durch die Stromwärme der Spule erwärmte.

Zur Messung des magneto-optischen Effectes wurde der Compensator wieder abgenommen. Die Polarisationsebene des Polarisators wurde parallel oder senkrecht zur Einfallsebene gestellt und der Analysator auf grösste Dunkelheit gedreht. Es wurden je 10 Einstellungen für bestimmte Lage des Analysators und Polarisators gemacht, ausserdem aber auch sowohl Analysator als Polarisator um je 180° gedreht, sodass für bestimmte Lage der Polarisationsebenen des Analysators und Polarisators 4 mal 10 Einstellungen gemacht wurden. Es ist somit jede angegebene Zahl für die magnetische Drehung der Polarisationsebene des reflectirten Lichtes der Mittelwert aus 40 Ablesungen.

Bei der Dunkelstellung des Analysators trat im Gesichts-

1) Dieser besteht aus einer planparallelen Quarzplatte, deren optische Axe parallel zur Fläche und senkrecht zur Längsrichtung der Platte steht, und aus zwei keilförmigen Platten von untereinander gleicher Orientirung; bei diesen liegt die optische Axe parallel zur Keilkante. Diese zwei Platten sind gegenseitig mikrometrisch verschiebbar, und bilden eine planparallele Platte von variabler Dicke.

2) P. Drude, Wied. Ann. 39. p. 481. 1890.

felde deutlich ein sogenannter Landolt'scher Streifen[1]) auf. In welcher Weise derselbe bei der Beobachtung benutzt wurde, wird unten bei Besprechung der Beobachtungen an Nickel angegeben werden. — Zur genauen Einstellung waren die Teilkreise von Analysator und Polarisator mit einem gezahnten Rande versehen, in welchen je eine Schraube ohne Ende eingreifen konnte. Dadurch wurden Analysator und Polarisator mikrometrisch verstellbar; man konnte sie aber auch sofort grob verstellen, wenn die Schrauben ohne Ende durch eine Feder vom Teilkreisrande abgehoben wurden. Die Genauigkeit der Beobachtungsmittel betrug auf diese Weise etwa 0,1 Bogenminuten.

§ 3. Beobachtungen an Stahl.

Dimensionen des Stahlspiegels: Länge 1,95 cm, Breite 1,95 cm, Dicke 0,4 cm.

In dieser ersten Versuchsreihe habe ich die Beobachtungen von Kundt[2]) wiederholt, um mich zu versichern, dass mein Apparat richtig functionirte. Meine Beobachtungen stimmen mit denjenigen von Kundt sehr gut überein.

Die Magnetisirung des Spiegels habe ich folgender Weise taxirt: Du Bois[3]) hat Beobachtungen bei polarer Magnetisirung an Eisen[4]), Nickel und Kobalt festgestellt, wo zugleich die Drehungen und die entsprechenden Magnetisirungen der Spiegel angegeben sind. Aus der Drude'schen Theorie sind die Drehungen bei polarer Magnetisirung bei allen Einfallswinkeln ebenfalls leicht zu rechnen. Führt man nun in diesen berechneten Werten der Drehungen für einen bestimmten Einfallswinkel (hier wurde es gemacht für $\varphi = 0^0$, weil die Du Bois'schen Beobachtungen sich auf diesen Einfallswinkel beziehen),

1) Betreffs seiner Erklärung vgl. Lippich, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien **85.** p. 262. 1882; Physik von Müller-Pouillet (Optik von Lummer) **2.** I. p. 1115.

2) A. Kundt, Wied. Ann. **23.** p. 245. 1885.

3) H. Du Bois, Wied. Ann. **39.** p. 37. 1890.

4) Die Zahlen an Stahl sind mit denjenigen an Eisen identificirt. Betreffs der magneto-optischen Drehungen sind nämlich die Abweichungen nur sehr gering.

den Wert für die magneto-optische Constante ein, der sich aus meinen Beobachtungen ergiebt ($b/\tau = 0{,}0283$), so sind die Zahlen direct mit den Du Bois'schen zu vergleichen. Hieraus würde sich ergeben für die Magnetisirung J[1]) des Spiegels etwa 1300 C.G.S., während die Magnetisirung des zur Sättigung magnetisirten Spiegels etwa 1400 C.G.S. beträgt.[2]) Der Stahlspiegel wurde zunächst mit Alkohol gewaschen, dann mit Pariser Rot polirt. Für die Werte des Haupteinfallswinkels $\bar{\varphi}$ und des Hauptazimuts $\bar{\psi}$ habe ich gefunden:

$$\bar{\varphi} = 76^{0}\,8', \quad \bar{\psi} = 28^{0}\,56'.$$

Diese Werte, sowie alle anderen, welche später mitgeteilt werden, sind die Mittelwerte der an drei verschiedenen Einfallswinkeln ausgeführten Beobachtungen. Für denselben Stahlspiegel erhielt Drude[3]) früher:

$$\bar{\varphi} = 77^{0}\,3', \quad \bar{\psi} = 27^{0}\,49'.$$

Folgende Tabelle enthält den Betrag der beobachteten und berechneten Drehungen der Polarisationsebene bei Reflexion. Der Rechnung ist dabei die Drude'sche Theorie in der ursprünglichen Fassung (mit *einer* magneto-optischen Constanten) zu Grunde gelegt.[4]) Die Grösse dieser Constanten ist als Mittelwert aus sämtlichen Beobachtungen berechnet. Die Drehungen sind + gerechnet, falls sie im Sinne der Ampères'chen Molecularströme erfolgen, falls man diese auf die Wellenebene des reflectirten Lichtes projicirt denkt. φ bedeutet den Einfallswinkel, p_r bedeutet die (einfache) Drehung der Polarisationsebene des reflectirten Lichtes, falls die des einfallenden senk-

---

1) Die Magnetisirung J ist dabei folgender Weise definirt: Die Dichte der im Spiegel im ganzen vorhandenen Kraftlinien ist gleich der Feldstärke vermehrt um $4\,\pi\,J$.

2) Vgl. A. Winkelmann, Handbuch der Physik (3) **2.** p. 199. 1895.

3) P. Drude, Wied. Ann. **39.** p. 522. 1890.

4) Es sind nur die in der citirten Arbeit von Drude als Näherungsformeln bezeichneten benutzt worden. Es stellte sich nämlich heraus, dass der Unterschied gegenüber den strengeren Formeln sehr gering war und innerhalb der Beobachtungsfehler blieb. Für $2\,p_r$ bei $\varphi = 60^{0}$ würde man mit den Näherungsformeln finden $2\,p_r = 8{,}93'$, mit den strengeren dagegen $2\,p_r = 8{,}90'$.

recht zur Einfallsebene steht, p_s falls sie parallel zur Einfallsebene ist. — Direct beobchtet wurden durch Umkehr des Magnetisirungsstromes die doppelten Drehungswinkel $2\,p_r$ und $2\,p_s$. Vergleichsweise stelle ich neben meine Beobachtungen diejenigen von Kundt[1]) und Righi[2]), welche sich ebenfalls auf äquatoriale Magnetisirung des Stahles beziehen. Sie sind mit K bez. R bezeichnet.

φ	$2\,p_r$ beob.	$2\,p_r$ ber.	$2\,s_r$ beob.	$2\,s_r$ ber.
60°	+7,8′	+8,9′	−7,8′	−7,8′
65	+8,6	+8,3	−9,5	−7,2
70	+8,0	+7,0	−7,2	−7,2
75	+6,5	+3,6	−6,2	−6,9
80	−3,0	−1,3	−3,8	−5,0

$\varphi\,K$	$2\,p_r\,K$	$2\,s_r\,K$	$\varphi\,R$	$2\,p_r\,R$	$2\,s_r\,R$
61,3°	+7,5′	−8,0′	60°	+11,0′	−9,0′
65,0	+8,7	−9,4	65	+ 8,7	−8,0
70,0	+8,1	−7,1	70	+ 6,6	−8,0
75,0	+6,8	−6,0	75	+ 4,5	−7,0
80,3	+2,6	—	80	− 1,0	−6,0
82,0	−2,3	−4,3	85	− 3,0	−3,0

Wenn man mit φ' den kritischen Einfallswinkel bezeichnet, so ergiebt sich, wenn Index M sich auf meine Beobachtungen bezieht:

$\varphi' K =$ etwa 81^0, $\varphi' R = 78^0\,54'$, $\varphi' M = 78^0\,26'$, φ' ber. $= 78^0\,30'$.

Den Rechnungen sind die von Drude angebenen, an demselben Stahlspiegel früher ermittelten optischen Constanten zu Grunde gelegt. Würde man als optische Constante diejenigen Werte benutzen, welche sich aus den hier ermittelten $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ ergeben (nämlich $n = 2{,}06$, $\varkappa = 1{,}56$, wo n den Brechungsindex, $\varkappa$ den Absorptionscoefficient bedeutet), so würde man finden: $\varphi' = 78^0\,13'$. Der Unterschied gegenüber der

1) A. Kundt, Wied. Ann. **23.** l. c.

2) A. Righi, Ann. de Chim. et de Phys. **10.** p. 200. 1887.

anderen Berechnung ist also nicht wesentlich. Hinsichtlich des kritischen Einfallswinkels ist also die Uebereinstimmung zwischen Experiment und der zu Grunde gelegten Theorie eine gute. Es ist zu bemerken, dass sich φ' nach der Drude'schen Theorie aus den optischen Constanten allein berechnet, d. h. dass zur Berechnung von φ' kein Beobachtungsresultat über einen magneto-optischen Effect benutzt worden ist. Der allgemeine Verlauf der beobachteten Curve für $2p_r$ weicht aber noch sichtlich ab von demjenigen der berechneten, wie ein Blick auf Fig. I der Taf. III zeigt.

Ich habe dann versucht, ob sich die Oberfläche des Spiegels noch besser reinigen liesse, um möglichst einen noch höheren Werth für $\bar{\varphi}$ zu erhalten, wie er vorhin angegeben ist. Der Spiegel wurde sorgfältig auf Schmirgelpapier Nr. 0, 00, 000, 0000 abgerieben, dann mit Wiener Kalk polirt, endlich mit ganz reinem frischen Putzleder geputzt. Ich erhielt für $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ folgende Werte:

$$\bar{\varphi} = 76^0\,52', \quad \bar{\psi} = 28^0\,12'.$$

Diese Werte unterscheiden sich nur noch sehr wenig von den Drude'schen (vgl. oben p. 548). In diesem Zustande ergaben sich die Drehungen in der Nähe des kritischen Einfallswinkel zu:

φ	$2p_r$	$2s_r$
75°	+ 6,7′	− 6,2′
82	− 2,4	− 3,6

Hieraus würde ein Zeichenwechsel für p_r bei $\varphi' = 80^0\,9'$ folgen. Dieser Wert stimmt mit dem vorhin berechneten, $\varphi' = 78^0\,30'$, nicht mehr so gut überein. Führt man eine complexe magneto-optische Constante, $b/\tau + ib'/\tau$, anstatt der reellen magneto-optischen Constante b/τ der Drude'schen Theorie ein, und berechnet man das Verhältnis b/b' so, dass der kritische Einfallswinkel der Beobachtung entspricht, so würde man finden: $b/b' = -7{,}15$. Dabei sind die von Drude an diesem Stahlspiegel gefundenen optischen Constanten wieder der Rechnung zu Grunde gelegt. Mit Benutzung der von mir

an reinem Stahlspiegel erhaltenen Reflexionsconstanten würde man die Zahl finden: $b/b' = -6,4$. Es macht hier auch keinen merkbaren Unterschied, ob man die Näherungsformeln oder die strengeren der Drude'schen Theorie anwendet: mit ersteren ergiebt sich $b/b' = -7,15$, mit letzteren $b/b' = -7,12$. Berechnet man nun aus den beiden bei 75° und 82° gemachten Beobachtungen für p_r die Drehungen p_r mit Hülfe dieser beiden magneto-optischen Constanten, mit dem Verhältniss $b/b' = 7,15$, so wird die Uebereinstimmung der beiden Curven eine viel bessere (vgl. Fig. II der Taf. III). In der Fig. II sind für Einfallswinkel, welche nicht nahe benachbart dem kritischen Einfallswinkel sind, die früheren Beobachtungen (Fig. I) eingetragen. Ich habe mich nämlich überzeugt, dass die Drehungen p_r bei Einfallswinkeln, die dem kritischen Einfallswinkel nicht benachbart waren, kaum merkbar von der Behandlung des Spiegels abhingen.

Der Spiegel wurde in der Weise nun verunreinigt, dass er mit einem Putzleder gerieben wurde, welches, da es vorher zwischen die Finger gepresst wurde, etwas fettig war.

Für $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ ergab sich alsdann:

$$\bar{\varphi} = 73^0\,25', \quad \bar{\psi} = 31^0\,54'.$$

Ich fand für die Drehungen:

φ	$2\,p_r$	$2\,s_r$
65°	+8,6′	—
70	+5,2	−6,2′
75	−1,5	−5,9

$\varphi' = 74^0$

Der Spiegel wurde alsdann frisch polirt; es ergab sich:

$$\bar{\varphi} = 76^0\,0', \quad \bar{\psi} = 29^0\,12'.$$

Die magneto-optischen Effecte waren nun folgende:

φ	$2\,p_r$	$2\,s_r$
75°	+5,1′	−5,8′
80	−3,0	−3,3

$\varphi' = 78^0\,9'$

In folgender Tabelle sind die Haupteinfallswinkel φ, welche von der Reinheit der Spiegeloberfläche abhängen, mit den in dem betreffenden Zustande des Spiegels beobachteten kritischen Einfallswinkel φ' zusammengestellt.

φ	φ'	φ	φ'
76° 52′	80° 9′	76° 0′	78° 9′
76 8	78 26	73 25	74 0

Wie man sieht, hängt der kritische Einfallswinkel deutlich in der Weise vom Haupteinfallswinkel ab, dass er mit abnehmendem Haupteinfallswinkel kleiner wird.

Da der Haupteinfallswinkel um so mehr abnimmt, je dicker die den Spiegel bedeckende, verunreinigende Oberflächenschicht[1]) ist, *so wird also durch Verunreinigung der Spiegeloberfläche der kritische Einfallswinkel kleiner.*

§ 4. Beobachtungen an Kobalt.

Dimensionen des Kobaltspiegels: Länge 2,5 cm; Breite 1,8 cm; Dicke 0,1 cm.

In ganz ähnlicher Weise wie an Stahl wurden die Versuche an Kobalt angestellt. Aehnlich auch wurde die Magnetisirung des Spiegels ermittelt. Sie ergab sich zu etwa 770 C.G.S., während die Sättigung erst bei 1200 C.G.S. erreicht ist.[2]) — Da Kobalt bisher in äquatorialer Magnetisirung nur bei wenig Einfallswinkeln (von Drude) untersucht worden ist, habe ich zunächst die magneto-optische Drehung des Kobalts in möglichst reinem Oberflächenzustande für mehrere Einfallswinkel ermittelt. Nach einigem Poliren mit Wiener Kalk und Putzleder erhielt ich:

$$\varphi = 77^{\circ}\, 40', \qquad \psi = 31^{\circ}\, 36'.$$

1) P. Drude, Wied. Ann. **39**. p. 488. 1890.

2) A. Winkelmann, l. c. Dass der Kobaltspiegel nicht so nahe der Sättigung magnetisirt war als der Eisenspiegel oder der Nickelspiegel (vgl. unten § 5), ist jedenfalls darauf zurückzuführen, dass der Co-Spiegel auf einem Messingplättchen befestigt war, und dass er nur mit Hülfe arabischem Gummi an den Schliffflächen des Elektromagnetes fest gemacht werden konnte, während der Fe- und Ni-Spiegel unmittelbar an denselben durch die blosse Anziehungskraft hafteten.

Diese Werte weichen von den von Drude[1]) angegebenen nicht viel ab; letztere Werte sind:

$$\bar{\varphi} = 78^0\,5', \qquad \bar{\psi} = 31^0\,40'.$$

Folgende Tabelle enthält die beobachteten und die nach der Drude'schen Theorie mit *einer* magneto-optischen Constanten berechneten Drehungen:

φ	$2\,p_r$ beob.	$2\,p_r$ ber.	$2\,s_r$ beob.	$2\,s_r$ ber.
40°	+2,75′	+3,8′	−2,95′	−3,9′
50	+3,4	+4,3	−3,65	−4,6
60	+4,3	+4,3	−5,8	−5,1
65	+4,8	+3,9	−6,5	−5,2
70	+4,0	+2,8	−6,3	−5,0
75	+0,0	+1,1	−5,5	−4,3
78	−2,3	−0,4	—	—
80	−3,4	−1,5	−3,5	−3,8
85	−1,75	−2,0	−2,4	−2,3

	beob.	ber.
φ'	75°	77° 4′

Die Grösse der Constanten b/τ ist ähnlich wie bei Eisen der Mittelwert der Verhältnisse der berechneten Zahlen zu den beobachteten bei sämmtlichen Beobachtungen. Die Uebereinstimmung zwischen Beobachtungen und Berechnungen ist eine gute, wohl aber noch nicht vollkommen genügende. Durch Einführung der complexen Constanten $b/\tau + i\,b'/\tau$ mit dem Verhältnis $b/b' = 6{,}66$ würden beob. und ber. φ' übereinstimmen; die Curve für p_r würde aber nicht viel besser als im ersten Falle sich der Beobachtung anschliessen (vgl. Fig. III der Taf. III). Die Grösse der Constanten b und b' ist auch als Mittel aus sämmtlichen Beobachtungen für p_r erhalten. —

Der Kobaltspiegel wurde jetzt in der gleichen Weise, wie es oben beim Stahl beschrieben wurde, verunreinigt. Es ergab sich:

$$\bar{\varphi} = 74^0\,26', \qquad \bar{\psi} = 33^0\,40'$$

und für die Drehungen p_r und s_r im entsprechenden Zustande erhielt ich:

1) P. Drude, Wied. Ann. **42.** p. 186. 1891.

φ	$2\,p_r$	$2\,s_r$
70°	+2,2′	−5,8′
78	−3,3	−3,7

$\varphi' = 73°\ 12'$

Eine Oberflächenschicht wirkt also hier auch auf den kritischen Einfallswinkel, und zwar im selben Sinne wie für Stahl.

§ 5. Beobachtungen am Nickel.

Von den drei magnetisirbaren Metallen tritt bei Nickel der grösste Unterschied zwischen den Beobachtungen und der Drude'schen Theorie ein.[1]) Die Drehungen $2\,p_r$, $2\,s_r$ am Nickel sind sehr gering, und um den Beobachtungsfehler noch weiter zu verringern, bin ich in folgender Weise verfahren: Das kleine runde Loch, welches bei den bisherigen Beobachtungen am Ende der Collimatorröhre vor dem Zirkonplättchen des Linnemann'schen Brenners angebracht war, wurde durch einen gewöhnlichen Collimatorspalt ersetzt. Dieser Spalt wurde so gedreht, dass der bei Dunkelstellung des Analysators im Gesichtsfelde erscheinende dunkle Landolt'sche Streifen senkrecht zu den Spalträndern verlief. Bei geringer Drehung des Analysators oder des Polarisators verschiebt sich nun der Landolt'sche dunkle Streifen schnell im Gesichtsfelde (vgl. Fig. 2). Derselbe wurde immer in die Mitte zwischen das Bild zweier dünner Platindrähte angebracht, welche in der Mitte des Collimatorspaltes in einem Abstand von 3,5 mm senkrecht zu den Spalträndern befestigt waren. Der Landolt'sche Streifen war etwas schmäler als der Abstand dieser Platindrähte im optischen Bilde. Das Spectrometerfernrohr, an welchem der Analysator befestigt ist, wurde immer so justirt, dass das Fadenkreuz des Oculars durch die Mitte des von den beiden

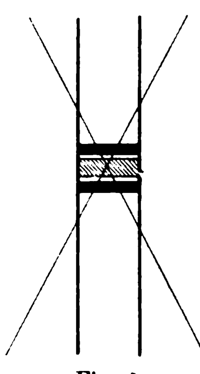


Fig. 2.

1) Vgl. P. Zeemann, Arch. Neerl. 27. p. 252. 1893; Comm. from the Lab. of Leiden Nr. 10. 1894.

Platindrähten erscheinenden Bildes ging. Es wurden jetzt auch die magneto-optischen Drehungen p_e, s_e des Polarisators herausgezogen, d. h. der Analysator wurde in fester Lage gelassen und der Polarisator für beide Richtungen des Magnetisirungsstromes auf dunkel gestellt. Es ergab sich, was schon vielfach beobachtet worden ist, und was auch der Theorie entspricht:

$$p_r = -s_e, \qquad s_r = -p_e,$$

worin p_e, s_e die Drehungen des Polarisators bezeichnen, falls das einfallende Licht senkrecht bez. parallel zur Einfallsebene polarisirt ist.

Die Dimensionen des Nickelspiegels waren: Länge 2,0 cm, Breite 1,9 cm, Dicke 0,2 cm. Die Magnetisirung, ähnlich wie für Stahl und Kobalt taxirt, betrug etwa 500 C.G.S. (Der Sättigung[1]) würde $J = 525$ C.G.S. entsprechen.) — Nach einigem Poliren mit Wiener Kalk und Putzleder fand ich für Haupteinfallswinkel und Hauptazimut:

$$\bar{\varphi} = 76^0\ 28', \qquad \bar{\psi} = 31^0\ 33',$$

während Drude angiebt:

$$\bar{\varphi} = 76^0\ 1', \qquad \bar{\psi} = 31^0\ 44'.$$

Für die magneto-optischen Drehungen erhielt ich:

φ	$2\,p_r$ beob.	$2\,p_r$ ber. mit b/τ	$2\,p_r$ ber. mit $b/\tau + i b'/\tau$	$2\,s_r$ beob.	$2\,s_r$ ber. mit b/τ
30°	+1,3′	+1,6′	+0,3′	−2,1′	−2,1′
40	+1,1	+1,9	+0,2	−2,7	−2,7
50	−0,38	+2,2	−0,18	−3,39	−3,2
60	−0,66	+2,2	−0,76	−3,50	−3,4
65	−2,1	+1,8	−1,8	−3,0	−3,4
70	−1,4	+1,1	−2,8	−2,0	−3,2
78	−1,1	−0,5	−3,9	−1,8	−2,6

Hierin sind $2\,p_r$ beob. die Mittelwerte aus $2\,p_r$ und $-2\,s_e$ $2\,s_r$ diejenige aus $2\,s_r$ und $-2\,p_e$. In den acht möglichen Lagen zwischen Polarisator und Analysator wurden je 8—10 Ablesungen gemacht. Es ist somit jede angegebene Zahl der Mittelwert aus 60—80 Beobachtungen. — Nach Ende dieser

1) A. Winkelmann, l. c.

Beobachtungsreihe wurden die optischen Constanten controlirt, und es ergab sich:

$$\bar{\varphi} = 76^0\, 7', \qquad \bar{\psi} = 31^0\, 42'.$$

Es hatte sich also die Oberfläche etwas geändert. Jedoch glaube ich nicht, dass diese Aenderung von grossem Einfluss auf den kritischen Einfallswinkel φ', gewesen ist, da dieser gleich nach der ersten Ermittelung von $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ gemessen worden ist, und da eine Controlirung an der Trommelteilung der Compensatorschraube gleich nach dieser Bestimmung keine Aenderung für die Werte von $\bar{\varphi}$ und $\bar{\psi}$ ergab.

Es mag hier gleich bemerkt werden, dass der von mir gefundene Wert von $\bar{\varphi}$ etwas grösser ist, als der von Drude ermittelte.[1] Es sind demnach meine Werte der Constanten den Rechnungen zu Grunde gelegt: $n = 1{,}87$; $\varkappa = 1{,}85$; $n\varkappa = 3{,}47$.

Aus obiger Tabelle sieht man, dass p_r einen Zeichenwechsel bei etwa 48° Einfallswinkel erleidet. (Kundt[2]) fand einen Zeichenwechsel zwischen 50 und 60°.) Der Theorie nach sollte bei Einführung nur einer magneto-optischen Constanten dies aber erst bei 74° stattfinden. Es stimmen Erfahrung und Berechnung mit *einer* Constanten gar nicht mehr überein (vgl. Taf. III, Fig. IV). Die Berechnung ist in der Weise geführt, dass die Grösse der magneto-optischen Constanten b/τ aus sämmtlichen Beobachtungen von s_r erhalten ist. Probirt man nun, wie im Falle des Stahls oder des Kobalts, die Uebereinstimmung zu verbessern durch die Einführung einer complexen magneto-optischen Constanten (d. h. durch Einführung von zwei Constanten), so findet man aus $\varphi' = 48^0$ das Verhältniss dieser beiden Constanten: $b : b' = 1 : 1{,}015$. Die Grösse von b ist aus allen Beobachtungen von p_r erhalten. Die so berechneten Werte der Drehungen sind in der 4. Columne der Tabelle enthalten. Wie man sieht, ist in diesem Falle die Uebereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung noch keine vollkommen genügende (vgl. Taf. III, Fig. IV).

---

1) Dieser Nickelspiegel ist, seitdem er von Hrn. Drude zur Ermittelung der optischen Constanten des Nickels benutzt wurde, in München bei Reinfelder & Hertel (optische Anstalt) eben geschliffen und polirt worden.

2) A. Kundt, Wied. Ann. **23.** l. c.

Es wurde nun untersucht, ob auch für Nickel der kritische Einfallswinkel φ' mit abnehmendem $\bar{\varphi}$ (d. h. mit Verunreinigung des Spiegels) herabsinkt. In der That trat dies ein, wie folgende Tabelle lehrt; in diesem Zustande waren die Werte des Haupteinfallswinkels und Hauptazimut folgende:

$$\bar{\varphi} = 74^0\,4', \qquad \bar{\psi} = 33^0\,23'.$$

Die beobachteten magnetischen Drehungen ergaben sich zu:

φ	$2\,p_r$	$2\,s_r$
$29^0\,54'$	$+\,1{,}25'$	$-\,1{,}7'$
40^0	$-\,0{,}6$	$-\,2{,}1$
50	$-\,0{,}9$	$-\,2{,}55$
60	$-\,1{,}3$	$-\,3{,}33$

$\varphi' = 37^0$

Im allgemeinen verhält sich also Nickel ganz ähnlich wie Stahl und Kobalt. Obwohl nun anzunehmen ist, dass auch im zuerst beobachteten Zustande des Spiegels der kritische Einfallswinkel φ' wegen mangelnder Reinheit der Oberfläche noch etwas grösser als 48^0 gewesen sein wird, so kann man doch keinesfalls diese Verkleinerung von φ' durch Verunreinigung als so stark annehmen, dass dadurch sich φ' bei reinem Spiegel zu 74^0 ergeben sollte, wie es die Theorie mit einer Constanten erfordert. *Das magneto-optische Verhalten des Nickels lässt sich also jedenfalls nicht mit Hülfe einer magneto-optischen Constanten darstellen. Aber auch die Einführung zweier magneto-optischen Constanten stellt die Beobachtung noch nicht genügend dar,* wie ein Blick auf die Taf. III, Fig. IV, lehrt. Die Abweichung zwischen Rechnung und Beobachtung besteht im wesentlichen darin, dass für Einfallswinkel, die grösser als der kritische sind, p_r grösser berechnet wird als es beobachtet ist. In gleichem Sinne besteht die Abweichung beim Kobalt. *Es soll sich im Folgenden darum handeln, ob man diese Abweichungen eventuell als eine Folge von magnetischen Oberflächenschichten ansehen kann.* Wenn nämlich ein Spiegel nicht bis zur Sättigung magnetisirt ist, so lässt sich erwarten, dass derselbe unmittelbar unter seiner Oberfläche etwas stärker magnetisirt sein könnte, da dort die entmagnetisirende Wirkung der benachbarten magnetisirten Teilchen halbseitig fehlt. Andererseits kann die Magnetisirung nach

der Oberfläche zu schwächer sein, falls die magnetische Leitfähigkeit nach der Oberfläche zu abnimmt. Welcher Einfluss der entscheidendere ist, wird die Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen ergeben.

§ 6. Theorie des Kerr'schen Phänomens unter Rücksicht auf Oberflächenschichten.

Es lauten die Differentialgleichungen des Drude'schen Erklärungssystems für magneto-optische Erscheinungen folgendermaassen [1]:

$$(1)\quad \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}(b_2 X - b_1 Y) + \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}(b_1 Z - b_3 X).$$

$$(2)\quad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial z\,\partial t}(b_3 Y - b_2 Z) + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}(b_2 X - b_1 Y).$$

$$(3)\quad \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}(b_1 Z - b_3 X) + \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial t}(b_3 Y - b_2 Z).$$

$$(4)\quad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}.$$

$$(5)\quad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}.$$

$$(6)\quad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

Hierin bedeuten X, Y, Z; α, β, γ die Componenten der elektrischen bez. magnetischen Kraft. c ist gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im freien Aether; b ist die magneto-optische Constante, welche (vgl. oben) im allgemeinen als complexe Grösse anzunehmen ist, und es gilt die Beziehung:

$$b_1 = b\cos(A, x), \qquad b_2 = b\cos(A, y), \qquad b_3 = b\cos(A, z),$$

wenn A die magnetische Axe bedeutet. ε ist eine die optischen Eigenschaften des Metalles charakterisirende complexe Grösse, und zwar ist $\varepsilon = n^2(1 - i\varkappa)^2$, falls n den Brechungsindex, $\varkappa$ den Absorptionsindex bedeutet. Die z-Axe soll positiv in das Innere des Metalles gehen; die x-z-Ebene sei die Einfallsebene, die x-y-Ebene die Grenze zwischen Luft und Metall. — Wir wenden uns zum Falle der äquatorialen Magnetisirung;

1) P. Drude, Wied. Ann. **46**. p. 377. 1892. Dass alle richtigen Theorien darauf zu reduciren sind, ist oben p. 544 gesagt worden.

die Kraftlinien gehen parallel zur spiegelnden Fläche, d. h. für die specielle Wahl des Coordinatensystems parallel zur x-Axe. Es ist also:

$$b_2 = b_3 = 0, \quad b_1 = b.$$

Berücksichtigt man, dass wegen der Wahl der Einfallsebene von y nichts abhängig ist, so kann man obige Gleichungen in folgender Weise schreiben:

$$(1') \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(Y + b\frac{\partial Z}{\partial t}\right),$$

$$(2') \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(Z - b\frac{\partial Y}{\partial t}\right) - \frac{\partial X}{\partial z},$$

$$(3') \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(Y + b\frac{\partial Z}{\partial t}\right),$$

$$(4') \qquad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\partial \beta}{\partial z},$$

$$(5') \qquad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

$$(6') \qquad \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial \beta}{\partial x}.$$

Es lauten nun nach Drude die Grenzbedingungen für den Fall der äquatorialen Magnetisirung, falls keine Oberflächenschichten vorhanden sind:

$$(7) \qquad Y + b\frac{\partial Z}{\partial t}; \quad X, \alpha, \beta$$

sind stetig beim Uebergang über die Grenze von der Luft zum Metall. Daher, wie sich aus (6') und (3') ergiebt, sind auch εZ und γ stetig.

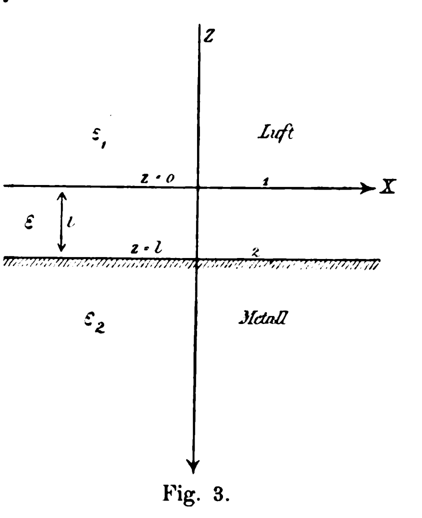


Fig. 3.

Wenn eine Oberflächenschicht vorhanden ist, sind diese Grenzbedingungen zu modificiren. Hr. Prof. Drude hat mir folgenden Weg gezeigt (vgl. Fig. 3): Wir wollen annehmen, dass vom negativen z bis zu $z = 0$ homogene Luft mit der Dielektricitätsconstante ε_1 vorhanden sei,

dass dagegen von $z = 0$ bis $z = l$ eine Uebergangsschicht vorhanden sei, in welcher die Dielektricitätsconstante ε vom Werte ε_1 der Luft bis zum Werte ε_2 des Metalles variire, und die magneto-optische Constante b von Null bis zum Werte b' im Metall. Von $z = l$ an soll das Metall homogen sein, d. h. dort sollen die Constanten ε_2 und b' bestehen. Die Grenzen der Uebergangsschicht wollen wir kurz als 1 und 2 bezeichnen.

Unsere Differentialgleichungen (1') bis (6') gelten auch in der inhomogenen Uebergangsschicht.[1]) Durch Integration der Gleichung (1') über die Grenzschicht gewinnt man daher:

$$(8) \qquad \frac{1}{c}\int\limits_1 \frac{\partial \alpha}{\partial t}\, d z = Y_2 + b' \frac{\partial Z_2}{\partial t} - Y_1 ,$$

wenn wir mit Y_2, Z_2 den Wert der im Metall bestehenden elektrischen Kraftcomponenten an der Grenze 2, d. h. für $z = l$, bezeichnen, dagegen mit Y_1 den Wert der elektrischen Kraftcomponente in Luft an der Grenze 1, d. h. für $z = 0$. Da nun α ohne Vorhandensein der Uebergangsschicht stetig ist, so wird es näherungsweise auch stetig sein, falls diese Uebergangsschicht genügend dünn[2]) ist. Treiben wir daher die ganze Entwickelung nur bis auf erster Ordnung in l, so kann man für (8) schreiben:

$$(9) \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\int\limits_1^2 d z = Y_2 + b' \frac{\partial Z_2}{\partial t} - Y_1 .$$

Es bezeichnet α_1 den Wert der magnetischen Kraftcomponente in der Luft, für $z = 0$. In ähnlicher Weise ergeben sich die drei anderen Grenzbedingungen.[3])

Setzt man:

$$(10) \qquad \int\limits_1^2 d z = l, \quad \int\limits_1^2 \varepsilon\, d z = p, \quad \int\limits_1^2 \frac{1}{\varepsilon}\, d z = q, \quad \int\limits_1^2 \frac{b}{\varepsilon}\, d z = r,$$

1) P. Drude, Wied. Ann. **46.** p. 379. 1892; auch P. Drude, Physik des Aethers p. 587.

2) Unter „Oberflächenschicht" denken wir uns im allgemeinen eine solche Schicht, deren Dicke gegen die Wellenlänge λ des Lichtes klein ist, sodass das Quadrat der Dicke gegen λ^2 zu vernachlässigen ist.

3) Betreffs der ausführlichen Herleitung vgl. die Dissertation.

so ergiebt sich als Grenzbedingungen:

$$(11)\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\,l = Y_2 + i\,\frac{b'}{\tau}\,Z_2 - Y_1,$$

$$(12)\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \beta_1}{\partial t}\,l = \frac{\partial(\varepsilon Z)_1}{\partial x}\,q - i\,\frac{\partial Y_1}{\partial x}\,r - X_2 + X_1,$$

$$(13)\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial X_1}{\partial t}\,p = -\beta_2 + \beta_1,$$

$$(14)\qquad \frac{1}{c}\frac{\partial Y_1}{\partial t}\,p = \frac{i}{c}\,\frac{\partial(\varepsilon Z)_1}{\partial t}\,r - \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}\,l + \alpha_2 - \alpha_1.$$

Diese vier Gleichungen liefern uns ein System von neuen Grenzbedingungen für magneto-optische Erscheinungen bei äquatorialer Magnetisirung, mit Berücksichtigung von Oberflächenschichten.

Beschreibt man die Rechnung auf den Fall, dass das einfallende Licht senkrecht zur Einfallsebene polarisirt ist, so ist $E_p = 0$ zu setzen. Dann ergiebt sich[1]) aus diesen Grenzbedingungen für das Amplitudenverhältnis im reflectirten Licht:

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} \left(\frac{R_p}{R_s}\right)_{E_p = 0} &= -\,i\,\frac{b'}{\tau}\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{n(1 - i\varkappa)(A + B\,i)} \\ &\quad + 4\,\pi\,\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{A + B\,i}\int_1^2 \frac{b - b'}{\tau}\,\frac{d\,z}{\lambda}. \end{aligned}\right.$$

Hier sind A und B Abkürzungen für:

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} A &= n\cos\varphi - \sin^2\varphi, \\ B &= n\,\varkappa\cos\varphi. \end{aligned}\right.$$

b'/τ ist gleich der complexen magneto-optischen Constanten im Metall. Wir wollen daher setzen:

$$(17)\qquad \frac{b'}{\tau} = \sigma_1 + i\,\sigma_2.$$

b/τ ist gleich der complexen magneto-optischen Constanten in der Oberflächenschicht und es kann b/τ grösser oder kleiner sein als b'/τ, je nachdem die Magnetisirung der Schicht stärker oder schwächer ist, als diejenige des unter ihr liegenden homogenen reinen Metalles. Wir wollen setzen:

$$(18)\qquad \int_1^2 \frac{b - b'}{\tau}\,d\,z = \varrho\,(\sigma_1 + i\,\sigma_2)\,\frac{l}{\lambda},$$

1) Betreffs der ausführlichen Herleitung vgl. die Dissertation.

worin l die Dicke der magnetischen Oberflächenschicht bedeutet, und ϱ eine reelle [1]) positive oder negative Zahl ist. Daher wird (38):

$$(19)\quad \left(\frac{R_p}{R_s}\right)_{E_p=0} = \frac{\sigma_1 + i\,\sigma_2}{A + B\,i}\sin\varphi\,\cos\varphi\left\{\frac{-i}{n(1-i\,\varkappa)} + 4\,\pi\,\varrho\,\frac{l}{\lambda}\right\}.$$

Die Minimumdrehung p_r ist der reelle Theil der hier stehenden complexen Gleichung, daher wird:

$$(20)\quad \begin{cases} p_r = \dfrac{\sin\varphi\cos\varphi}{n^2(1+\varkappa^2)(A^2+B^2)}\,\Re\left\{(A - B\,i)(\sigma_1 + i\,\sigma_2)\left(n\,\varkappa - i\,n\right.\right. \\ \qquad\qquad \left.\left. + 4\,\pi\,\varrho\,\dfrac{l}{\lambda}\,n^2(1+\varkappa^2)\right)\right\}, \end{cases}$$

wobei $\Re$ bedeutet, dass der reelle Teil der nachfolgenden in $\{\}$ eingeschlossenen complexen Grösse zu nehmen ist. Setzt man zur Abkürzung:

$$(21)\qquad 4\,\pi\,\varrho\,\frac{l}{\lambda}\,n^2(1+\varkappa^2) = \psi,$$

So wird (20) zu:

$$(22)\quad p_r = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{n^2(1+\varkappa^2)(A^2+B^2)}\left\{(A\,\sigma_1 + B\,\sigma_2)(n\,\varkappa + \psi) + (A\,\sigma_2 - B\,\sigma_1)\,n\right\},$$

was man in der Weise schreiben kann:

$$(23)\qquad p_r = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{n^2(1+\varkappa^2)(A^2+B^2)}(\sigma_1\,C + \sigma_2\,D).$$

Hierin bedeutet:

$$C = n\,\varkappa(2\,n\cos\varphi - \sin^2\varphi) + \psi\,A$$
$$D = n^2(1-\varkappa^2)\cos\varphi - n\sin^2\varphi + \psi\,B.$$

Durch Formel (23) wird die Minimumdrehung p_r mit Rücksicht auf den Einfluss, welchen eine (eventuell vorhandene) magnetische Oberflächenschicht ausüben könnte, gegeben, und zwar bei möglichst reinem Zustande des Spiegels. Es bleibt nun übrig, diese Formel mit den Beobachtungen, welche bei den grössten Haupteinfallswinkeln ausgeführt wurden, zu ver-

---

1) Im allgemeinen, nämlich wenn die optische Constante ε der Oberflächenschicht von dem Wert ε_2 im Metall abweicht, wäre ϱ eine complexe Zahl. Da wir aber hier $\varepsilon = \varepsilon_2$ gesetzt haben, so ist die verschiedene Magnetisirbarkeit, wie die molecular theoretische Vorstellung ergiebt, nur durch verschiedene Intensität der Molecularströme zu erklären. In diesem Fall ist dann ϱ reell.

gleichen. Die Rechnung wurde dabei folgendermaassen durchgeführt: aus $p_r = 0$, d. h. beim (beobachteten) kritischen Einfallswinkel φ', wurde ein Näherungswert $\sigma_1 : \sigma_2$ erhalten, indem man in erster Annäherung $\psi = 0$ setzte. Dann wurden unter Benutzung der Formel (23) untersucht, durch welche Wert von ψ der beste Anschluss an die Beobachtungen gewonnen werden könnte. Mit Rücksicht auf den so gefundenen Zahlwert ψ wurde dann in zweiter Näherung das Verhältnis $\sigma_1 : \sigma_2$ aus den in der Nähe des kritischen Einfallswinkels beobachteten p_r erhalten, und schliesslich die Drehungen p_r für alle Einfallswinkel mit Benutzung dieses Verhältnisses $\sigma_1 : \sigma_2$ in der Weise berechnet, dass für die Grösse des σ_1 der passendste Mittelwert ausgesucht wurde.

Für *Nickel* ergab sich in erster Annäherung: $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 1{,}015$; $\psi = -1{,}3$; dann in zweiter Annäherung: $\sigma_1 : \sigma_2 = 1 : 1{,}50$. Folgende Tabelle enthält die berechneten Werte von p_r, ohne und mit Hülfe der mit ψ behafteten Glieder der Formel (23).

φ	$2\,p_r$ beob.	$2\,p_r$ ber. ohne ψ	$2\,p_r$ ber. mit ψ
30°	+ 1,3′	+ 0,35′	+ 0,5′
40	+ 1,1	+ 0,2	+ 0,3
50	− 0,38	− 0,15	− 0,03
60	− 0,66	− 0,8	− 0,6
65	− 2,1	− 1,8	− 1,45
70	− 1,4	− 2,8	− 2,2
78	− 1,1	− 3,9	− 2,9

Die Uebereinstimmung, obwohl noch keine vollkommen genügende (vgl. Taf. III, Fig. IV, Curve *D*) ist doch besser als für Curve *B* oder *C*. Man kann also wohl sagen, dass eine magnetische Oberflächenschicht in dem Sinne wirkt, dass sie die Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung vermindert. Die noch vorhandene Differenz zwischen Theorie und Beobachtung liegt vielleicht an unserer vereinfachenden Annahme, dass die optische Constante ε der Schicht gleich der Constante ε_2 des Metalles angenommen wurde. — Bemerkenswert ist es, dass sich ψ als negativ ergiebt. Es entspricht dies einem negativen ϱ [vgl. Formel (18)], d. h. es ist für Nickel $b < b'$, d. h. die Oberfläche ist nicht so stark magnetisch als das Innere des Metalles; die magnetische Susceptibilität der

Oberflächenschicht ist also geringer als diejenige des Metalles. — Zu bemerken ist es ferner, dass schon durch sehr geringe Dicken der Oberflächenschicht die Abweichungen der Beobachtungen von der Theorie, welche Oberflächenschichten nicht berücksichtigt, erklärt werden. Denn aus (21) folgt für den Zahlenwert $\psi = -1,3$ hier $\varrho(l/\lambda) = {}^1/_{150}$. Wenn man z. B. die Annahme macht, dass nur um ${}^1/_{10}$ die Magnetisirung der Oberflächenschicht kleiner ist, als die des Inneren, so würde schon die Dicke $l = {}^1/_{15}\,\lambda$ der Oberflächenschicht jene Abweichungen, welche bei Nickel sogar noch besonders stark sind, erklären.

Für *Kobalt* wurde die Rechnung analog wie für Nickel durchgeführt, und es ergab sich: $\sigma_1 : \sigma_2 = 1,66$; $\psi = -0,5$; $\sigma_1 : \sigma_2 = 1,60$. Folgende Tabelle enthält die Resultate der Berechnung:

φ	$2\,p_r$ beob.	$2\,p_r$ ber. ohne ψ	$2\,p_r$ ber. mit ψ
40°	+ 2,7′	+ 4,5′	+ 4,1
50	+ 3,4	+ 4,9	+ 4,5
60	+ 4,3	+ 4,4	+ 4,4
65	+ 4,8	+ 3,7	+ 3,9
70	+ 4,0	+ 2,3	+ 2,7
75	+ 0	+ 0	+ 0,3
78	− 2,3	− 1,9	− 1,5
80	− 3,4	− 3,0	− 2,4
85	− 1,75	− 3,2	− 2,6

Auch in diesem Falle (vgl. Fig. III, Curve *D*) ist die Uebereinstimmung etwas verbessert, wohl aber noch keine vollkommen befriedigende (vgl. oben beim Nickel). Für Kobalt ergiebt sich aus dem negativen Werte von ψ, dass, wie für Nickel, die Oberfläche des Spiegels etwas schwächer magnetisch gewesen ist als das Innere. Mit derselben Annahme, die wir oben für Nickel gemacht haben, dass b gleich ${}^9/_{10}\,b'$ sein sollte, ergiebt sich hier nach (21), aus $\psi = -0,5$, $\varrho(l/\lambda) = {}^1/_{500}$. Eine Dicke der Oberflächenschicht gleich ${}^1/_{50}\,\lambda$ würde hier sogar genügen, um die Abweichungen zwischen Theorie und Beobachtung zu erklären.

Für *Stahl* ist die Einführung der mit ψ behafteten Glieder nicht notwendig; es ergiebt sich ψ als sehr klein.

Schluss.

Aus den angestellten Beobachtungen und theoretischen Bemerkungen gehen folgende Thatsachen hervor:

1. *Der kritische Einfallswinkel wird durch Verunreinigung des Spiegels bei Stahl, Nickel und Kobalt kleiner.* Dabei ist als „kritischer" Einfallswinkel derjenige bezeichnet, bei welchem die magneto-optische Drehung des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Lichtes, welches an einem äquatorial magnetisirten Spiegel reflectirt wird, sein Vorzeichen wechselt.

2. *Man kann die magneto-optischen Erscheinungen bei Nickel und Kobalt auch an möglichst reinen Spiegeln nicht mit Hülfe einer magneto-optischen Constanten darstellen.*

3. *Auch die Benutzung von zwei magneto-optischen Constanten lässt noch bestimmte Differenzen zwischen Theorie und Beobachtung bestehen.*

4. *Diese Differenzen werden jedenfalls teilweise erklärt,* und sind annähernd quantitativ zu berechnen, *wenn man die Annahme in die Theorie einführt, dass der Spiegel nicht völlig homogen magnetisirt ist.*

5. Der Vergleich der Beobachtung mit der so erweiterten Theorie ergiebt, dass die äquatoriale Magnetisirung für Nickel und Kobalt an ihrer Oberfläche etwas geringer ist als in ihrem Innern; *die Dicke von dieser Oberflächenschicht braucht nur beim Nickel von der Grössenordnung* $^1/_{15}$ *der Wellenlänge des Lichtes in Luft zu sein, beim Kobalt nur von der Grössenordnung* $^1/_{50}$ *der Wellenlänge.*

Für die Anregung und Hülfe zu dieser Arbeit bin ich Hrn. Prof. Dr. Drude zu Dank verpflichtet. Auch möchte ich an dieser Stelle dem ehemaligen Director des physikalischen Instituts, Hrn. Geheimrath Prof. Dr. G. Wiedemann †, für sein Interesse und die Gewährung von Hülfsmitteln bestens danken.

(Eingegangen 10. December 1899.)

11. *Zur Elektronentheorie der Metalle; von P. Drude.*

I. Teil.

Dass die Elektricitätsleitung der Metalle ihrem Wesen nach nicht allzu verschieden von der der Elektrolyte sei, insofern der elektrische Strom durch den Transport kleiner elektrischer Teilchen bewirkt wird, ist eine Anschauung, welche von W. Weber zuerst ausgesprochen und später von Giese [1]) weiter durchgeführt ist. Ich will diese elektrischen Teilchen im Anschluss an neuere Bezeichnungen *Elektronen*, oder (um einen bequemeren Ausdruck zu haben) *elektrische Kerne*, oder auch kurz *Kerne* nennen. Den Ausdruck Corpuskeln oder Ionen möchte ich vermeiden, da mit beiden Ausdrücken die Anschauung verbunden ist, dass die elektrischen Teilchen auch eine gewisse, wenn auch sehr kleine ponderable Masse mit sich führen. Ich glaube, es ist zweckmässiger, wenn der Ausdruck „Ionen“ für die Aggregate elektrischer Kerne und ponderabler Masse reservirt bleibt, welche wir in den Elektrolyten antreffen.

Ob ein Elektron eine sehr kleine ponderable Masse mit sich führt, oder nicht, lassen wir vorläufig unentschieden. Ich will nur gleich hier bemerken, dass es durchaus nicht nötig ist, einem Elektron ponderable Masse beizulegen, um ihm trotzdem eine gewisse kinetische Energie seiner Bewegung zuzuschreiben und eine Trägheit für Bewegungsänderungen, wie sie z. B. aus den Ablenkungen der Kathodenstrahlen im Magnetfeld und aus den optischen Eigenschaften der Metalle hervorgeht. Da jedes bewegte Elektron einen elektrischen Strom repräsentirt, welcher eine gewisse Anzahl magnetischer Kraftlinien im umgebenden Aether erzeugt, so müssen bei Antrieben, welche Richtung und Grösse der Geschwindigkeit des Elektrons zu ändern suchen, entgegenstehende Kräfte einsetzen, welche durch die Veränderung der vom bewegten Elektron hervor-

1) W. Giese, Wied. Ann. 37. p. 576. 1889.

gerufenen Zahl magnetischer Kraftlinien, wir wollen kurz sagen *durch die Selbstinduction des Elektrons*, hervorgebracht werden. Da die Selbstinduction eines Stromes bestimmter Stärke um so grösser ist, auf je kleinerem Querschnitt er sich concentrirt, *so muss die elektrisch interpretirte scheinbare Masse eines Elektrons von seiner Ladung und seiner räumlichen Ausdehnung abhängen.* In welcher Weise die scheinbare Masse eines Elektrons annähernd zu berechnen ist, wird weiter unten behandelt werden.

Durch diese Anschauung erlangt man folgende Vorteile vor der üblichen Auffassung, dass das Elektron eine wirkliche ponderable Masse besässe: Die metallische Leitung ist bekanntlich dadurch von der elektrolytischen verschieden, dass nur bei letzterer ein wägbarer Massentransport im elecktrisch durchströmten Körper eintritt, während bei einem Metall nicht nur ein beobachtbarer Massentransport fehlt, sondern überhaupt, abgesehen von der Joule'schen und Thomson'schen Wärmetönung, das Metall durch den elektrischen Strom in keiner Weise verändert wird. Um diesen Gegensatz zwischen Metallen und Elektrolyten zu erklären, nimmt Giese an, dass im Metall das leitende Elektron nach Durcheilen einer kurzen Strecke seine elektrische Ladung an ein anstossendes Massenteilchen abgiebt. Dieser Vorgang der Ladungsabgabe ist nun aber anschaulich nicht verständlich und führt zu Complicationen, die man theoretisch ohne Hinzuziehung neuer Hypothesen nicht verfolgen kann. Jedenfalls ist es besser, wenn man diese Vorstellung von einer Ladungsabgabe möglichst vermeidet.

Man könnte das nun dadurch thun, dass man die Elektronen in allen Metallen zwar von zweierlei Art (positiv und negativ geladen) annimmt, im übrigen aber als in allen Metallen identisch, sowohl hinsichtlich ihrer Ladung als auch der ponderablen Masse. In der That würden dann, auch wenn die Wanderungsgeschwindigkeiten der positiven und negativen Elektronen verschieden sind, irgend welche Massenverschiebungen, wie sie in Elektrolyten eintreten (Concentrationsänderungen an den Elektroden), in einem von Metallen gebildeten Stromkreise nicht eintreten. Diese Anschauung würde aber erfordern, dass das Verhältnis von Ladung zu Masse der positiven und der negativen Elektronen zwei universelle Constanten seien, was mit den optischen Eigenschaften der Metalle nicht verträglich zu sein

scheint, wenn man noch ihre galvano- und thermomagnetischen Eigenschaften mit in den Kreis der Betrachtung zieht. — Diese Schwierigkeiten werden mit einem Schlage vermieden, sowie die Elektronen als masselos angenommen werden.

Ich habe kürzlich[1]) die optischen Eigenschaften der Metalle vom Standpunkt der Elektronentheorie betrachtet. Wie ich dort angab, muss man zur Darstellung der optischen Eigenschaften von Gold und Kupfer notwendig auch gebundene Elektronen annehmen, d. h. solche, welche gewisse Gleichgewichtslagen im Körper haben, d. h. an seine materiellen Atome oder Molecüle gebunden sind. Gerade der weitere Ausbau dieser Theorie für die optischen Eigenschaften der Metalle hat mich dazu geführt, auch die Vorgänge der Stromleitung, Wärmeleitung, des Thomsoneffectes, der Berührungs- und Thermoelektricität und der galvano- und thermomagnetischen Eigenschaften vom Standpunkte der Elektronentheorie einer erneuten Revision zu unterziehen, weil man dadurch Anhaltspunkte dafür gewinnen kann, wieviel von den im Metall vorhandenen Elektronen frei bewegliche und wieviel gebundene vorhanden sind. Letztere spielen nur bei den optischen Erscheinungen eine Rolle. Erst durch Schaffung einer solchen Grundlage wird die für die Darstellung der optischen Eigenschaften der Metalle zunächst verfügbare Anzahl von Constanten derartig beschränkt, dass man aus den optischen Eigenschaften der Metalle Schlüsse ziehen kann auf Eigenschaften ihrer gebundenen Elektronen, und dadurch hoffen kann, zu einer Theorie durchzudringen, welche alle die genannten Erscheinungen nicht nur gemeinsam umspannt, sondern auch mit einer gewisssen Wahrscheinlichkeit Schlüsse über Eigenschaften der Metalle in Gebieten erlaubt, welche bisher der directen Beobachtung unzugänglich waren.

In neuerer Zeit hat Riecke[2]) eine Elektronentheorie der Metalle gegeben, welche ebenfalls die genannten Gebiete, mit Ausnahme der optischen Eigenschaften der Metalle, behandelt. Mit dieser Arbeit hat die meinige viel Berührungspunkte und manche Verschiedenheiten.[3]) Von den letzteren möchte ich

1) P. Drude, Physikal. Zeitschr. 1. p. 161. 1900.

2) E. Riecke, Wied. Ann. 66. p. 353 u. p. 545. 1898.

3) Um den hier gebotenen Raum nicht zu überschreiten, muss ich es mir leider versagen, hierauf im Einzelnen einzugehen.

gleich hier hervorheben, dass nach meiner Theorie gewisse zahlenmässige Beziehungen, besonders über das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeit und der elektrischen Leitfähigkeit, über die Grössenordnung des bei einem Metall zu erwartenden Thomsoneffectes, der Contactpotentialdifferenz und thermoelektrischen Kraft etc. zu ziehen erlaubt ohne Anwendung besonderer Hypothesen, als derjenigen, die sich auf anderen Gebieten schon bewährt haben, nämlich der Gasgesetze, der Loschmidt'schen Zahl für die Anzahl der Molecüle im cm^3 eines Gases, welches bei 0° C. den Druck einer Atmosphäre ausübt, und die Annahme für die Grösse der Ladung eines Elektrons, welche von mehreren Seiten, besonders durch die Arbeiten J. J. Thomson's, der Grössenordnung nach übereinstimmend festgelegt ist.

Ob die hier dargelegte Theorie in allen Punkten mit der Erfahrung nicht in Widerspruch kommen wird, vermag ich bei der Grösse des zu behandelnden Gebietes nicht zu sagen. Da sich aber schon manche bestätigende und, soviel ich sehe, keine widersprechende Resultate ergeben haben, so möchte ich mit der Veröffentlichung nicht mehr zurückhalten. Ich werde dazu ermutigt, weil gewiss Jeder das Erscheinen der citirten Riecke'schen Arbeit, welche viel Anregung giebt, mit Freude begrüsst hat, obwohl der Autor selbst seine Theorie in mehrfacher Beziehung für unvollkommen hält und wünscht (l. c. p. 356), „dass andere Forscher sich um eine bessere und weitere Führung des eingeschlagenen Weges bemühen möchten“. — Diese Worte möchte auch ich als Motto für meine Arbeit gelten lassen, besonders können die Zahlenfactoren noch genauer berechnet werden, da ich nicht mit dem Maxwell'schen Verteilungsgesetz der Geschwindigkeiten gerechnet habe. Mir liegt hier zunächst an einem möglichst durchsichtigen Ueberblick.

Dem hier abgedruckten I. Teil wird ein II. Teil folgen, welcher die galvano- und thermomagnetischen Eigenschaften der Metalle, und ein III. Teil, welcher ihre optischen Eigenschaften behandelt.

1. Grundannahmen.

Es sollen zunächst beliebig viel Gattungen von frei beweglichen Kernen (Elektronen) angenommen werden, welche

verschiedene Ladungen e_1, e_2, e_3 ... (elektrostatisch gemessen) haben können. Die Ladungen können nicht nur ihrem Vorzeichen nach verschieden sein, sondern auch ihrem absoluten Werte nach. Im letzteren Falle wollen wir aber annehmen, um die bewährte Vorstellung des elektrischen Elementarquantums nicht über Bord zu werfen, dass die e_n ganzzahlige Multipla des Elementarquantums e sein sollen. Es ist wenigstens zunächst denkbar, dass solche Polymerisationen (Zusammenballen) des Elementarquantums e vorkommen könnten. Ist z. B. $e_2 = 2\,e$, so soll die Gattung 2 bezeichnet werden als *positive Doppelkerne*, ist $e_3 = -\,2\,e$, als *negative Doppelkerne*. Die Anzahl der in der Volumeneinheit (cm³) bei der absoluten Temperatur T vorhandenen Kerne sei $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$ ...

Für diese frei beweglichen Kerne acceptiren wir die Vorstellungen der kinetischen Gastheorie. Dass ein positiver und ein negativer Kern trotz ihrer in einem gewissen Augenblick vielleicht sehr starken gegenseitigen Anziehung nicht einfach zu einem neutralen Aetherpunkt zusammensinken, sondern frei, d. h. unabhängig voneinander, beweglich bleiben, erklärt sich, sobald ihre kinetische Energie einen gewissen Betrag übersteigt (vgl. nicht zum Sonnensystem wiederkehrende Kometen). — Die ponderabeln Atome des Körpers können auch kinetische Energie besitzen, sie sollen aber an Gleichgewichtslagen gebunden sein.

Um die Betrachtungen nicht zu sehr zu compliciren, setzen wir die Geschwindigkeit u_1 aller Kerne der Gattung 1, mit der sie bei der Temperatur T unregelmässig im Raum hin und her fliegen, als gleich voraus. Ihre mittlere freie Weglänge sei l_1. Analoge Bedeutung haben u_2, l_2 für die Gattung 2 etc.

Die kinetische Energie eines Kernes 1 schreiben wir als $\frac{1}{2} m_1 u_1^2$. m_1 bedeutet also seine ponderable Masse, falls er eine solche besitzt. Fehlt dieselbe, so hat m_1 eine andere Bedeutung, die weiter unten aus der Selbstinduction des fliegenden Kernes annähernd berechnet werden soll. Wir wollen dann m_1 die *scheinbare Masse* des Kernes 1 nennen.

Nach einem Theorem von Boltzmann[1]) muss im Falle

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (II) 58. p. 517. 1868.

des Temperaturgleichgewichtes die mittlere kinetische Energie der fortschreitenden Bewegung jedes frei fliegenden Teilchens dieselbe sein. Wir wollen demnach setzen:

$$(1) \qquad \tfrac{1}{2} m_1 u_1^2 = \tfrac{1}{2} m_2 u_2^2 = \ldots = \alpha T,$$

worin T die absolute Temperatur, α eine universelle Constante bedeutet. Innere kinetische Energie soll für die Kerne, auch wenn sie mehrfach sind, nicht angenommen werden. Ein einfacher Kern ist weiter nichts als eine Stelle im Aether, aus welcher $4\pi e$ elektrische Kraftlinien hervorquellen (bez. in welchem $4\pi e$ Kraftlinien eingesaugt werden), ein Doppelkern ist eine Stelle, aus welcher $8\pi e$ Kraftlinien hervorquellen etc.

Auch wenn nur einfache Kerne vorhanden sind, so können doch ihre scheinbaren Massen, selbt die der gleichnamig geladenen Kerne, Verschiedenheiten aufweisen in verschiedenen Metallen, da die Ausdehnung der Kerne (d. h. Divergenz bez. Convergenz der elektrischen Kraftlinien) von den ponderabeln Molecülen des Metalles beeinflusst sein kann. Der Allgemeinheit halber könnte man zunächst annehmen, dass auch in einem einzigen homogenen Körper, z. B. Metalllegirung, mehrere Gattungen gleichnamiger Kerne, selbst wenn sie alle einfache sind, mit verschiedenen scheinbaren Massen existiren.

Wenn eine Stelle des Körpers keine freie elektrische Ladung enthält, so braucht deshalb doch nicht die Gleichung

$$(2) \qquad e_1 \mathfrak{N}_1 + e_2 \mathfrak{N}_2 + \ldots = 0$$

erfüllt zu sein.[1]) Denn diese Gleichung müsste nur erfüllt sein, wenn die $\mathfrak{N}$ die Gesamtzahl aller überhaupt vorhandener Kerne bedeutete. Hier sollen aber die $\mathfrak{N}$ nur die Zahl der frei beweglichen Kerne sein.

Wenn die Gleichung (2) nicht erfüllt ist an einer ladungsfreien Stelle, so haben wir also sicher auch gebundene Kerne im Körper.

Im allgemeinen wird man auch gebundene Kerne als existirend annehmen. Die Erscheinungen der Kathoden- und Canalstrahlen lassen vermuten, dass die gebundenen Kerne in Metallen positive Ladung tragen, wie auch daraus hervorgeht, dass in Elektrolyten die Metallionen stets positiv geladen

1) Vgl. E. Riecke, l. c. p. 356.

erscheinen. Die Kathodenstrahlen bestehen in einer Fortschleuderung der freien negativen Kerne, die Canalstrahlen in einer Fortschleuderung der freien und gebundenen positiven Kerne; letztere reissen die ponderabeln Atome des Metalles, an die sie gebunden sind, mit sich, daher haben sie ponderable Massen, welche dem Atomgewichte des Metalles entsprechen.[1]) Ihre kinetische Energie enspricht dann fast nur der kinetischen Energie der bewegten Masse, da sie infolge der Mitführung derselben eine viel geringere Geschwindigkeit haben, als die freien, d. h. nicht an wirkliche Masse gebundenen Kerne. Vielleicht kann durch weitere quantitative Untersuchung über Kathoden- und Canalstrahlen die Anzahl der freien und der gebundenen Kerne im Metall der Elektrode bestimmt werden.

2. Die universelle Constante α.

In der kinetischen Gastheorie wird gezeigt, dass der Druck p, der bei der Temperatur T ausgeübt wird von $\mathfrak{N}$ Molecülen pro cm³, von denen jedes die Masse m und die Geschwindigkeit u besitzt, den Wert hat:

$$p = \tfrac{1}{3}\,\mathfrak{N}\, m\, u^2.$$

Setzt man auch hier

$$\tfrac{1}{2}\, m\, u^2 = \alpha\, T,$$

so wird

$$p = \tfrac{2}{3}\,\alpha\,\mathfrak{N}\, T. \tag{3}$$

Diese Gasgesetze haben sich nun auch für den osmotischen Druck, welchen die Ionen in Elektrolyten besitzen, bewährt, nicht nur formell, sondern auch mit Benutzung derselben numerischen Constanten.

Wenn nun ein Metall in einen Elektrolyten eingetaucht ist, so müssen im Falle des Temperaturgleichgewichtes die freien Elektronen (Kerne) des Metalles dieselbe kinetische Energie besitzen, wie die der Ionen im Elektrolyt. Es ist daher auch für unsere Gleichung (1) die Constante α aus den Gasgesetzen zu ermitteln.[2])

1) E. Riecke (l. c. p. 570) schliesst dies aus Versuchen W. Wien's.

2) Im § 11 wird gezeigt, dass diese numerische Bestimmung von α notwendig ist, um den Anschluss der Theorie an die Nernst'sche Theorie für Elektrolyte zu gewinnen.

Nun liegt nach Loschmidt[1]) die Anzahl $\mathfrak{N}$ der Gasmolecüle, welche in 1 cm^3 bei 25° C., d. h. $T = 298$ und $p = 1$ Atm., enthalten sind, zwischen den Werten $0{,}025 \cdot 10^{20}$ und $2{,}5 \cdot 10^{20}$. Für 0° C., d. h. $T = 273$, liegt also $\mathfrak{N}$ zwischen den Werten $0{,}027 \cdot 10^{20}$ und $2{,}7 \cdot 10^{20}$. Von derselben Grössenordnung sind die von Richarz[2]) angegebenen Zahlwerte für $\mathfrak{N}$. Setzen wir, um α wenigstens zunächst der Grössenordnung nach festzulegen, die Zahl der Gasmolecüle, welche bei 0° C. und $p = 1$ Atm. in 1 cm^3 enthalten sind, gleich 10^{20}, so ergiebt sich aus (3) die universelle Constante α, da $p = 1$ Atm. $= 1{,}013 \cdot 10^6$ Dynen/cm^2 entspricht, in absolutem C.G.S.-Maass:

$$1{,}013 \cdot 10^6 = \tfrac{2}{3}\,\alpha \cdot 10^{20} \cdot 273,$$

d. h.

$$\alpha = 5{,}6 \cdot 10^{-17}. \tag{4}$$

3. Wärmeleitung, falls die Kernzahl von der Temperatur unabhängig ist.

Als Grundsatz stellen wir voran, dass die Wärmeleitung nur durch die Stösse der Elektronen vermittelt werden kann, d. h. dass die ponderabeln Atome sich bei ihrer Bewegung um ihre Gleichgewichtslagen nicht stossen, d. h. keine Energie übertragen sollen. Wenn die in einem Metallstück überhaupt vorhandene Anzahl der Kerne jeder Gattung durch eine Erhitzung nicht verändert wird, so ist die Wärmeleitung nach den bekannten Grundsätzen der kinetischen Gastheorie zu berechnen. In ihr wird gezeigt[3]), dass, falls jedes Molecül von irgend einer gewissen Grösse Q einen Anteil G besitzt, dann in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit die Menge

$$\Gamma = \frac{u\, l\, \mathfrak{N}}{3}\, \frac{\partial G}{\partial x} \tag{5}$$

von dieser Grösse Q durch die Bewegung der Molecüle transportirt wird, falls die Flächeneinheit senkrecht zur Richtung des Gefälles der Grösse Q (der x-Axe) liegt. Da nach (1)

1) J. Loschmidt, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (II) 52. p. 395. 1865; L. Boltzmann, Gastheorie I. p. 83.

2) F. Richarz, Wied. Ann. 52. p. 395. 1894.

3) L. Boltzmann, Gastheorie I. p. 77.

jeder Kern die Wärmemenge αT mit sich führt, so ergiebt sich aus (5) für den Wärmefluss $\mathfrak{W}$ durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit:

$$\mathfrak{W} = \frac{\alpha}{3}(v_1 l_1 \mathfrak{N}_1 + u_2 l_2 \mathfrak{N}_2 + \ldots)\frac{\partial T}{\partial x}. \tag{6}$$

Es ist dabei $\mathfrak{W}$ nach Energiemaass (d. h. mechanisch, nicht nach g-Cal.) gemessen. Die (mechanisch gemessene) Wärmeleitfähigkeit k des Körpers ist also[1]):

$$k = \tfrac{1}{3}\alpha(u_1 l_1 \mathfrak{N}_1 + u_2 l_2 \mathfrak{N}_2 + \ldots). \tag{7}$$

Da die Anzahl $\mathfrak{N}$ der Kerne jeder Gattung im ganzen Körper constant, d. h. von der Temperatur unabhängig ist, so tritt also auch bei dem Vorgange des Temperaturausgleiches durch jeden Querschnitt eine gleiche Anzahl von Kernen irgend einer Gattung von rechts und links ein, d. h. es findet wohl ein Energiefluss durch den Querschnitt hindurch statt, weil die Kerne bei ihren Stössen ihre kinetischen Energien auszugleichen suchen, *aber kein elektrischer Strom. In einem solchen Körper bildet sich daher auch kein Potentialgefälle aus durch sein Temperaturgefälle.*

Die mittlere freie Weglänge l_1 für die Kerne der Gattung 1 ist nach Boltzmann[2]), falls nur zwei Gattungen Kerne vorhanden sind:

$$l_1 = \frac{1}{\pi\left(s_1^2 \mathfrak{N}_1 \sqrt{2} + s_{12}^2 \mathfrak{N}_2 \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1}}\right)}, \tag{8}$$

falls s_1 den Radius der Stosskugel beim gegenseitigen Stosse zweier Kerne der Gattung 1, s_{12} den Radius der Stosskugel beim Stosse eines Kernes 1 auf einen Kern 2 bezeichnet. Die Radien der Stosskugeln können etwas mit der Temperatur variiren, indem sie mit Wachsen der Temperatur wegen den grösseren Geschwindigkeiten u der Kerne kleiner werden. — Indess würde die Formel (8) hier nur verwendbar sein, wenn die Kerne durch die ponderabeln Atome des Körpers in ihrer Bewegung gar nicht beeinflusst würden. Wir wollen daher

1) Der Factor von α muss nach strengerer Berechnung 0,35 sein, vgl. darüber L. Boltzmann, Gastheorie I. p. 79.

2) L. Boltzmann, Gastheorie I. p. 70.

die Formel (8) nicht benutzen, und sehen l_1 als eine Temperaturfunction an, deren Wert wir von vornherein nicht bestimmen können.

4. Elektrische Leitfähigkeit.

Innerhalb der Zeit zwischen zwei Stössen gilt für ein Elektron die Lagrange'sche Bewegungsgleichung:

$$m_1 \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial t^2} = e_1 X, \tag{9}$$

falls eine pro Einheit der Elektricitätsmenge wirkende elektrische Kraft X vorhanden ist (elektrostatisch gemessen), und falls ξ den in Richtung von X zurückgelegten Weg des Elektrons bezeichnet. Bezeichnet man die Zeit zwischen zwei Zusammenstössen mit τ_1, so ist

$$u_1 \tau_1 = l_1, \tag{10}$$

und nach (9):

$$m_1 \xi_1 = \tfrac{1}{2} e_1 X \tau_1^2 + a \tau_1 + b. \tag{11}$$

Bei Wirkung einer Kraft X in einem beliebig langen Zeitraum fliegt also der Kern im Mittel so, als ob zu seiner unregelmässigen Geschwindigkeit u_1 dazu käme eine dauernde x-Componenten seiner Geschwindigkeit, welche ist:

$$u_x = \tfrac{1}{2} e_1 X \frac{\tau_1}{m_1}. \tag{12}$$

Denn der Kern legt nach (11) innerhalb der Stosszeit τ_1 den Weg $\tau_1 . u_x$ unter Wirkung der Kraft X zurück, innerhalb einer beliebig langen Zeit t den Weg $t . u_x$.

Nach (10) kann man nun in (12) setzen:

$$u_x = \tfrac{1}{2} e_1 X \frac{l_1}{m_1 u_1} = \tfrac{1}{2} e_1 X \frac{l_1 u_1}{m_1 u_1^2}.$$

Unter Rücksicht auf die Gleichungen (1) wird daher

$$u_x = e_1 X \frac{l_1 u_1}{4 \alpha T}. \tag{13}$$

Den Factor von $e_1 X$ wollen wir mit v_1 bezeichnen. Es ist diejenige Translationsgeschwindigkeit, welche der Kern annimmt, falls dauernd auf ihn die Kraft von einer Dyne wirkt.

v_1 kann man die Beweglichkeit des Kernes 1 nennen. Nach (13) ist diese Grösse

$$v_1 = \frac{l_1 u_1}{4 \alpha T}. \tag{14}$$

In der Zeiteinheit treten durch die Querschnittseinheit daher $e_1 X v_1 \mathfrak{N}_1$ Kerne der Gattung 1 hindurch. Da jeder Kern die Ladung e_1 trägt, so ist die durch die Bewegung der Kerne der Gattung 1 durch die Querschnittseinheit in der Zeiteinheit hindurchtransportirte Elektricitätsmenge, d. h. Stromdichte:

$$j_1 = e_1^2 \mathfrak{N}_1 v_1 X. \tag{15}$$

Falls beliebig viele Kerngattungen vorhanden sind, so ist die Stromdichte:

$$j = (e_1^2 \mathfrak{N}_1 v_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 v_2 + \ldots) X. \tag{16}$$

Der Factor von X hat die Bedeutung der nach elektrostatischem Maass gemessenen *Leitfähigkeit* σ des Körpers. Dieselbe ist also:

$$\sigma = e_1^2 \mathfrak{N}_1 v_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 v_2 + \ldots \tag{17}$$

oder nach (14):

$$\sigma = \frac{1}{4 \alpha T} \left\{ e_1^2 \mathfrak{N}_1 l_1 u_1 + e_2^2 \mathfrak{N}_2 l_2 u_2 + \ldots \right\}. \tag{18}$$

Da bei den reinen Metallen σ umgekehrt proportional zu T ist (nach der Beobachtung), so werden wir die Grössen $\mathfrak{N}_1 l_1 u_1$, $\mathfrak{N}_2 l_2 u_2$ ... *bei diesen als nahezu unabhängig von der Temperatur anzusehen haben.* Es kann aber auch eintreten, dass nur eine dieser Grössen, z. B. $\mathfrak{N}_1 l_1 u_1$, allein nahezu von T unabhängig ist, nämlich wenn sie den bei weitem stärksten Anteil an der Leitfähigkeit σ liefert. Aus dem optischen Verhalten der Metalle folgt in der That, wenn man nur die Existenz von zwei Kerngattungen annimmt, dass bei den meisten Metallen die Leitfähigkeit einer Kerngattung bei weitem die der anderen überwiegt.

Nach der Formel (17) ist verständlich, dass die Leitfähigkeit einer Legirung sich annähernd nach der Mischungsregel aus den Leitfähigkeiten der Componenten berechnen wird, wenn dieselben ihre normale Anzahl $\mathfrak{N}$ freier Kerne in der Legirung behalten. Die abnorme Widerstandszunahme von Kupfer bei kleinen Zusätzen von Phosphor oder Arsen scheint darauf hinzudeuten, dass in diesen Fällen die Anzahl $\mathfrak{N}$ freier Kerne (mindestens bei der Kerngattung, welche den wesentlichsten Anteil zur Leitfähigkeit

des reinen Metalles liefert) zurückgegangen ist, d. h., wenn man an analoge Vorgänge bei den Elektrolyten denkt, *durch einen Rückgang der Dissociation des Körpers.*

5. **Das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeit zur elektrischen Leitfähigkeit.**

Durch Division der beiden Gleichungen (7) und (17) folgt:

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{4}{3}\,\alpha^2\,T\,\frac{u_1\,l_1\,\mathfrak{N}_1 + u_2\,l_2\,\mathfrak{N}_2 + \ldots}{e_1^2\,u_1\,l_1\,\mathfrak{N}_1 + e_2^2\,u_2\,l_2\,\mathfrak{N}_2 + \ldots}\,. \tag{19}$$

Sind nur einfache Kerne vorhanden, deren Ladung $\pm\,e$ ist, so folgt:

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T, \tag{20}$$

d. h. es folgt das W*iedemann-Franz'sche Gesetz, dass das Verhältnis beider Leitfähigkeiten eine universelle Constante ist. Dieselbe ist proportional der absoluten Temperatur.*

Nun ist für Silber[1]) bei 18° C. die auf g-Cal. berechnete Wärmeleitfähigkeit nach absolutem Maass: 1,005. Da 1 g-Cal. = $419\,.\,10^5$ absolute mechanische Energie (C.G.S.-Maass) ist, so ist für Kupfer bei 18° C.

$$k = 421\,.\,10^5.$$

Die absolute elektromagnetisch gemessene Leitfähigkeit dieses Silberstabes bei 18° C. betrug $61{,}4\,.\,10^{-5}$. Die elektrostatisch gemessene Leitfähigkeit wird erhalten, wenn man diese Zahl mit dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit, d. h. der Zahl $9\,.\,10^{20}$ multiplicirt. Also ist für dieses Silber:

$$\sigma = 553\,.\,10^{16}.$$

Folglich ergiebt sich, da $T = 273 + 18 = 291$ ist, nach (20):

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{421}{553}\,.\,10^{-10} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}^2\right).\,291 = 0{,}760\,.\,10^{-10}, \tag{21}$$

d. h.

$$\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 = 1{,}95\,.\,10^{-13},$$

$$\frac{\alpha}{e} = 4{,}42\,.\,10^{-7}\,. \tag{22}$$

Nimmt man nun für das Elementarquantum e der Elektricität die von J. J. Thomson[2]) gefundene Zahlen, $e = 6\,.\,10^{-10}$,

1) W. Jaeger und H. Diesselhorst, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin **38.** 1899.

2) J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) **46.** p. 528. 1898.

welche auch mit den aus der Elektrolyse erhaltenen Daten[1]) nahezu übereinstimmt, so würde folgen für α der Wert

(23) $$\alpha = 26{,}5 \,.\, 10^{-17}.$$

Diese Zahl stimmt der Grössenordnung nach gut überein mit dem oben Gleichung (4) aus den Gasgesetzen und der Loschmidt'schen Zahl $\mathfrak{N}$ erhaltenen Werte $\alpha = 5{,}6 \,.\, 10^{-17}$. Mit Hülfe des Wertes (23) kann man die Loschmidt'sche Zahl $\mathfrak{N}$ genauer bestimmen (anstatt unserer Annahme $\mathfrak{N} = 10^{20}$) zu

(24) $$\mathfrak{N} = 0{,}21 \,.\, 10^{20}.$$

Der Grössenordnung nach kann also das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeit zur elektrischen Leitfähigkeit berechnet werden aus den Gasgesetzen, und den bisher bekannten Werten der Loschmidt'schen Zahl und des Elementarquantums der Elektricität.

Auch der zweite Teil des in (20) ausgesprochenen Gesetzes, dass k/σ proportional mit T sein solle, wird durch die Beobachtung teilweise gut bestätigt. Jaeger und Diesselhorst haben k/σ für 18° und 100° C. bei mehreren Metallen gemessen. Folgende Tabelle enthält die Beobachtungsresultate.

Metall	$(k/\sigma)_{18^0} . 10^{10}$	$(k/\sigma)_{100^0} . 10^{10}$	$(k/\sigma)_{100^0} : (k/\sigma)_{18^0}$
Aluminium	0,706	0,937	1,32
Kupfer II	0,738	0,957	1,30
Kupfer III	0,745	0,967	1,30
Silber	0,760	0,978	1,28
Gold	0,807	1,027	1,27
Nickel	0,776	1,006	1,30
Zink	0,745	0,962	1,29
Cadmium	0,784	1,005	1,28
Blei	0,794	1,035	1,31
Zinn	0,816	1,024	1,26
Platin	0,836	1,124	1,35
Palladium	0,837	1,129	1,35
Eisen I	0,890	1,178	1,32
Eisen II	0,930	1,237	1,33
Stahl	1,015	—	—
Wismut	1,068	1,195	1,12
Rotguss	0,840	1,060	1,26
Constantan	1,228	1,454	1,18

1) Vgl. F. Richarz, Wied. Ann. 52. p. 397. 1894

Die annähernde Bestätigung des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes lässt uns schliessen, *dass in Metallen nur einfache Kerne vorhanden sind. Mit dieser Annahme soll weiter gerechnet werden.*[1] Die Ausnahmen von dem Gesetz der Constanz von k/σ lassen sich durch Polymerisationen der Kerne nicht erklären, da nach (19) hierdurch k/σ kleiner ausfallen müssen, als es dem normalen Werte entspricht, während es bei Wismut, Constantna etc. viel grösser ist. Wir werden, um diese Ausnahmen vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz erklären zu können, jetzt die Annahme, welche in § 3 bei der Berechnung der Wärmeleitfähigkeit gemacht wurde, dass nämlich die Kernzahl von der Temperatur unabhängig ist, fallen lassen. In der That werden wir später bei Besprechung des Volta'schen Spannungsgesetzes und der Thermoelektricität der Metalle zeigen, *dass man in jedem Metall, mindestens bei einer Kerngattung, eine Abhängigkeit der Kernzahl von der Temperatur anzunehmen hat.*

Nach dem Gesetz (20) sollte sein

$$(k/\sigma)_{100} : (k/\sigma)_{18} = 1,280.$$

In der That wird dieser Zahlwert bei alle den Metallen gut bestätigt, für welche $(k/\sigma)_{18^0}$ *den in (21) angenommenen (normalen) Wert besitzt. Der Temperaturcoefficient von* k/σ *ist aber kleiner bei den Metallen, für welche die Abweichung vom Wiedemann-Franz'chen Gesetz besonders stark ist.*

Wir werden nun unsere Betrachtungen zu vervollständigen haben, indem wir zur Berechnung der Wärmeleitfähigkeit annehmen, dass die Kernzahl von der Temperatur abhängen kann.

6. Wärmeleitung, falls die Kernzahl von der Temperatur abhängig ist.

Die Temperatur soll mit wachsendem x zunehmen. Wenn auch $\mathfrak{N}_1$ von T, d. h. von x abhängig ist, so strömen, wie in der Diffusionstheorie[2]) gezeigt wird, die Anzahl

$$\mathfrak{A} = \frac{u_1\, l_1}{3}\, \frac{\partial\, \mathfrak{N}_1}{\partial\, x}, \tag{25}$$

1) Doppelkerne treffen wir erst bei den Elektrolyten, als an zweiwertige Ionen gebundene Kerne.

2) Vgl. z. B. L. Boltzmann, Gastheorie I. p. 90.

Kerne der Gattung 1, durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit nach der negativen x-Richtung zu, falls keine andere Kraft weiter auf die Kerne wirken würde. Nun müssen aber im allgemeinen durch das Strömen der Elektronen die Enden des Stabes zu verschiedenem Potential geladen werden, nämlich immer dann, wenn durch den Querschnitt nicht gleich viel positive und negative Kerne beim Vorgang des Temperaturausgleiches treten. In diesen Fällen würde also, wie schon F. Kohlrausch[1]) angenommen hat, *mit dem Vorgang des Temperaturausgleiches ein elektrischer Strom verbunden sein*, wenn derselbe im Stabe ungehindert abfliessen könnte. Da nun aber in einem in isolirender Umgebung befindlichen Stabe, der nicht zu einem metallischen Ringe geschlossen ist, kein Strom fliessen kann, so muss der Stab sich derartig durch die Verteilung seiner Elektronen elektrisch laden, dass dadurch an irgend einer Stelle eine elektrische Kraft X entsteht, die es bewirkt, dass durch einen Querschnitt an jener Stelle gleich viel positive und negative Ladung hindurchtritt.

Wirkt nun also noch eine elektrische Kraft X nach der x-Axe, so würde nach p. 576 diese den Kernstrom der Gattung 1

$$\mathfrak{A}' = e_1 \, v_1 \, \mathfrak{N}_1 \, X \tag{26}$$

nach der positiven x-Richtung zu veranlassen. Die Anzahl der Kerne der Gattung 1, welche in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit nach der positiven x-Axe fliesst, würde also sein:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}' - \mathfrak{A} = e_1 \, v_1 \, \mathfrak{N}_1 \, X - \frac{u_1 \, l_1}{3} \frac{\partial \, \mathfrak{N}_1}{\partial \, x} \, . \tag{27}$$

Da jeder Kern die Wärmemenge $\alpha \, T$ mit sich führt, so wird der nach Gleichung (6) bestimmte Wärmestrom $\mathfrak{W}$ nach der negativen x-Axe vermehrt um den Bestandteil

$$\mathfrak{W}' = \alpha \, T \left\{ e_1 \, v_1 \, \mathfrak{N}_1 \, X - \frac{u_1 \, l_1}{3} \frac{\partial \, \mathfrak{N}_1}{\partial \, x} \right\} \tag{28}$$

nach der positiven x-Axe. Der von den Kernen der Gattung 1 vermittelte Wärmestrom $\mathfrak{W}_1$ nach der positiven x-Axe ist also:

$$\mathfrak{W}_1 = \mathfrak{W}' - \mathfrak{W} = \alpha \, T \left\{ e_1 \, v_1 \, \mathfrak{N}_1 \, X + \frac{u_1 \, l_1}{3} \frac{\partial \, \mathfrak{N}_1}{\partial \, x} \right\} - \frac{\alpha}{3} \, u_1 \, l_1 \, \mathfrak{N}_1 \, \frac{\partial \, T}{\partial \, x} \, .$$

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. **156.** p. 601. 1875.

Ersetzt man in dieser Gleichung $u_1\, l_1$ durch $4\, \alpha\, T v_1$ nach (14), so wird

$$\mathfrak{W}_1 = \alpha\, T . e_1\, v_1\, \mathfrak{N}_1\, X - \tfrac{4}{3}\, \alpha^2\, T v_1\, \frac{\partial (T\, \mathfrak{N}_1)}{\partial x}.$$

Bei beliebig vielen Kerngattungen ist also der Wärmestrom nach der positiven x-Axe:

$$(29) \quad \begin{cases} \mathfrak{W} = \alpha\, T X (e_1\, v_1\, \mathfrak{N}_1 + e_2\, v_2\, \mathfrak{N}_2 + \ldots) \\ \quad - \tfrac{4}{3}\, \alpha^2\, T \left[v_1\, \dfrac{\partial (T\, \mathfrak{N}_1)}{\partial x} + v_2\, \dfrac{\partial (T\, \mathfrak{N}_2)}{\partial x} + \ldots \right]. \end{cases}$$

Die Stromdichte nach der x-Axe ist:

$$j = e_1\, \mathfrak{A}_1 + e_2\, \mathfrak{A}_2 + \ldots$$

Da diese Null sein soll, so folgt nach (27), (16) und (14):

$$(30) \quad \sigma X = \tfrac{4}{3}\, \alpha\, T \left(e_1\, v_1\, \frac{\partial\, \mathfrak{N}_1}{\partial x} + e_2\, v_2\, \frac{\partial\, \mathfrak{N}_2}{\partial x} + \ldots \right),$$

d. h. die Stabenden laden sich infolge des Temperaturgefälles zu einer Potentialdifferenz, welche die elektrische Kraft hervorbringt:

$$(31) \quad X = \tfrac{4}{3}\, \alpha\, T\, \frac{e_1\, v_1\, \dfrac{\partial\, \mathfrak{N}_1}{\partial x} + e_2\, v_2\, \dfrac{\partial\, \mathfrak{N}_2}{\partial x} + \ldots}{e_1^2\, v_1\, \mathfrak{N}_1 + e_2^2\, v_2\, \mathfrak{N}_2 + \ldots}.$$

Nimmt man nur zwei Gattungen einfacher Kerne an. d. h. setzt man $e_1 = - e_2 = e$, so wird:

$$(32) \quad X = \tfrac{4}{3}\, \frac{\alpha}{e}\, T\, \frac{v_1\, \dfrac{\partial\, \mathfrak{N}_1}{\partial x} - v_2\, \dfrac{\partial\, \mathfrak{N}_2}{\partial x}}{v_1\, \mathfrak{N}_1 + v_2\, \mathfrak{N}_2}.$$

Setzt man diesen Wert in (29) ein, so ergiebt sich für den Wärmefluss:

$$(33) \quad \mathfrak{W} = - \tfrac{4}{3}\, \alpha^2\, T^2 \left\{ \frac{v_1\, \mathfrak{N}_1 + v_2\, \mathfrak{N}_2}{T}\, \frac{\partial\, T}{\partial x} + \frac{2\, v_1\, v_2}{v_1\, \mathfrak{N}_1 + v_2\, \mathfrak{N}_2}\, \frac{\partial_1 (\mathfrak{N}_1\, \mathfrak{N}_2)}{\partial x} \right\}.$$

Das zweite Glied in der Klammer hat eine anschauliche Bedeutung. Nach (27) und (31) ist nämlich die Anzahl der positiven Kerne, welche nach der x-Axe strömen:

$$\mathfrak{A}_1 = - \tfrac{4}{3}\, \alpha\, T\, \frac{v_1\, v_2}{v_1\, \mathfrak{N}_1 + v_2\, \mathfrak{N}_2}\, \frac{\partial (\mathfrak{N}_1\, \mathfrak{N}_2)}{\partial x},$$

eine gleiche Anzahl negativer Kerne strömt nach der x-Axe, jeder Kern trägt die Wärmemenge $\alpha\, T$; daher stellt das zweite Glied in der Klammer (33) den durch den Kernfluss bewirkten Wärmetransport dar.

Die Wärmeleitfähigkeit k ist also:

$$(34)\qquad k = \frac{4}{3}\alpha^3 T^2 \left\{\frac{v_1 \mathfrak{N}_1 + v_2 \mathfrak{N}_2}{T} + \frac{2 v_1 v_2}{v_1 \mathfrak{N}_1 + v_2 \mathfrak{N}_2} \frac{\partial (\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2)}{\partial T}\right\}.$$

Da für die elektrische Leitfähigkeit σ die Formel (17) gilt, welche hier für $e_1 = -e_2 = e$ ergiebt:

$$(35)\qquad \sigma = e^2 (\mathfrak{N}_1 v_1 + \mathfrak{N}_2 v_2),$$

so folgt für das Verhältnis beider Leitfähigkeiten:

$$(36)\qquad \frac{k}{\sigma} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T \left\{1 + \frac{2 v_1 v_2 T}{(\mathfrak{N}_1 v_1 + \mathfrak{N}_2 v_2)^2} \frac{\partial (\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2)}{\partial T}\right\}.$$

Der Vergleich dieser Formel mit der früheren Formel (20) ergiebt, dass *Ausnahmen vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz eintreten, sobald die Kernzahl von der Temperatur abhängt.* Diese Ausnahmen würden nicht eintreten können, wenn nicht mindestens *zwei* Gattungen beweglicher Kerne im Metall vorhanden wären. Denn wenn die Beweglichkeit v z. B. der einen Gattung Null wäre, so müsste, nach (36) das Wiedemann-Franz'sche Gesetz gelten. *Von vornherein läge es ja nahe*[1], *anzunehmen, dass nur die negativen Kerne im Metall frei beweglich wären, während die positiven an die ponderablen Atome des Metalles gebunden wären. Die Gleichung (36) lehrt, dass diese Annahme nicht zulässig ist für ein Metall, welches das Wiedemann-Franz'sche Gesetz nicht befolgt.* (Ausserdem lehren die galvano- und thermomagnetischen Effecte die Unzulässigkeit jener Annahme, wie im II. Teil näher ausgeführt werden wird.)

Nennt man die den einzelnen Kerngattungen zukommenden Leitfähigkeiten σ_1 und σ_2, d. h. setzt man:

$$(37)\qquad \sigma_1 = e^2 v_1 \mathfrak{N}_1, \quad \sigma_2 = e^2 v_2 \mathfrak{N}_2$$

so wird

$$(38)\qquad \frac{k}{\sigma} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T \left\{1 + \frac{2 \sigma_1 \sigma_2 T}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2}{\partial T}\right\}.$$

Wie nun weiter unten bei Behandlung der Potentialdifferenz bei Berührung zweier Metalle gezeigt werden wird, ist $\mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2$ eine universelle Function der Temperatur, d. h. vom Metall unabhängig. *Daher müssen die Abweichungen vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz um so grösser ausfallen, je mehr*

1) Aus den oben p. 571 angedeuteten Gründen (Kathodenstrahlen, Canalstrahlen, Metallionen in Elektrolyten).

die Leitfähigkeiten σ_1 und σ_2 der beiden Kerngattungen einander gleich werden. Dies wird nun in der That insofern bestätigt, als man aus dem optischen Verhalten eines Metalles wenigstens annähernd[1]) die beiden Leitfähigkeiten σ_1 und σ_2 bestimmen kann. Besonders klein fällt dies Verhältnis bei den gut leitenden Metallen Silber, Gold, Kupfer, auch Aluminium aus, dagegen besonders gross bei Stahl, Wismut, Antimon. Daher zeigen erstere Metalle (abgesehen von Aluminium) das normale Verhalten für k/σ, letztere dagegen einen merklich grösseren Wert für k/σ.[2]) Nach (38) würde folgen, dass die Abweichung vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz bei allen Metallen in einem Sinne erfolgt. Es ist dies nach den oben p. 578 herangezogenen Beobachtungen annähernd der Fall, nur Aluminium macht eine Ausnahme. — Die oben p. 577 angestellte Berechnung von α/e aus beobachteten k/σ ist nun nicht mehr streng, da die Formel (38) zu benutzen wäre an Stelle der einfacheren (20). Da aber dort Silber als Ausgangsmetall gewählt ist, und bei diesem $\sigma_1 : \sigma_2$ besonders klein ist, so ist die Correction für α/e nur unbedeutend.

Setzt man

$$T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2}{\partial T} = \varphi(T), \tag{39}$$

wobei $\varphi(T)$ eine universelle Function der Temperatur bedeutet, so wird nach (38):

$$\frac{k}{\sigma} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T \left\{1 + \frac{2\,\sigma_1\,\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}\,\varphi(T)\right\}. \tag{40}$$

Aus den (aus dem optischen Verhalten annähernd zu berechnenden) Verhältnis $\sigma_1 : \sigma_2$ der Einzelleitfähigkeiten und aus der Abweichung vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz ergiebt sich, dass etwa ist:

$$T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2}{\partial T} = \varphi(T) = 3\,. \tag{39'}$$

Wir werden später sehen (§ 8), dass man eine sehr einfache Deutung erhält, wenn man diese Gleichung als streng

---

1) Nämlich mit Vernachlässigung des optischen Einflusses der gebundenen Kerne. Vgl. darüber P. Drude, Physikal. Zeitschr. p. 161. 1900. — Nähere Ausführung soll im III. Teil folgen.

2) Numerische Berechnungen sollen im III. Teil folgen.

erfüllt ansieht.[1]) Thut man das (wir wollen alle Gleichungen, die unter Benutzung der Formel (39') abgeleitet sind. mit oberem Index' kennzeichnen), so erhält man

$$(40') \qquad \frac{k}{\sigma} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T\left\{1 + \frac{6\,\sigma_1\,\sigma_2}{(\sigma_1 + \sigma_2)^2}\right\},$$

d. h. *man kann aus der Abweichung eines Metalles vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz das Verhältnis der Leitfähigkeiten* $\sigma_1 : \sigma_2$ *seiner beiden Kerngattungen bestimmen.*

7. Der Thomsoneffect.

Wenn man einen elektrischen Strom durch ein Metall dem Temperaturgefälle entgegen, d. h. nach der positiven x-Axe, senden will, so muss die durch (31) oder (32) bestimmte thermoelektrische Gegenkraft[2]) überwunden werden. Denn wir haben vorhin gesehen, dass die Stromdichte Null ist, wenn die elektrische Kraft X den in (31) oder (32) bestimmten Wert hat. Durch Ueberwindung der thermoelektrischen Gegenkraft muss nun aber eine besondere Wärmetönung im Metalle entstehen.

Allgemein kann man sagen, dass in einem gleich temperirten Metall die Wärmemenge, welche in einem vom Strom i durchflossenen Volumenelement $q\,.\,d\,x$ entwickelt wird, gleich sein muss der Arbeit, welche die elektrische Kraft X beim Stromdurchgang leistet, d. h. gleich $i\,X\,d\,x\,.\,d\,t = j\,X\,q\,d\,x\,.\,d\,t$. Da $X\,d\,x = i : w$, falls w den Widerstand des Volumenelementes bedeutet (alles elektrostatisch gemessen), so ist diese vom Strom entwickelte Wärme gleich dem Joule'schen Werte. Diese Wärmeentwickelung wird nach der hier benutzten kinetischen Vorstellung sofort anschaulich erklärt, da die Kerne in der Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Zusammenstössen eine Beschleunigung durch die elektrische Kraft X erfahren (vgl. Gleichung (9) auf p. 575), und da sie den dadurch erlangten Ueberschuss an kinetischer Energie beim Zusammenstoss mit anderen Kernen bis auf den normalen Wert $\alpha\,T$ abgeben, falls die Temperatur T des Leiters dauernd constant gehalten wird.

Aus dieser Betrachtung geht nun aber auch hervor, dass der Strom i eine kleinere Wärmemenge, als $i^2\,w\,d\,t$, entwickelt,

---

1) Unten in § 10 ergiebt sich allerdings ein kleinerer Wert für φ.

2) Auch die Theorie von W. Voigt (Wied. Ann. 67. p. 717. 1899) ergiebt solche thermoelektrische Kräfte beim Temperaturgefälle.

falls er im Volumenelement einer elektromotorischen Gegenkraft X' entgegenläuft. Denn um die zur Ueberwindung von X' geleistete Arbeit: $X' dx . j . q . dt$ muss der Strom weniger kinetische Energie an die umgebenden Kerne beim Stossen abgeben, da die Gegenkraft X' die kinetische Energie der Kerne in der Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Zusammenstössen verringert. Eine solche Gegenkraft X' ist nun in einem ungleich temperirten Metall nach (31) oder (32) vorhanden. Sieht man also ab von der normalen Joule'schen Wärmeentwickelung, so würde im Volumenelement $q . dx$ vom Strom i eine besondere negative Wärmeentwickelung während der Zeit dt eintreten, welche den Wert hat (nach (31)):

$$(41)\qquad d Q = - i\, d t . \tfrac{4}{3}\, \alpha\, T d x \frac{e_1 v_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x} + e_2 v_2 \frac{\partial \mathfrak{N}_2}{\partial x} + \ldots}{e_1^2 v_1 \mathfrak{N}_1 + e_2^2 v_2 \mathfrak{N}_2 + \ldots}$$

Zu dieser Wärmetönung tritt nun aber ein zweiter Term hinzu. Der Strom i befördert in der Zeiteinheit

$$q \cdot (e_1 v_1 \mathfrak{N}_1 + e_2 v_2 \mathfrak{N}_2 + \ldots)(X - X')$$

Kerne, deren jeder die Energie αT besitzt, in das Volumenelement $q\, dx$ hinein. Hierin bezeichnet $X - X'$ die ganze, den Strom treibende elektrische Kraft an der Eintrittsstelle in das Volumenelement. Da nun $X - X' = j / \sigma$ ist, so wird in das Volumenelement $q . dx$ während des Zeitelementes dt die Wärmemenge:

$$d Q_1 = \alpha j q\, d t\, T \frac{e_1 v_1 \mathfrak{N}_1 + e_2 v_2 \mathfrak{N}_2 + \ldots}{e_1^2 v_1 \mathfrak{N}_1 + e_2^2 v_2 \mathfrak{N}_2 + \ldots}$$

hineingetragen. Aus dem Volumenelement wird eine Wärmemenge $d Q_2$ durch die Stromdichte j herausgetragen, welche ist:

$$d Q_2 = d Q_1 + \frac{\partial\, d Q_1}{\partial x} d x.$$

Es wird also im Volumenelement in der Zeit dt von der Stromdichte j die Wärme entwickelt:

$$d Q' = d Q_1 - d Q_2 = - \frac{\partial\, d Q_1}{\partial x} d x.$$

oder, da j von x nicht abhängt:

$$d Q' = - \alpha j q\, d t\, d x \frac{\partial}{\partial x} \left[T \frac{e_1 v_1 \mathfrak{N}_1 + e_2 v_2 \mathfrak{N}_2 + \ldots}{e_1^2 v_1 \mathfrak{N}_1 + e_2^2 v_2 \mathfrak{N}_2 + \ldots} \right].$$

Die ganze vom Strom $i = j q$ im Volumenelement entwickelte Wärmemenge ist also $dQ + dQ'$. *Kehrt sich die Stromrichtung um,* d. h. fliesst i im Sinne des Temperaturgefälles, *so kehrt sich das Vorzeichen von dQ und dQ' um.* Nennen wir diese in der Zeiteinheit vom Strom i im Volumenelement $q\,dx$ im ganzen entwickelte Wärmemenge (den Thomsoneffect) einfach Q, so wird:

$$(42)\quad \begin{cases} Q = +\,\alpha\, i\, dx \Big\{ \frac{4}{3} T \dfrac{e_1 v_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x} + e_2 v_2 \frac{\partial \mathfrak{N}_2}{\partial x} + \ldots}{e_1^2 v_1 \mathfrak{N}_1 + e_2^2 v_2 \mathfrak{N}_2 + \ldots} \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial x}\left[T \dfrac{e_1 v_1 \mathfrak{N}_1 + e_2 v_2 \mathfrak{N}_2 + \ldots}{e_1^2 v_1 \mathfrak{N}_1 + e_2^2 v_2 \mathfrak{N}_2 + \ldots} \right] \Big\}, \end{cases}$$

oder, da $\partial \mathfrak{N}_1 / \partial x = \partial \mathfrak{N}_1 / \partial T . dT/dx$ ist, so folgt für den Thomsoneffect des im Sinne des Temperaturgefälles fliessenden Stromes zwei zwischen Stellen, deren Temperaturdifferenz dT ist:

$$(43)\quad \begin{cases} Q = \alpha\, i\, dT \Big\{ \frac{4}{3} T \dfrac{e_1 v_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial T} + e_2 v_2 \frac{\partial \mathfrak{N}_2}{\partial T} + \ldots}{e_1^2 v_1 \mathfrak{N}_1 + e_2^2 v_2 \mathfrak{N}_2 + \ldots} \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial T}\left[T \dfrac{e_1 v_1 \mathfrak{N}_1 + e_2 v_2 \mathfrak{N}_2 + \ldots}{e_1^2 v_1 \mathfrak{N}_1 + e_2^2 v_2 \mathfrak{N}_2 + \ldots} \right] \Big\}. \end{cases}$$

Nimmt man wiederum nur zwei einfache Kerngattungen an, und führt ihre Einzelleitfähigkeiten σ_1 und σ_2 nach (37) ein, so wird.

$$(44)\quad \begin{cases} Q = \dfrac{\alpha}{e}\, i\, dT \Big\{ \frac{4}{3} T \dfrac{\sigma_1 \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial T} - \sigma_2 \frac{\partial \log \mathfrak{N}_2}{\partial T}}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial T}\left[\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} T \right] \Big\}. \end{cases}$$

Die thermoelektrische Kraft X schreibt sich in diesem Falle nach (32):

$$(45)\quad X = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{e} T \frac{\sigma_1 \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial T} - \sigma_2 \frac{\partial \log \mathfrak{N}_2}{\partial T}}{\sigma_1 + \sigma_2} \cdot \frac{\partial T}{\partial x},$$

sodass der Thomsoneffect auch in der Form zu schreiben ist

$$(46)\quad Q = i\, dT \left\{ \frac{X}{\frac{\partial T}{\partial x}} + \frac{\alpha}{e} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} T \right) \right\}.$$

Bei allen Metallen, bei welchen die Leitfähigkeit σ_1 oder σ_2 der einen Kerngattung weit überragt die der anderen (nach p. 582 werden das diejenigen Metalle sein, welche keine starke Ausnahme vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz zeigen, d. h. die meisten reinen Metalle) kann man $\sigma_1 - \sigma_2 : \sigma_1 + \sigma_2 = \pm 1$ annähernd setzen, d. h. die Abhängigkeit dieses Terms von T vernachlässigen. Dann wird die Thomsonwärme nach (46):

$$Q = i\, d\, T \left\{ \frac{X}{\frac{\partial T}{\partial x}} + \frac{\alpha}{e} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right\}. \tag{47}$$

Unter Benutzung der Formel (39), welche man schreiben kann als:

$$\frac{\partial \log \mathfrak{N}_2}{d\, T} = \frac{\varphi(T)}{T} - \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial\, T}, \tag{48}$$

wird die thermoelektrische Kraft

$$X = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{e} \frac{\partial\, T}{\partial\, x} \left\{ T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial\, T} - \frac{\sigma_2\, \varphi(T)}{\sigma_1 + \sigma_2} \right\}, \tag{49}$$

und die Thomsonwärme:

$$Q = i\, d\, T \frac{\alpha}{e} \left\{ \frac{4}{3} T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial\, T} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2 (1 + \frac{4}{3} \varphi)}{\sigma_1 + \sigma_2} \right\}. \tag{50}$$

Die sogenannte specifische Wärme der Elektricität ist, also:

$$\varrho = \frac{\alpha}{e} \left\{ \frac{4}{3} T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial\, T} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2 (1 + \frac{4}{3} \varphi)}{\sigma_1 + \sigma_2} \right\}. \tag{51}$$

Benutzt man die Formel (39′) für $\varphi(T)$, so entsteht:

$$X = \frac{4}{3} \frac{\alpha}{e} \frac{\partial\, T}{\partial\, x} \left\{ T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial\, T} - \frac{3\, \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right\}, \tag{49′}$$

$$Q = i \frac{\alpha}{e} d\, T \left\{ \frac{4}{3} T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial\, T} + \frac{\sigma_1 - 5\, \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right\}, \tag{50′}$$

$$\varrho = \frac{\alpha}{e} \left\{ \frac{4}{3} T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial\, T} + \frac{\sigma_1 - 5\, \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right\}. \tag{51′}$$

Um die Grössenordnung der Thomsonwärme Q zu taxiren, nehmen wir an, dass

$$T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial\, T} \quad \text{und} \quad T \frac{\partial \log \mathfrak{N}_2}{\partial\, T}$$

beide von gleicher Grössenordnung sind, d. h. setzen beide nach (39′) gleich 1. Die Grössenordnung von Q ist dann $i\, \alpha / e\, d\, T$.

Drückt man die Stromstärke nach elektromagnetischem Maasse aus und nennt den Zahlwert i_m, so ist $i:i_m = c = 3.10^{10}$. Für $i_m = 1$ und $dT = 1^0$ C. ergiebt sich daher mit Benutzung des Wertes von α/e nach (22):

$$Q = 13 . 10^3 \text{ mechanische Einheiten,}$$

d. h.

$$Q = 3 . 10^{-4} \text{ g-Cal.}$$

In der That sind die stärksten Thomsoneffecte[1]) (z. B. bei Wismut) gleich $0{,}3 . 10^{-4}$, d. h. von unserer berechneten Grössenordnung.

Wie aus (47) hervorgeht, kann man die thermoelektrische Kraft X aus der Thomsonwärme berechnen, sobald man $\sigma_1 : \sigma_2$ kennt. Da dieses nach (40') aus der Abweichung vom Wiedemann-Franz'schen Gesetz erhalten werden kann, so bietet sich so eine Prüfung der Theorie, sobald man Q, X und k/σ in einem Metall beobachtet. Beobachtungen über die thermoelektrische Kraft X fehlen meines Wissens noch gänzlich; sie müssen möglich sein durch Anwendung einer elektrometrischen Methode. Schwierigkeiten würde es aber machen, den Einfluss des umgebenden Gases auf die Potentialdifferenz zwischen dem warmen und kalten Ende des Metalles zu eliminiren.

8. Contactpotentialdifferenz.

Bei der Temperatur T mögen zwei Stücke Metalle, a und b, einander ohne Zwischenlagerung fremder Substanzen berühren. Die Anzahl der Kerne der Gattung 1 im Metall a sei $\mathfrak{N}_1^a$, im Metall b sei sie $\mathfrak{N}_1^b$ etc.

Nun sind zwei principiell verschiedene Fälle möglich:

1. Es besteht ein wahrer Gleichgewichtszustand zwischen beiden Metallen. In diesem Falle müssen sie sich zu einer derartigen Potentialdifferenz laden, dass dadurch dem Diffusionsbestreben der einzelnen Kerngattungen ineinander, d. h. vom Metall a zum Metall b derartig das Gleichgewicht gehalten wird, dass die Kernzahl jeder Gattung in den beiden Metallen sich im Lauf der Zeit nicht ändert.

2. Es besteht nur ein falscher Gleichgewichtszustand zwischen den Metallen, indem allmählich die ponderabelen

1) Vgl. z. B. E. Riecke, Experimentalphysik 2. p. 325. 1896.

Atome beider Metalle vollständig ineinander diffundiren. In diesem Falle hätte die Potentialdifferenz zwischen beiden Metallen nur dafür zu sorgen, dass kein elektrischer Strom zu Stande kommt, d. h. dass durch die Grenzstelle gleichviel positive und negative Elektricität in der Zeiteinheit geht.

Wir wollen nur mit der Annahme 1 rechnen, da bei den gewöhnlichen Verhältnissen des Druckes und der Temperatur die Diffusion zweier Metalle ineinander jedenfalls so langsam erfolgt (wenn sie überhaupt erfolgt)[1]), dass wir sie ignoriren können.

Wir denken uns nun, wie es streng genommen jedenfalls sein wird, den Uebergang des Metalles a in das Metall b als dünne Uebergangsschicht, in welchem $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ etc. continuirlich, aber sehr schnell sich von den Werten $\mathfrak{N}_1^a$, $\mathfrak{N}_2^a$ etc. in die Werte $\mathfrak{N}_1^b$, $\mathfrak{N}_2^b$ etc. ändern. Ebenso sind die u, v, l continuirliche Functionen von x, wenn wir die x-Axe als die von a nach b gerichtete Normale der Grenzfläche wählen.

Nach der Diffusionsgleichung (25) würde nun an einer Stelle P der Uebergangsschicht, an welcher die Kerne der Gattung 1 die Geschwindigkeit u_1 und die freie Weglänge l_1 besitzen, die Anzahl

$$\mathfrak{A}_1 = -\frac{u_1 l_1}{3}\frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x}$$

von Kernen der Gattung 1 vom Metall a zum Metall b geben in der Zeiteinheit durch die Oberflächeneinheit, wenn keine anderen Kräfte auf die Kerne wirkten. Besteht aber infolge der Potentialdifferenz zwischen a und b eine elektrische Kraft X an der Stelle P, so wird diese für sich die Anzahl $e_1 v_1 \mathfrak{N}_1 X$ von Kernen der Gattung 1 in der Richtung von a nach b befördern, sodass die Anzahl von Kernen der Gattung 1, welche bei P strömt, den Wert hat:

$$\mathfrak{A}_1 = -\tfrac{1}{3} u_1 l_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x} + e_1 v_1 \mathfrak{N}_1 X. \tag{52}$$

Es wäre nun aber denkbar, dass noch eine dritte Kraft auf die Kerne wirkte. Denn wenn auch die Kerne am *homogenen* Metall frei beweglich sind, so könnten sie doch mit einer Kraft K_{ab} in der Uebergangsschicht von a nach b gezogen werden,

1) Bei soliden Metallstücken ist bisher eine Diffusion nicht beobachtet worden.

gerade wie bei der Berührung zweier Flüssigkeiten oder einer Flüssigkeit mit einem Gase die Molecüle eine Oberflächenspannung zu überwinden haben, infolge deren es auch nur eine endliche Dampfspannung giebt. In diesem Falle würde sich der Kernfluss A_1 schreiben als:

$$(53) \qquad \mathfrak{A}_1 = -\tfrac{1}{3} u_1 l_1 \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial x} + v_1 \mathfrak{N}_1 (e_1 X + K_{ab}).$$

Solche Oberflächenkräfte K_{ab} sind wahrscheinlich zu berücksichtigen, falls dass Körper b nicht ein Metall, sondern eine Flüssigkeit ist, gegen die das Metall eine Lösungstension zeigt (vgl. weiter unten). Vielleicht sind sie auch einzuführen, wenn man die Potentialdifferenz berechnen will, zu der sich ein Metall bei der Berührung mit dem umgebenden Gase ladet. Bei der Berührung zweier Metalle dagegen wollen wir solche Uebergangskräfte K_{ab} nicht einführen. Diese Annahme ist für Metalle einigermaassen plausibel. Sie vereinfacht die Betrachtungen erheblich, und wir wollen sehen, ob man dadurch mit den Beobachtungen nicht in Widerspruch kommt. Sollte das der Fall sein, so kann man leicht alle Gleichungen durch Einführung der Kräfte K_{ab} ergänzen.

Wenn wir nun also jetzt $K_{ab} = 0$ setzen, d. h. die Gleichung (52), anstatt (53) acceptiren, so muss für den Fall des wahren chemischen Gleichgewichtes $\mathfrak{A}_1 = 0$ sein. Man erhält also aus (52) unter Rücksicht auf (14):

$$(54) \qquad X = \tfrac{4}{3} \frac{\alpha T}{e_1} \frac{\partial \log \mathfrak{N}_1}{\partial x}.$$

Die Potentialdifferenz, zu der sich beide Metalle laden, ist also:

$$(55) \qquad V_a - V_b = \int_a^b X\, d x = \tfrac{4}{3} \frac{\alpha T}{e_1} \log \frac{\mathfrak{N}_1^b}{\mathfrak{N}_1^a}.$$

Da diese Betrachtung für jede einzelne Kerngattung gilt, so muss sein:

$$(56) \qquad \frac{1}{e_1} \log \frac{\mathfrak{N}_1^b}{\mathfrak{N}_1^a} = \frac{1}{e_2} \log \frac{\mathfrak{N}_2^b}{\mathfrak{N}_2^a} = \frac{1}{e_3} \log \frac{\mathfrak{N}_3^b}{\mathfrak{N}_3^a} \text{ etc.}$$

Haben wir nur zwei einfache Kerngattungen, und ist $e_1 = e$, $e_2 = -e$, so wird (56) zu:

$$(57) \qquad \log \frac{\mathfrak{N}_1^b \, \mathfrak{N}_2^b}{\mathfrak{N}_1^a \, \mathfrak{N}_2^a} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{N}_1 \, \mathfrak{N}_2 = \chi(T),$$

d. h. *das Product aus der Anzahl der freien positiven und negativen Kerne in der Volumeneinheit ist eine universelle Function der Temperatur.* Diesen Satz hatten wir ja schon oben an zwei Stellen zur Vereinfachung der zunächst erhaltenen allgemeinen Formeln benutzt. Der Satz würde aber nicht gelten, wenn die Anziehungskräfte K_{ab} nicht Null wären.

Wenn wir ausser einer Gattung einfacher positiver Kerne auch eine Gattung positiver Doppelkerne besässen, so würde nach (57) sein, wenn man $e_1 = e$, $e_3 = 2e$ setzt:

$$\log \left(\frac{\mathfrak{N}_1^b}{\mathfrak{N}_1^a}\right)^2 = \log \frac{\mathfrak{N}_3^b}{\mathfrak{N}_3^a},$$

d. h.

$$(58) \qquad \mathfrak{N}_1^2 : \mathfrak{N}_3 = \psi(T),$$

d. h. eine universelle Function der Temperatur. Man erkennt in den Gleichungen (57) und (58) die bekannte Form der Dissociations- oder Reactionsgesetze, wie sie aus dem Guldberg-Waage'schen Massegesetz sofort folgt. Bei der letzten Gleichung (58) haben wir z. B. den Vorgang einer Dissociation, weil ein Kern der Gattung 3 sich spaltet in zwei Kerne der Gattung 1. Daher muss nach den Dissociationsgesetzen $\mathfrak{N}_1^2 : \mathfrak{N}_3$ nur eine Function der Temperatur sein, d. h. von der Concentration, d. h. der besonderen Natur des Metalles, unabhängig. — Bei der Gleichung (57) handelt es sich um die Reaction, dass ein Kern der Gattung 1 und ein Kern der Gattung 2 sich zu einem elektrisch neutralen Ding vereinigen, oder sich einfach überhaupt neutralisiren. Da in unseren Gleichungen immer nur die Anzahl der Stellen mit freier elektrischer Ladung auftritt, so resultirt daher (57) aus den Dissociationsgesetzen.

Es liegt nun nahe, auch die zweite Folgerung der Dissociationstheorie, die van't Hoff'sche Gleichung [1]):

$$(59) \qquad r = {}^2/_3 \, \alpha \, T^2 \frac{\partial \log (\mathfrak{N}_1 \, \mathfrak{N}_2)}{\partial T}$$

1) Vgl. z. B. W. Nernst, Theoret. Chemie, 2. Aufl. p. 591. Die dort eingeführte Gasconstante R ist identisch mit unserem Werte ${}^2/_3 \, \alpha$, wie aus Formel (3) hervorgeht.

anzuwenden, bei welcher r die Reactionswärme bedeutet, die entsteht, wenn sich ein positiver und ein negativer Kern neutralisiren. Mit Annahme der Formel (39') entsteht:

$$(59') \qquad r = 2\,\alpha\,T,$$

d. h. die Reactionswärme ist einfach gleich der kinetischen Energie, welche die freien Kerne vor der Vereinigung besessen haben. Es ist dies sofort verständlich, wenn man der neutralen Aetherstelle, zu welcher sich beide Kerne vereinigt haben, keine äussere und innere kinetische Energie, und überhaupt keine Energie mehr zuschreibt. Der Vorgang ist dann so zu denken: Es kann eintreten, dass zwei Kerne (ein positiver und ein negativer) durch den Stoss auf andere Kerne oder auf ponderable Atome ihre ganze kinetische Energie eingebüsst, d. h. abgegeben haben. In diesem Falle folgen sie ihrer gegenseitigen elektrostatischen Anziehung und vereinigen sich zu einer neutralen Aetherstelle. Die numerischen Werte (39') und (59') möchte ich aber immerhin vorläufig nur als hypothetische hinstellen. Die genauere numerische Bestimmung der Functionen $\varphi(T)$ und r aus den Beobachtungen soll im II. Teil besprochen werden. Eine solche Bestimmung ist thatsächlich leicht möglich, wie dort gezeigt werden wird.

Um die Grössenordnung der zu erwartenden Contactpotentialdifferenz zu taxiren, setzen wir in (55):

$$\log \mathfrak{N}_1^b : \mathfrak{N}_1^a = 1.$$

Dann folgt:

$$V_a - V_b = \tfrac{4}{3}\frac{\alpha}{e}\,T = 5{,}9\,.\,10^{-7}\,.\,T,$$

wenn man den Wert von α/e nach (22) benutzt. Drückt man die Potentialdifferenz nach elektromagnetischem Maass aus, so ist diese Zahl mit 3.10^{10} zu multipliciren, drückt man sie in Volt aus, so ist sie nur mit 3.10^2 zu multipliciren. So ergiebt sich:

$$V_a - V_b = 18\,.\,10^{-5}\,.\,T.\ \text{Volt},$$

d. h. bei $T = 18^0$ C., d. h. $T = 291$:

$$V_a - V_b = 52.10^{-3} = 0{,}052\ \text{Volt}.$$

Wie man sofort aus (55) erkennt, ist das Volta'sche Spannungsgesetz erfüllt.

9. Thermoelektricität.

Die thermoelektrische Potentialdifferenz $V - V'$ zwischen zwei Enden eines Metallstabes, welche auf verschiedenen Temperaturen T und T' gehalten werden, ist allgemein sofort aus (31) zu berechnen als:

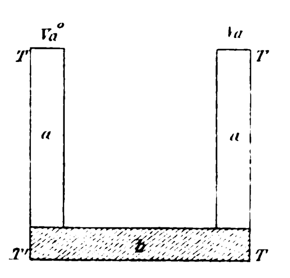
$$(60)\quad V - V' = \int_T^{T'} X\,d\,x = \tfrac{4}{3}\,\alpha \int_T^{T'} \frac{e_1 v_1 \frac{\partial N_1}{\partial T} + e_2 v_2 \frac{\partial N_2}{\partial T} + \dots}{e_1^2 v_1 \mathfrak{N}_1 + e_2^2 v_2 \mathfrak{N}_2 + \dots}\,T\,d\,T.$$

Nimmt man nur zwei Gattungen einfacher Kerne an, für die das Dissociationsgesetz (39) gilt, so folgt:

$$(61)\quad V - V' = \tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha}{e} \int_T^{T'} \left\{ T\,\frac{\partial \log N_1}{\partial T} - \frac{\sigma_2\,\varphi}{\sigma_1 + \sigma_2} \right\} d\,T,$$

wie auch aus (49) direct hervorgeht.

Wir wollen eine thermoelektrische (offene) Kette aus zwei Metallen, a und b, bilden durch folgende, aus der Figur ersichtliche Anordnung, sodass die offenen Enden der Kette aus gleichem Metall und von gleicher Temperatur sind. Die Contactpotentialdifferenz an der Berührungsstelle der Metalle a und b, welche die Temperatur T hat, ist nach (55), wenn wir die Anzahl der Kerne der Gattung 1 einfach als $\mathfrak{N}$ ohne Index bezeichnen, ihre Ladung als e:



$$(62)\quad V_a - V_b = \tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha\,T}{e} \log \frac{\mathfrak{N}^b}{\mathfrak{N}^a},$$

Die Potentialdifferenz zwischen den beiden Enden des Stabes b ist nach (61):

$$(63)\quad V_b - V_b' = \tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha}{e} \int_T^{T'} \left\{ T\,\frac{\partial \log \mathfrak{N}^b}{\partial T} - \frac{\sigma_2^b\,\varphi}{\sigma_1^b + \sigma_2^b} \right\} d\,T.$$

Die Potentialdifferenz an der Berührungsstelle der Metalle a und b, welche die Temperatur T' hat, ist:

$$(64)\qquad V_b' - V_a' = \tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha T'}{e}\log\frac{'\mathfrak{N}^a}{'\mathfrak{N}^b},$$

wenn mit $'\mathfrak{N}^a$, $'\mathfrak{N}^b$ die Anzahl der Kerne der Ladung e bei der Temperatur T' in beiden Metallen bezeichnet wird.

Die Potentialdifferenz zwischen den beiden Enden des Stabes a, in welchem ein Temperaturgefälle besteht, ist nach (61):

$$(65)\qquad V_a' - V_a^0 = \tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha}{e}\int\limits_{T'}^{T}\left\{T\,\frac{\partial \log \mathfrak{N}^a}{\partial T} - \frac{\sigma_2^a\,\varphi}{\sigma_1^a + \sigma_2^a}\right\} d\,T.$$

Durch Addition der letzten vier Gleichungen entsteht als Ausdruck für die Potentialdifferenz an den offenen Enden der Kette, d. h. für seine elektromotorische Kraft E:

$$(66)\qquad \begin{cases} E = V_a - V_a^0 = \tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha}{e}\Bigg\{T'\log\frac{'\mathfrak{N}^a}{'\mathfrak{N}^b} - T\log\frac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b} \\ \qquad - \displaystyle\int\limits_{T}^{T'} T\,\frac{\partial \log \frac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial T}\,d\,T \\ \qquad + \displaystyle\int\limits_{T}^{T'}\left[\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)_a - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)_b\right]\varphi(T)\,d\,T\Bigg\}. \end{cases}$$

Aus dieser Formel ergiebt sich, dass in einem, aus einem einzigen Metall gebildeten Kreise, welcher ein beliebiges, vielleicht sehr ungleichförmiges Temperaturgefälle besitzt, doch niemals ein Thermostrom zu stande kommt.[1])

Ein positives E bedeutet, dass der Thermostrom an der Lötstelle der Temperatur T' von a nach b fliesst, wenn die offenen Enden der Kette leitend verbunden werden.

Der letzte Term in (66) ist bei allen Metallen, in denen die Leitfähigkeit der einen Ionengattung die der anderen sehr überragt, sehr klein. Mindestens kann man wohl das Verhältnis $\sigma_1 : \sigma_2$ von der Temperatur als unabhängig ansehen, sodass, wenn man nach (39') und (59') φ als von T unabhängig ansieht, (66) übergeht in:

1) Vgl. über diesen Punkt Winkelmann's Handb. d. Physik **3.** (1) p. 302 (Autor F. Braun).

$$(67') \quad \left\{ \begin{aligned} E = \tfrac{4}{3}\frac{\alpha}{e}\Bigg\{ & T' \log \frac{'\mathfrak{N}^a}{'\mathfrak{N}^b} - T \log \frac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b} + \varphi\,(a\,b)\,(T' - T) \\ & - \int_T^{T'} T \frac{\partial \log \dfrac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial T}\, d\,T \Bigg\}. \end{aligned} \right.$$

Hierin bezeichnet

$$(68) \qquad (a\,b) = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)_a - \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}\right)_b,$$

eine bei den meisten Metallen kleine Zahl.

Wenn die Anzahl $\mathfrak{N}$ in beiden Metallen von der Temperatur unabhängig ist, so verschwindet das Integral in (67). Daher folgt:

$$(69) \qquad E = \tfrac{4}{3}\frac{\alpha}{e}\,(T' - T)\left[\log \frac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b} + (a\,b)\right].$$

Wenn also die Anzahl $\mathfrak{N}$ der Kerne einer bestimmten Gattung in beiden Metallen von der Temperatur unabhängig ist, so ist die thermoelektrische Potentialdifferenz proportional mit der Temperaturdifferenz der Lötstellen.

Im allgemeinen trifft diese Voraussetzung bei den Metallen nicht zu, eclatant bei allen denjenigen Metallcombinationen, für welche sich bei einer gewissen Temperatur T' bei festem T das Vorzeichen der thermoelektrischen Kraft umkehrt.

Bei genügend kleiner Temperaturdifferenz $T' - T = \vartheta$ kann man setzen:

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} T' \log \frac{'\mathfrak{N}^a}{'\mathfrak{N}^b} - T \log \frac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b} &= \vartheta \frac{\partial\, T \log \dfrac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial T} + \tfrac{1}{2}\,\vartheta^2 \frac{\partial^2\, T \log \dfrac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial T^2} \\ &= \vartheta \left\{ \log \frac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b} + T \frac{\partial \log \dfrac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial T} \right\} + \tfrac{1}{2}\,\vartheta^2 \left\{ 2 \frac{\partial \log \dfrac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial T} + T \frac{\partial^2 \log \dfrac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial T^2} \right\}, \end{aligned} \right.$$

und

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_T^{T'} T \frac{\partial \log \dfrac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial T}\, d\,T &= \vartheta \,.\, T \frac{\partial \log \dfrac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial T} + \tfrac{1}{2}\,\vartheta^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(T \frac{\partial \log \dfrac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial T} \right) \\ &= \vartheta\, T \frac{\partial \log \dfrac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial T} + \tfrac{1}{2}\,\vartheta^2 \left\{ \frac{\partial \log \dfrac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial T} + T \frac{\partial^2 \log \dfrac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial T^2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Daher wird bei genügend kleiner Temperaturdifferenz ϑ:

$$E = V_a - V_a^0 = \vartheta\, m + \tfrac{1}{2}\vartheta^2 n, \tag{72}$$

wobei ist:

$$\left\{\begin{aligned} m &= \tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha}{e}\left[\log\frac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b} + \varphi\,(a\,b)\right].\\ n &= \tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha}{e}\,\frac{\partial \log \dfrac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial\, T}. \end{aligned}\right. \tag{73}$$

E ist positiv gerechnet, wenn der Thermostrom an der wärmeren Lötstelle von a nach b fliesst. Die Coefficienten m und n sollen der *erste* und *zweite* thermoelektrische Coefficient genannt werden.

Die Differenz $\varrho_a - \varrho_b$ der specifischen Wärme der Elektricität bei der Temperatur T in beiden Metallen a und b ist nach (51):

$$\varrho_a - \varrho_b = \tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha}{e}\,T\,\frac{\partial \log \dfrac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial\, T} - \frac{\alpha}{e}\,(2 + \tfrac{1}{3}\varphi)\,(a\,b), \tag{74}$$

wobei $(a\,b)$ die Abkürzung (68) bedeutet. Setzt man $\varphi = 3$ nach (39'), so entsteht:

$$\varrho_a - \varrho_b = \tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha}{e}\,T\,\frac{\partial \log \dfrac{\mathfrak{N}^a}{\mathfrak{N}^b}}{\partial\, T} - \frac{\alpha}{e}\,6\,(a\,b). \tag{74'}$$

[Wenn man in (67), (69), (73) die Beziehung φ = const. nicht benutzen will, so ist der in jenen Gleichungen auftretende Factor φ zu ersetzen durch

$$\frac{1}{T' - T}\int\limits_T^{T'} \varphi\,(T)\,d\,T,$$

d. h. bei genügend kleinem ϑ durch: $\varphi + \frac{1}{2}\vartheta\,(\partial\,\varphi / \partial\,T)$. Diese Complication soll aber nicht weiter durchgeführt werden.]

Nach (74) hängt also die Differenz der specifischen Wärmen mit dem zweiten thermoelektrischen Coefficienten zusammen nach der Gleichung:

$$\varrho_a - \varrho_b = n\,T - (2 + \tfrac{1}{3}\varphi)\,\frac{\alpha}{e}\,(a\,b). \tag{75}$$

Die Thomson'sche Theorie [1]) der Thermoelektricität liefert einfach:

$$\varrho_a - \varrho_b = n\,T. \tag{76}$$

Die Differenz der hier dargelegten Theorie gegen die Thomson'sche ist innerlich begründet, da der Vorgang der Stromerzeugung durch eine Temperaturdifferenz nach der hier dargelegten Theorie nicht streng umkehrbar ist. Die Riecke'sche Theorie [2]) ergiebt ein anderes Vorzeichen für $\varrho_a - \varrho_b$. Riecke nimmt Blei als Metall b an. Dann ist $\varrho_b = 0$. Ferner ist nach Riecke die thermoelektrische Kraft positiv, wenn sie an der heisseren Lötstelle von b nach a fliesst. Wenn man E positiv rechnet in dem von mir hier festgesetzten Sinne, so würde daher aus der Riecke'schen Theorie folgen:

$$\varrho_a = -\,n\,T. \tag{77}$$

Riecke giebt nun selbst an, dass diese Gleichung nur bei Platin einigermaassen erfüllt sei. Immerhin wird sie besser erfüllt, als die Thomson'sche Gleichung (76).

Wir wollen an der Hand der von Riecke benutzten Zahlen [3]) die Grösse $(a\,b)$ für Combinationen mehrerer Metalle a mit Blei b berechnen auf Grund von (75) unter Benutzung des Zahlwertes für α/e nach (22). Riecke setzt die Thomsonwärme $R = \sigma\,.\,d\,T\,.\,i_m$, wobei R in Grammcalorien und i_m die elektromagnetisch gemessene Stromstärke ist. Da nach unserer Bezeichnung die Thomsonwärme Q mechanisch ge-

1) Von die Darstellung von F. Braun in Winkelmann's Handb. d. Phys. **3.** (1) p. 392. Die dortige Formel (6^e):

$$\sigma_1 - \sigma_2 = -\,T\,\frac{\partial^2 E}{\partial\,T^2}$$

ist identisch mit unserer Formel (76). Denn E ist dort positiv gerechnet, wenn der Thermostrom an der heissen Lötstelle vom Metall 2 zum Metall 1 fliesst.

2) E. Riecke, l. c. p. 388; Experimentalphysik **2.** p. 326.

3) Entnommen aus seiner Experimentalphysik **2.** p. 320 u. 325. Den Wert ϱ_a für Eisen habe ich Le Roux (Ann. de chim. et de phys. (4) **10.** p. 201. 1867) entnommen.

messen ist, so ist $Q = 419 \,.\, 10^5 \,.\, R$. Ferner ist $i = 3 \,.\, 10^{10} \,.\, i_m$, sodass unsere Gleichung (50):

$$Q = i\, d\, T \,.\, \varrho$$

übergeht in:

$$419 \,.\, 10^5\, R = 3 \,.\, 10^{10} \,.\, i_m \,.\, d\, T \,.\, \varrho\,;$$

daher die Riecke'sche Bezeichnung σ identisch mit:

$$\sigma = \varrho \,.\, \frac{3 \,.\, 10^{10}}{419 \,.\, 10^5}\,, \quad \text{d. h.} \quad \varrho = 1{,}4 \,.\, 10^{-3} \,.\, \sigma.$$

Ferner bezeichnet Riecke den zweiten thermoelektrischen Coefficienten, wenn man die elektromotorische Kraft elektromagnetisch misst und in dem Riecke'schen Sinne positiv rechnet, durch β. Es ist also $\beta = -3 \,.\, 10^{10} \,.\, n$ zu setzen. Folgende Tabelle enthält für einige Metalle nach den von Riecke benutzten Angaben die Zahlenwerte von ϱ_a und n, falls man die thermoelektrische Kraft des Metalles a gegen Blei misst:

Metall a	ϱ_a	n	$(2 + \frac{4}{3}\,\varphi)\,(a\,b)$ b-Blei
Cadmium	$+\,14{,}2 \,.\, 10^{-9}$	$-\,1{,}43 \,.\, 10^{-10}$	$-\,0{,}121$
Zink	5,02	$-\,0{,}80$	$-\,0{,}060$
Silber	2,51	$-\,0{,}50$	$-\,0{,}037$
Kupfer	0,84	$-\,0{,}32$	$-\,0{,}023$
Blei	0,0	0,0	0,0
Zinn	$-\,0{,}056$	$-\,0{,}18$	$-\,0{,}009$
Aluminium	$-\,0{,}056$	$-\,0{,}13$	$-\,0{,}009$
Platin	$-\,8{,}36$	$+\,0{,}3$	$+\,0{,}037$
Eisen	$-\,14{,}2$	$+\,1{,}62$	$+\,0{,}130$

Diese Zahlen für $(2 + \frac{4}{3}\,\varphi)\,(a\,b)$ dürften noch recht fehlerhaft sein, weil ϱ und n an *demselben* Material bestimmt sein müssen, was hier nicht der Fall ist. Immerhin zeigen sie, dass die oben p. 594 ausgesprochene Vermutung bestätigt ist, dass $(a\,b)$ eine kleine Zahl ist. Für Wismut, Selen, Tellur, Antimon, für welche $(a\,b)$ jedenfalls grössere Werte hat, liegen keine Bestimmungen gleichzeitig für ϱ und n vor.

10. Peltiereffect.

Nach den oben auf p. 584 angestellten Ueberlegungen muss ein Strom i, welcher die Grenzfläche zweier, auf gleicher

Temperatur gehaltener Metalle a, b in der Richtung von a zu b passirt, in der Zeiteinheit die Wärmemenge entwickeln:

$$W = i(V_a - V_b) = \frac{1}{3} \frac{\alpha T}{e} \log \frac{\mathfrak{N}^b}{\mathfrak{N}^a} i \tag{78}$$

(nach Formel 55). $\mathfrak{N}^a$ bez. $\mathfrak{N}^b$ bezeichnet die in der Volumeneinheit des Metalles a oder b enthaltene Kernzahl irgend einer Gattung, deren Ladung e ist.

Diese Peltierwärme hängt mit dem ersten thermoelektrischen Coefficienten m nach (73) in der Weise zusammen, dass ist:

$$W = \left[-m + \frac{1}{3} \varphi \frac{\alpha}{e} (a\,b) \right] i\,T. \tag{79}$$

Wenn also $(a\,b)$ zu vernachlässigen ist, so folgt die Thomson'sche Formel:

$$W = -i\,T \frac{\partial E}{\partial T}. \tag{80}$$

Es hat nun Boltzmann[1]) darauf aufmerksom gemacht, dass diese Thomson'sche Formel wahrscheinlich durch die Complicationen, welche das Wärme- und Elektricitätsleitvermögen der Metalle hervorbringt, für keine Metallcombination streng erfüllt sein würde. In der That hat Jahn[2]) keine volle Bestätigung der Formel (80) erhalten. Aus den Jahn'schen Zahlen können wir den Term $\frac{1}{3}\varphi(a\,b)$ für mehrere Metallcombinationen berechnen (bei 0° C., beide Metalle waren auf 0° C. Temperatur gehalten, da die entwickelte Wärmemenge im Eiscalorimeter gemessen wurde).

Metalle	m	$W/i\,T$	$\frac{1}{3}\varphi(a\,b)$	$\log \mathfrak{N}^b/\mathfrak{N}^a$
Cu—Ag	$+0{,}71 \cdot 10^{-8}$	$-0{,}59 \cdot 10^{-8}$	$+0{,}0027$	$-0{,}010$
Cu—Fe	$+3{,}76 \cdot 10^{-8}$	$-4{,}50 \cdot 10^{-8}$	$-0{,}0168$	$-0{,}076$
Cu—Pt	$-0{,}47 \cdot 10^{-8}$	$+0{,}46 \cdot 10^{-8}$	$-0{,}0003$	$+0{,}008$
Cu—Zn	$+0{,}50 \cdot 10^{-8}$	$-0{,}83 \cdot 10^{-8}$	$-0{,}0075$	$-0{,}014$
Cu—Cd	$+0{,}88 \cdot 10^{-8}$	$-0{,}88 \cdot 10^{-8}$	$0{,}0$	$-0{,}015$
Cu—Ni	$-6{,}68 \cdot 10^{-8}$	$+6{,}20 \cdot 10^{-8}$	$-0{,}0110$	$+0{,}105$

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (2) **96.** p. 1258. 1887.

2) H. Jahn, Wied. Ann. **34.** p. 768. 1888.

Diese Bestimmungen der Terme $\frac{4}{3}\varphi(a\,b)$ sind viel zuverlässiger, als die oben aus dem Thomsoneffect und der thermoelektrischen Kraft gewonnenen, hauptsächlich weil Jahn bei denselben Materialstücken m und W bestimmt hat.

Wenn man die aus dem Thomsoneffect ermittelten Zahlen $(2 + \frac{4}{3}\varphi)(a\,b)$ combinirt mit den aus dem Peltiereffect ermittelten Zahlen $\frac{4}{3}\varphi.(a\,b)$, so müsste sich daraus φ und $(a\,b)$ ergeben. Denn est ist:

$$(a\,b) - (c\,b) = (a\,c).$$

So würde man z. B. für die Combination Cu—Ag aus dem Thomsoneffect nach der Tabelle auf p. 598 erhalten:

$$(2 + \tfrac{4}{3}\varphi)(\mathrm{Cu, Ag}) = -\,0{,}023 + 0{,}037 = +\,0{,}014,$$

während sich aus dem Peltiereffect ergiebt:

$$\tfrac{4}{3}\varphi\,(\mathrm{Cu, Ag}) = +\,0{,}0027.$$

Daraus ergiebt sich

$$\tfrac{2}{3}\varphi = 0{,}0027 : 0{,}0113 = 0{,}24 \quad \text{und} \quad (\mathrm{Cu, Ag}) = +\,0{,}0056.$$

Folgende Tabelle enthält die in dieser Weise aus mehreren Metallcombinationen berechneten Zahlen für $\frac{2}{3}\varphi$:

Metalle	Cu—Ag	Cu—Fe	Cu—Pt	Cu—Zn	Cu—Cd
$\frac{2}{3}\varphi$	+0,24	+0,12	+0,005	+1,15	0,00

Völlige Uebereinstimmung der Werte $\frac{2}{3}\varphi$ lässt sich bei der Mangelhaftigkeit der Beobachtungen (vgl. p. 598) nicht erwarten. Es stimmt aber wenigstens das Vorzeichen, und die numerischen Abweichungen sind nicht allzu erheblich. Im zweiten Teil wird gezeigt werden, *dass sich etwa derselbe numerisehe Wert von φ aus dem thermomagnetischen Effect ergiebt.*

Die Zahl $\log \mathfrak{N}^b / \mathfrak{N}^a$ ist nach der Formel (78) vermöge der Daten für $W : i\,T$ gewonnen. Man sieht, dass die Anzahl $\mathfrak{N}$ der freien Kerne pro Volumeneinheit sich in den verschiedenen Metallen nicht stark voneinander unterscheiden. Bei Antimon-Wismut wird dies Verhältnis $\mathfrak{N}^b : \mathfrak{N}^a$ stärker von 1 verschieden sein.

Aus dem Peltiereffect ergiebt sich die bequemste Bestimmung der Contactpotentialdifferenz verschiedener Metalle[1]), da nach (78) ist:

$$V_a - V_b = W/i = 300 \,.\, W/i \text{ Volt.}$$

Es würden daher bei der Temperatur 0° C. folgende Potentialdifferenzen bestehen:

Metalle	Potentialdifferenz
Cu—Ag	— 0,00048 Volt
Cu—Fe	— 0,00367
Cu—Pt	+ 0,00037
Cu—Zn	— 0,00068
Cu—Cd	— 0,00072
Cu—Ni	+ 0,00507

Diese Bestimmungen der Contactpotentialdifferenz basiren allerdings auf der oben p. 590 gemachten Annahme, dass beim Uebergang eines Kernes vom Metall *a* in das Metall *b* keine andere, als eine elektrische Arbeit geleistet wird, d. h. dass eine oben als K_{ab} bezeichnete Kraft nicht existirt. Diese Annahme ist aber um so plausibler, als sich, wie aus der vorletzten Tabelle hervorgeht, die Kernzahl in den verschiedenen Metallen als nur wenig voneinander verschieden ergiebt. Vor allem wird aber das Verschwinden von Kräften K_{ab} dadurch bewiesen, weil sonst Peltiereffecte eintreten könnten, auch wenn die Metallcombination gar keine thermoelektrische Kraft besässe, es würde also bei Vorhandensein von Kräften K_{ab} die Thomson'sche Gleichung (80) auch nicht annähernd erfüllt sein.

11. Potentialdifferenz zwischen zwei verschieden concentrirten Lösungen eines Elektrolyten.

Da in einem Elektrolyten die Elektronen an frei bewegliche Massen gebunden sind, d. h. als freie Kerne wirken, so

1) Vgl. E. Riecke, Experimentalphysik 2. p. 324. 1896. — Das von Riecke geäusserte Bedenken, dass der Thomsoneffect den Schluss unsicher macht, trifft hier nicht zu.

muss unsere Formel (32) auch für diesen Fall gelten, nach der die Potentialdifferenz ist:

$$(81)\qquad V_a - V_b = \int_a^b X\,d\,x = \tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha}{e}\,T \int_a^b \frac{v_1\,d\,\mathfrak{N}_1 - v_2\,d\,\mathfrak{N}_2}{v_1\,\mathfrak{N}_1 + v_2\,\mathfrak{N}_2}\,.$$

Diese Formel muss für einen Elektrolyten mit zwei einwertigen Ionen gelten. Bei ihm ist $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$ proportional der Concentration c des gelösten Stoffes. Daher liefert (81), da wir $v_1 : v_2$ annähernd als von der Concentration unabhängig ansehen können:

$$(82)\qquad V_a - V_b = \tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha}{e}\,T\,\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\log\frac{c_b}{c_a}\,.$$

Nach Nernst[1]) ist die pro g-Ion wirkende elektrostatische Potentialdifferenz

$$(83)\qquad P_a - P_b = R\,T\,\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\log\frac{c_b}{c_a}\,.$$

Dabei ist die Gasconstante R dadurch definirt, dass der osmotische Druck, falls 1 g-Ion in der Volumeneinheit enthalten ist, den Wert hat:

$$p = R\,T.$$

Nennt man $\mathfrak{N}$ die Anzahl thatsächlich vorhandener frei beweglicher Kerne, wenn 1 g-Ion in der Volumenheit enthalten ist, so ergiebt ein Vergleich mit unserer früheren Formel (3), welcher Vergleich gestattet ist, da der osmotische Druck sich aus den Gasgesetzen berechnet, dass zu setzen ist:

$$R = \tfrac{2}{3}\,\alpha\,\mathfrak{N}\,.$$

Die nach (83) bestimmte Potentialdifferenz soll pro g-Ion wirken. Da $\frac{1}{2}\mathfrak{N}$ positive und $\frac{1}{2}\mathfrak{N}$ negative Kerne, von denen jeder die Ladung e enthält, im g-Ion vorhanden sind, so wirkt also $P_a - P_b$ auf die positive Elektricitätsmenge $\frac{1}{2}e\,\mathfrak{N}$. Auf die Elektricitätsmenge 1 würde also nach Nernst wirken:

$$V_a - V_b = \frac{P_a - P_b}{\frac{1}{2}\,e\,\mathfrak{N}} = \frac{2\,R}{e\,\mathfrak{N}}\,T\,\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\log\frac{c_b}{c_a}\,.$$

Unter Benutzung der Relation für R geht dieser Ausdruck in unsere Formel (82) über. Die hier dargelegte Theorie gelangt also bei Elektrolyten zu den schon bewährten Formeln der

1) W. Nernst, Theoret. Chem., 2. Aufl., p. 659.

Nernst'schen Theorie.[1]) Man hätte auch oben p. 573 diesen Anschluss als Ausgang für die Berechnung der universellen Constanten α nehmen können.

12. Elektrolytische Thermoketten.

Wenn man als Quelle elektromotorischer Kraft nur den Potentialsprung (82) an der Grenzfläche des Concentrationssprunges annimmt, so erhält man die von Nernst[2]) dargelegte Theorie der elektrolytischen Thermoketten. Es ist nun aber zu berücksichtigen, dass nach (60) in einem Elektrolyten, in welchem ein Temperaturgefälle besteht, das Potentialgefälle auftritt:

$$(84) \qquad V - V' = \tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha}{e}\int\limits_{T}^{T'} \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\,\frac{\partial \log \mathfrak{N}}{\partial T}\,T\,d\,T,$$

da in einem aus gleichwertigen Ionen bestehenden Elektrolyten jederzeit $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2$ ist. Sieht man $v_1 : v_2$ als unabhängig von der Temperatur an, so entsteht:[3])

$$(85) \qquad V - V' = \tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha}{e}\cdot\frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2}\int\limits_{T}^{T'} \frac{\partial \log \mathfrak{N}}{\partial T}\,T\,d\,T.$$

Für Ketten vom „ersten Typus", d. h. solche Ketten, welche aus demselben Elektrolyten, aber von verschiedener Concentration, bestehen, heben sich diese beiden in jedem Elektrolyt wegen des Temperaturgefälles bestehenden Potentialdifferenzen gegenseitig auf, wenn man annimmt (was bei vollständig dissociirten Elektrolyten gestattet ist), dass die Concentration in der Lösung 1 bei einer beliebigen Temperatur

1) Auf dem von M. Planck (Wied. Ann. **40.** p. 561. 1890) eingeschlagenen Wege erhält man auch nach der hier dargelegten Theorie die Potentialdifferenz an der Grenze zweier verschiedener Elektrolyte.

2) W. Nernst, Zeitschr. f. physikal. Chem. **4.** p. 129. 1889.

3) Zu einem ähnlichen, aber allerdings nicht identischen Ausdruck gelangt A. H. Bucherer (Zur Theorie der Thermoelektricität der Elektrolyte und der Metalle, p. 9. Leipzig 1898). Auch seine Theorie der Thermoelektricität der Metalle (l. c. p. 15) hat mit der hier entwickelten Formel (69') Aehnlichkeit, wenn man den Dampfdruck des Metalles proportional der Kernzahl $\mathfrak{N}$ setzt.

zu der Concentration in der Lösung 2 bei derselben Temperatur in einem constanten Verhältnis steht. Denn dann ist $\partial \log \mathfrak{N} / \partial T$ für beide Lösungen gleich. In der That hat Duane[1]) für Ketten vom ersten Typus die einfache Nernst'sche Theorie vollkommen bestätigt gefunden.

Für Ketten vom zweiten Typus dagegen, die aus zwei Lösungen derselben Concentration, aber von zwei verschiedenen Elektrolyten bestehen, werden sich die Terme (85) nicht gegenseitig aufheben.

In der That wies Duane nach, dass bei Thermoketten vom zweiten Typus die an ihren Begrenzungen auftretenden, nach Planck zu berechnenden Potentialdifferenzen zur völligen Darstellung der Thermokraft nicht ausreichen. Aus den Experimenten ergab sich, dass die durch das Temperaturgefälle in den beiden Lösungen hervorgebrachten Thermokräfte (bei vollständig dissociirten Lösungen) der Temperaturdifferenz an den beiden Enden proportional und von der absoluten Concentration c der beiden Lösungen unabhängig seien. Letzteres ergiebt sich direct aus der Formel (85), da nur $\log \mathfrak{N}$, d. h. $\log c$ auftritt. Ersteres würde sich aus (85) ergeben, wenn innerhalb des benutzten Temperaturintervalles

$$\frac{\partial \log \mathfrak{N}}{\partial T} = \frac{\text{const.}}{T},$$

d. h.

$$\mathfrak{N} = a \, . \, T^b \tag{86}$$

gesetzt werden kann.[2])

13. Potentialdifferenz von Metallen gegen Elektrolyte.

Ein Metall tauche in eine wässerige Lösung, welche positive Metallionen und beliebig andere negative Ionen enthält. Zur Vereinfachung wollen wir annehmen, dass es sich nur um einwertige Ionen handele. Das Metall enthält freie und ge-

1) W. Duane, Wied. Ann. 65. p. 374. 1898.

2) Dass diese Formel bei einem vollständig dissociirten Elektrolyten abweichend von den Gasgesetzen sein kann, ist kein Widerspruch damit, dass für *isotherme* Processe die Gasgesetze gelten. Vgl. Bucherer, l. c. p. 6. — Ueber den Zusammenhang des Potentialgefälles in einem ungleich temperirten Elektrolyten mit dem Soret'schen Phänomen vgl. W. Nernst, Theoret. Chem. 2. Aufl. p. 677.

bundene positive Kerne, ihre Anzahl in der Volumeneinheit sei $\mathfrak{N}_1$ bez. $\mathfrak{N}'_1$. Die Lösung enthält nur an Masse gebundene Kerne (Ionen), die Anzahl der in der Volumeneinheit enthaltenen positiven (welche sämtlich Metallionen seien) sei $\mathfrak{N}'_2$. Wir denken uns in der sehr dünnen Uebergangsschicht zwischen Metall und Lösung die Anzahl $\mathfrak{N}$ der freien positiven Kerne und die Anzahl $\mathfrak{N}'$ der positiven Ionen stetig variirend von den Werten $\mathfrak{N}_1$ bis Null, bez. $\mathfrak{N}'_1$ bis $\mathfrak{N}'_2$. Auch die Beweglichkeiten v' der letzteren (d. h. die Geschwindigkeiten, welche sie annehmen, falls die Kraft von einer Dyne dauernd auf sie wirkt) wollen wir in der Uebergangsschicht als stetig voraussetzen. Im Metalle muss man $v'_1 = 0$ setzen, da in ihm die gebundenen Kerne keine Beweglichkeit besitzen, in der Lösung hat v' den aus den elektrolytischen Erscheinungen bekannten Wert v'_2 (Beweglichkeit dər Metallionen); in der Uebergangsschicht variire also v' stetig von Null bis v'_2.

Wenn sich nun zwischen Metall und Lösung eine Potentialdifferenz ausbildet, derzufolge die elektrische Kraft X an einer beliebigen Stelle P der Uebergangsschicht wirkt, so würde nach den Gleichungen (27) und (14) die Anzahl freier Kerne:

$$\mathfrak{A} = e\, v\, \mathfrak{N}\, X - \tfrac{1}{3}\, \alpha\, T v \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x} \tag{87}$$

durch die Querschnittseinheit in der Zeiteinheit von Metall zur Lösung gehen und die Anzahl:

$$\mathfrak{A}' = e\, v'\, \mathfrak{N}'\, X - \tfrac{1}{3}\, \alpha\, T v' \frac{\partial \mathfrak{N}'}{\partial x} \tag{88}$$

gebundener Kerne (Metallionen), falls die x-Axe positiv vom Metall zur Lösung gerechnet wird, und falls besondere Anziehungskräfte K_{ab} (vgl. oben p. 590) nicht eingeführt werden. Wir wollen sehen, zu welchen Folgerungen man ohne Einführung solcher Kräfte kommt.

Die Gleichungen (87), (88) sind aber auf Grund der Vorstellungen der kinetischen Theorie, d. h. völlig frei beweglicher Kerne, abgeleitet, nach der die Beweglichkeit wohl eine Function des Ortes der Kerne sein kann, aber den einzelnen Kernen derselben Gattung nicht verschiedene Beweglichkeit specifisch anhaftet. Führen wir dagegen diese letztere Annahme für die gebundenen Kerne ein, um die starke Veränderlichkeit

der Beweglichkeit v' mit x zu erklären, so ist (88) umzuändern in:

$$\mathfrak{A}' = e\, v'\, \mathfrak{N}'\, X - \tfrac{1}{3}\, \alpha\, T\, \frac{\partial(\mathfrak{N}'\, v')}{\partial x}\,. \tag{89}$$

Ebenso wollen wir (87) umändern in:

$$\mathfrak{A} = e\, v\, \mathfrak{N}\, X - \tfrac{1}{3}\, \alpha\, T\, \frac{\partial(\mathfrak{N}\, v)}{\partial x}\,, \tag{90}$$

obwohl wir nicht wissen, in welcher Weise für die freien Kerne v variirt. Denn in der Lösung kommen sie nicht mehr vor.

Wir denken uns nun den Gleichgewichtszustand erreicht, der erst nach einer sehr kurzen Zeit nach dem Eintauchen des Metalles eintreten wird, während der eventuell etwas Metall in Lösung gegangen ist und so viel Metallionen gebildet hat, dass der Gleichgewichtszustand möglich geworden ist. Jedenfalls setzen wir voraus, dass ein solcher eingetreten sei, d. h. dass kein Metall weiter aufgelöst wird. Auch ein elektrischer Strom fliesst im Gleichgewichtsfall nicht. Die Bedingung des Gleichgewichtes braucht nun hier (im Gegensatz zu der oben p. 590 angestellten Betrachtung der Contactpotentialdifferenz zweier Metalle) nicht die zu sein, dass sowohl $\mathfrak{A}$ als $\mathfrak{A}'$ verschwindet, sondern es bedeutet auch Gleichgewicht, falls

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' = 0 \tag{91}$$

ist. In diesem Falle geht nämlich eine Anzahl $\mathfrak{A}$ freier positiver Kerne nach wachsendem x, eine gleiche Anzahl Ionen aber entgegengesetzt. Wenn diese ihre ponderable Metallmasse abgeben, und diese den freien Kernen $\mathfrak{A}$ nachwandert, mit denen sie sich zu Ionen verbindet, so ist der Endzustand genau derselbe, wie der Anfangszustand. Es hat nur ein Massenaustausch stattgefunden, was aber keinen Energiewert repräsentirt, da zunächst die Massĕ von ihren Kernen getrennt ist, aber sodann sich an andere Kerne angelagert hat. Die Gleichung (91) liefert daher:

$$e\,(v\,\mathfrak{N} + v'\,\mathfrak{N}')\, X = \tfrac{1}{3}\, \alpha\, T\, \frac{\partial(v\,\mathfrak{N} + v'\,\mathfrak{N}')}{\partial x}\,. \tag{92}$$

Wir nehmen nun nach ähnlichen Ueberlegungen, wie sie Planck[1]) angestellt hat, in der Uebergangsschicht, deren

1) M. Planck, Wied. Ann. **40**. p. 563. 1890.

Dicke d sei, ein constantes Gefälle der Grössen $v\mathfrak{N}$, $v'\mathfrak{N}'$ an, da dies dem stabilen Zustand entsprechen wird, und schreiben:

$$v\mathfrak{N} = v_1\mathfrak{N}_1\left(1 - \frac{x}{d}\right), \quad v'\mathfrak{N}' = v'_2\mathfrak{N}'_2 \cdot \frac{x}{d} \,. \tag{93}$$

In der That muss ja für $x = 0$ (im Metall) sein:

$$v\mathfrak{N} = v_1\mathfrak{N}_1, \quad v'\mathfrak{N}' = 0$$

und für $x = d$ (in der Lösung):

$$v\mathfrak{N} = 0, \quad v'\mathfrak{N}' = v'_2\mathfrak{N}'_2 \,.$$

Nach (92) ist daher:

$$X = \frac{4}{3}\frac{\alpha}{e}\,T\,\frac{v'_2\mathfrak{N}'_2 - v_1\mathfrak{N}_1}{v_1\mathfrak{N}_1 d + x(v'_2\mathfrak{N}'_2 - v_1\mathfrak{N}_1)} \,. \tag{94}$$

Daher wird die Potentialdifferenz zwischen Metall und Lösung:

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 X\,dx = \frac{4}{3}\frac{\alpha}{e}\,T\left\{\log\left[v_1\mathfrak{N}_1 d + x(v'_2\mathfrak{N}'_2 - v_1\mathfrak{N}_1)\right]\right\}_{x=0}^{x=d}$$

oder

$$V_2 - V_1 = \frac{4}{3}\frac{\alpha}{e}\,T\log\frac{v_1\mathfrak{N}_1}{v'_2\mathfrak{N}'_2} \,. \tag{95}$$

Von der Betrachtung der negativen Kerne ist hier ganz abgesehen, weil sie unnötig ist. Die Verteilung von positiven und negativen Ionen in der Lösung und die von freien positiven und negativen Kernen im Metall muss für den Gleichgewichtsfall derartig sein, dass auch die Betrachtung der negativen Ladungen zu dem Ausdruck (95) führen muss.

Wenn man diese Formel mit der Nernst'schen Formel[1]) (die dortige Formel gilt für zweiwertige Ionen, daher ist der Factor $^1/_2$ zugefügt)

$$P_2 - P_1 = \frac{R\,T}{2}\log\frac{P_1}{p_1} \tag{96}$$

vergleicht, worin p_1 den osmotischen Druck der Metallionen, P_1 die Lösungstension des Metalles bezeichnet, so erkennt

1) W. Nernst, Theoret. Chem. p. 664.

man, dass diese Lösungstension nach den hier dargelegten Anschauungen proportional ist:

$$(97) \qquad P_1 \sim \frac{v_1 \mathfrak{N}_1}{v_2'},$$

welche Gleichung anschaulich zu interpretiren ist. — Da nun

$$(98) \qquad v_1 \mathfrak{N}_1 = \frac{\sigma_1}{e^2}$$

ist, falls σ_1 die Leitfähigkeit der freien positiven Kerne des Metalles bedeutet, so muss also, da die Ionenbeweglichkeiten v_2' der verschiedenen Metalle in wässerigen Lösungen nicht sehr erheblich variiren, die Potentialdifferenz zwischen Metall und Lösung wesentlich durch die Leitfähigkeit der freien positiven Elektronen im Metall bestimmt werden, indem sie mit letzterer wächst. Dieser Satz wird insofern bestätigt, als Nernst edlen Metallen (auch Kupfer) kleine Lösungstensionen zuschreibt. dagegen unedlen Metallen (Zink) grosse Lösungstensionen. In der That ergiebt sich nun auch aus dem optischen Verhalten des Silbers, Goldes, Kupfers, dass bei diesen die Leitfähigkeiten der positiven Kerne sehr klein sind, während beim Zink und anderen unedlen Metallen sie verhältnismässig grösser wird.

Betrachten wir eine offene Zink-Kupfer-Kette in äquimolecularer Zinksalz- bez. Kupfersalzlösung, und setzt man an den Zinkstab (b) in der Luft wiederum einen Kupferstab, so würde nach (62) und (95) die Potentialdifferenz der offenen Kette sein:

$$(99) \qquad V_a - V_b = \sim \tfrac{4}{3}\,\frac{\alpha}{e}\,T \log \frac{v_b \cdot v_a'}{v_a \cdot v_b'}\,.$$

Hierin ist $V_a - V_b$ positiv, wenn der Strom bei geschlossener Kette im Draht vom Kupfer (a) zum Zink (b) geht. v_a, v_b bezeichnen die Beweglichkeiten der Kerne in beiden Metallen, v_a', v_b' die Beweglichkeiten der Metallionen in wässeriger Lösung. — Ich habe noch nicht die bisher bekannten Metalleigenschaften in der Weise zahlenmässig benutzen können, um die Gleichung (99) quantitativ zu prüfen. Ich möchte aber gleich hier bemerken, dass sie mir unwahrscheinlich erscheint. Denn wie wir oben (p. 592) sahen, entspricht der Factor $\frac{4}{3} \cdot \alpha / e\, T$ einer Potentialdifferenz von $^1/_{20}$ Volt. Damit also.

wie es beim Daniell beobachtet wird, $V_a - V_b$ den Wert von rund 1 Volt erreicht, müsste $v_b . v_a' / v_a . v_b'$ eine sehr grosse Zahl sein. Es ist aber nicht wahrscheinlich, dass die Beweglichkeiten der Elektronen in Kupfer und Zink sich derartig stark voneinander unterscheiden sollten.

Wenn sich, wie ich durchaus vermute, die Gleichung (99) nicht an der Hand der Erfahrung bestätigt, so ist wohl doch eine eigentliche specifische Lösungstension in die Rechnungen hier einzuführen, d. h. eine Kraft K_{ab} (vgl. oben p. 590), welche die positiven Metallionen vom Metall zur Lösung zieht. — Es sollte hier nur versucht werden, wie weit man ohne Einführung einer eigentlichen Lösungstension die Theorie durchführen kann, da man nur dann (vorläufig wenigstens) hoffen kann, die Potentialdifferenz zwischen Metall und Lösung aus anderen beobachteten Erscheinungen zu berechnen. Aber ich selbst halte diesen Versuch hier für nicht geglückt.

Wenn ein Strom die Grenzfläche zwischen Elektrolyt und Metall passirt, so müssen besondere Wärmetönungen eintreten, die dem Thomson'schen Satze (vgl. oben p. 599) nicht gehorchen. Dies ergiebt sich sowohl bei Einführung einer wirklichen Lösungstension des Metalles, als auch schon nach den hier dargelegten Erörterungen, da bei Stromdurchgang nach der Metallseite zu durch die Abgabe der Ladung der Metallionen Wärmetönungen auftreten werden. Diese Vorgänge brauchen aber zur Ableitung der Potentialdifferenz im Gleichgewichtsfalle nicht herangezogen werden, und daher wird die Thomson'sche Formel des Peltiereffectes im allgemeinen nicht bestätigt sein, wie auch Jahn[1]) fand.

14. Die scheinbare Masse der Elektronen.

Wir wollen uns denken, dass positive Kerne der Ladung e in constantem Abstand mit der Geschwindigkeit $\partial \xi / \partial t$ nach der positiven x-Axe strömen. Wenn $\mathfrak{N}'$ Kerne pro Längeneinheit vorhanden sind, so ist die (elektrostatisch gemessen) Stromstärke:

$$i = e \mathfrak{N}' \frac{\partial \xi}{\partial t} . \tag{100}$$

1) H. Jahn, Wied. Ann. 34. p. 784. 1888.

In dem Abstande d soll ein gleich starker, paralleler Rückstrom stattfinden. Dann ist die pro Längeneinheit wirkende Selbstinduction dieses Systems[1]):

$$L = 2 \log \frac{d^2}{\varrho R}, \tag{101}$$

wobei ϱ den Radius, d. h. die halbe Dicke der nach der x-Axe strömenden Elektronen bezeichnet, R den Radius des im Abstand d fliessenden Rückstromes. Dieser ist immer sehr gross im Vergleich von ϱ zu betrachten[2]), sodass man für L schreiben kann:

$$L = 2\left(\log \frac{d}{\varrho} + \log \frac{d}{R}\right) = 2 \log \frac{d}{\varrho}. \tag{102}$$

Wenn nun die Stromstärke, d. h. die Geschwindigkeit $\partial \xi / \partial t$ der Kerne geändert wird, so setzt eine Gegenkraft der Induction ein, welche, in elektromagnetischem Maasse gemessen, den Wert hat:

$$E_m = L \frac{\partial i_m}{\partial t}, \tag{103}$$

falls die Stromstärke i_m in elektromagnetischem Maasse gemessen ist. Da nun $i_m = i : c$, $E_m = E \,.\, c$ ist, falls $c = 3 \,.\, 10^{10}$ und die Inductionskraft E elektrostatisch gemessen wird, so folgt:

$$E = \frac{L}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t}. \tag{104}$$

$E\,i\,d\,t$ bezeichnet die Arbeit, welche man aufwenden muss, damit die Stromstärke i während der Zeit dt erhalten bleibt, d. h. die notwendig ist, damit sich die Kerne um die Strecke $d\xi$ nach der x-Axe verschieben. Setzt man diese Arbeit gleich $K'.\,d\xi$, so wird also:

$$K'\,d\xi = E\,i\,d\,t = i \frac{L}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t} d\,t. \tag{105}$$

Benutzt man nun für i den Wert nach (100), so wird:

$$K'\,d\xi = \frac{L}{c^2} e^2 \mathfrak{N}'^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} d\,\xi,$$

1) Vgl. P. Drude, Phys. d. Aethers p. 212, Formel (36).

2) Dies gilt selbst für Lichtwellen (vgl. weiter unten), da als Rückstromausdehnung der Querschnitt aufgesetzt werden muss, der überhaupt vom rückströmenden Kerne angefüllt ist, nicht etwa der Querschnitt einer einzelnen rückströmenden Linie von Kernen.

d. h. es ist:

$$K' = \frac{L}{c^2} e^2 \mathfrak{N}'^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \tag{106}$$

K' ist die mechanisch gemessene Kraft, welche die auf der Längeneinheit vorhandenen $\mathfrak{N}'$-Kerne beanspruchen, um ihnen eine Beschleunigung $\partial^2 \xi / \partial t^2$ zu erteilen. Jeder einzelne Kern beansprucht also die Kraft:

$$K = \frac{K'}{\mathfrak{N}'} = \frac{L}{c^2} e^2 \mathfrak{N}' \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \tag{107}$$

Wenn der Kern eine Masse m besässe, so müsste sein:

$$K = m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \tag{108}$$

es ist daher die scheinbare Masse m des Kernes:

$$m = \frac{e^2}{c^2} L \mathfrak{N}' = \frac{2 e^2}{c^2} \log \frac{d}{\varrho} \cdot \mathfrak{N}^{1/3}. \tag{109}$$

Hierbei bezeichnet $\mathfrak{N}$ die in der Volumeneinheit enthaltene Kernzahl.

Aus dieser Formel (109) ist ersichtlich, *dass die scheinbare Masse einer Kerngattung in verschiedenen Metallen nicht immer dieselbe ist, selbst wenn der Kernradius ϱ stets derselbe sein sollte. Denn die scheinbare Masse ist proportional mit der dritten Wurzel von $\mathfrak{N}$, d. h. der Kernconcentration. Diese ist aber in verschiedenen Metallen verschieden.*

Aber selbst in einem bestimmten Metall kann die scheinbare Masse je nach den Umständen streng genommen etwas variiren, indem die Distanz d des Rückstromes dadurch beeinflusst werden kann. Allerdings wird diese Veränderung der scheinbaren Masse m praktisch nicht merklich sein. Bei stationären Strömen und bei Kathodenstrahlen ist die Distanz d des Rückstromes als sehr gross gegen den Kernradius ϱ anzunehmen. Da nun in der Formel (109) der log des Verhältnisses d/ϱ auftritt, so wird die procentische Aenderung von m ganz unmerkbar sein, auch wenn sich d in bedeutender Weise ändert. Eine Aenderung von m gegenüber den bei Kathodenstrahlen erhaltenen Werten liesse sich für Lichtwellen vielleicht denken, da für sie der Rückstrom in der Distanz d gleich der halben Lichtwellenlänge erfolgt. Aber selbst in diesen Fällen wäre wohl eine merkliche Verkleinerung von m nur in denjenigen Metallen

zu erwarten, welche, wie Gold, Silber und vor allem Natrium und Kalium-Natrium einen sehr kleinen Brechungsindex besitzen, d. h. eine sehr kleine Lichtwellenlänge hervorbringen.

Legt man nämlich den bei Kathodenstrahlen erhaltenen Wert:[1])

(110) $$\frac{e}{m} = 1,86 . 10^7 . 3 . 10^{10} = 5,6 . 10^{17}$$

zu Grunde, so würde aus (109) für Kathodenstrahlen etwa folgen:

(111) $$\mathfrak{N}^{1/3} \log \frac{d}{\varrho} = 10^{12} .$$

Nimmt man nun, was allerdings durchaus willkürlich ist, die Kernzahl $\mathfrak{N}$ im luftverdünnten Raume der Hittorf'schen Röhre entsprechend den Gasgesetzen an, und nimmt für $\mathfrak{N}$ die Loschmidt'sche Zahl 10^{20} bei Atmosphärendruck, so würde, selbst wenn der Druck noch in der Hittorf'schen Röhre $^1/_{10}$ mm Quecksilber, d. h. etwa 10^{-5} Atm. betragen sollte, $\mathfrak{N}$ den Wert 10^{15}, d. h. $\log d/\varrho$ den Wert 10^7 besitzen. Wenn nun, wie es für Lichtwellen in Silber z. B. möglich wäre, d auf den 10^{-7}ten Teil reducirt wäre, im Vergleich zu den Experimenten mit Kathodenstrahlen, so würde dadurch $\log d/\varrho$ den Wert annehmen: $10^7 - 7 . \log 10$, d. h. der Wert der scheinbaren Masse der Kerne würde ganz unmerklich verkleinert sein, etwa im Verhältnis $2 : 10^6$.

Dagegen muss die scheinbare Masse m sehr viel kleiner werden für die bei Fehlen einer äusseren elektrischen Kraft bestehenden völlig ungeordneten Bewegung der Elektronen. Denn dann befinden sich die rückströmenden Elektronen in minimalen Distanzen der Grössenordnung $d = 1 : \mathfrak{N}^{1/3}$.

Daher können dann, da bei der ungeordneten Elektronenbewegung die Selbstinduction L der Kerne sehr klein wird, auch im Aussenraume (Luft) eines Metallstückes keine merklichen Inductionswirkungen entstehen, wenn seine Kerne von innen zur Oberfläche gelangen und von ihr, durch Kräfte K_{ab} (vgl. p. 590) beeinflusst, reflectirt werden, während nach neueren Auffassungen die Inductionswirkung bei Aufhalten einer ge-

1) W. Kaufmann, Wied. Ann. **62**. p. 598. 1897. — S. Simon, Wied. Ann. **69**. p. 611. 1899.

ordneten schnellen Bewegung von Elektronen (Aufprallen der Kathodenstrahlen auf die Antikathode) in der Erscheinung der Röntgenstrahlen [1]) zu Tage tritt.

Im folgenden II. Teil wird gezeigt werden, dass man sämtliche beobachteten galvano- und thermomagnetischen Effecte auf der hier benutzten Grundlage anschaulich erklären und berechnen kann ohne Zuhilfenahme neuer Hypothesen.

Leipzig, Februar 1900.

1) Hinsichtlich ihres Verhältnisses zu den Becquerelstrahlen scheint aus den Versuchen über ihre magnetische Ablenkbarkeit hervorzugehen, dass letztere wirklich frei fliegende Kerne sind, die die radioactiven Körper entsenden, während die Röntgenstrahlen lediglich in heftigen, aber kurzen Inductionsstössen bestehen, welche den Zusammenhang eines an ein Gasmolecül gebundenen positiven und negativen Kernes zerstören und daher das Gas leitend machen können.

(Eingegangen 22. Februar 1900).

12. *Ein elektrolytischer Unterbrecher für schwache Ströme; von A. v. Rzewuski.*

Bekanntlich functionirt der Wehneltunterbrecher erst bei höherer Spannung des Betriebsstromes gut, bei niedriger Spannung, z. B. mit 24 Volt und 1 mm langer activer Elektrode, lässt sich das Unterbrechungsphänomen überhaupt nicht erzielen. Der Grund, weshalb bei schwachen Strömen keine Unterbrechungen eintreten, wenigstens nicht mit einer solchen Geschwindigkeit, dass der Apparat Vorteile gegenüber den früher bekannten Unterbrechungsvorrichtungen bieten würde, ist im Vorgang an der activen Elektrode zu suchen. Ist in den Stromkreis von 12 Accumulatoren die Primärspule eines Inductoriums, ein Ampèremeter, ein Stromausschalter und in bekannter Weise der elektrolytische Unterbrecher mit 1 mm langer activer Elektrode geschaltet, so giebt im Momente, wo der Strom geschlossen wird, das Inductorium einen Funken, das Ampèremeter gleichzeitig einen Ausschlag. Es bildet sich momentan an der activen Elektrode eine Gasblase und das Ampèremeter geht beinahe auf Null zurück. Die Gasblase wird, dem schwachen, nunmehr durch den Apparat fliessenden Strom entsprechend, langsam grösser und steigt schliesslich auf. In diesem Moment giebt das Ampèremeter wieder einen grösseren Ausschlag und das Inductorium einen Funken, welcher aber erheblich schwächer ist als der im Momente, wo der Strom geschlossen wurde. Der an der activen Elektrode sich bildende Sauerstoff, der sofort nach Stromschluss die ganze active Elektrode einhüllt, verhindert fernerhin den Contact des Elektrolyten mit der Elektrode und deshalb kann die Stromstärke nicht mehr genügend anwachsen und damit der Unterbrechungsvorgang weiterhin eintreten. Die aufsteigende Gasblase reisst zwar von einem grossen Teil der Oberfläche der Elektrode alles Gas fort, aber der Vorgang ist zu wenig schnell, als dass eine exacte Unterbrechung des Stromes und damit eine entsprechende Wirkung auf ein Inductorium stattfinden könnte. —

Ist es richtig, dass der an der activen Elektrode sich bildende Sauerstoff verhindert, dass der elektrolytische Unterbrecher auch mit schwachen Strömen dauernd functionirt, dann muss jeder Vorgang, der der Ansammlung des Gases entgegenarbeitet, die Wirkung haben, dass der elektrolytische Unterbrecher auch mit schwachen Strömen thätig ist. *In der That bewirkt eine heftige Bewegung der activen Elektrode, dass das Unterbrechungsphänomen unter den eingangs erwähnten Verhältnissen sofort eintritt.* Viel besser jedoch lässt sich dasselbe erreichen, wenn man gegen die active Elektrode einen Strom verdünnter Säure fliessen lässt. Ein Glas- oder Hartgummirohr, das im Deckel des Apparates verschiebbar ist, wird zweimal rechtwinklig umgebogen, sodass an dasselbe eine Düse von ca. 0,75 mm Oeffnung gekittet werden kann. Die active Elektrode steht nach unten und genau darunter befindet sich dann (in variabler Entfernung) die Düse. Das die Düse tragende Rohr wird vermittelst eines Gummischlauches unter Zwischenschaltung eines Glashahnes mit einem grösseren Glasgefäss, das die verdünnte Säure enthält, verbunden und in diesem Gefäss wird etwa durch ein kleines Gummigebläse der Druck erhöht. Strömt nun die Säure gegen die active Elektrode, so erhält man einen Apparat, der mit nur 24 Volt den Strom äusserst exact unterbricht[1]), selbst wenn die active Elektrode nur wenige Zehntel Millimeter lang ist. Man kann auch den Druck der Säure einfach dadurch hervorbringen, dass man das Säuregefäss etwa 1 m hoch über dem Unterbrecher aufstellt, wenigstens genügt dieser Druck bei 24 Volt vollständig. Ist der Druck der Säure zu hoch, dann tritt scheinbar Kurzschluss ein, *der Apparat unterbricht nicht mehr*, deswegen ist der Säurestrom durch den Hahn sorgfältig zu reguliren, sodass der Unterbrecher einen möglichst hohen gleichmässigen klaren Ton aussendet. Mit dem Apparat lassen sich Geissler'sche, Crookes'sche und Spectralröhren stundenlang ohne Störung betreiben, ebenso gewöhnliche Röntgenröhren, der entsprechenden Funkenlänge, ganz vortrefflich bei 32 Volt.

---

1) Mit dem erwähnten 10 cm-Inductorium betrug bei $3^1/_2$ mm langer activer Elektrode die Funkenlänge 55 mm bei ca. 450 Unterbrechungen pro Secunde und $6^1/_2$ Amp. Stromstärke.

Selbstverständlich lassen sich nur kleine Inductorien auf die maximale Funkenlänge bringen, aber bei allen Apparaten wird die der niedrigen Spannung entsprechende Funkenlänge mit bedeutend kürzerer Elektrode erreicht und damit ist natürlich auch eine grosse Frequenz erzielt. Die Verwendung des Säurestromes ist nur so lange von Vorteil, als die Unterbrechungen *ohne* dieselbe *nicht* eintreten. Durch den Säurestrom wird neben den erwähnten Vorteilen stets eine recht annehmbare Kühlung des Apparates erreicht.

Davos, Privatlaboratorium, Februar 1900.

(Eingegangen 28. Februar 1900.)

13. *Elektromotorische Kraft des Clark- und Westonelementes; von W. Marek.*

Durch die gegenständlich maassgebenden Arbeiten der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin wurde die elektromotorische Kraft der beiden gegenwärtig zu Strom- und Spannungsmessungen ausschliesslich benutzten Normalelemente mit hoher Genauigkeit und Verlässlichkeit festgestellt. Zu dem im Jahre 1898 veröffentlichten Schlussresultate[1]) dieser Untersuchungen

Clarkelement: $E_t = 1{,}4328 - 11{,}9\,(t - 15)\,10^{-4} - 0{,}07\,(t - 15)^2\,10^{-4}$

Westonelement: $E_t = 1{,}0186 - 38{,}0\,(t - 15)\,10^{-6} - 0{,}65\,(t - 15)^2\,10^{-6}$

sind seither von keiner Seite beachtenswerte Nachträge, Commentare und Ergänzungen geliefert worden, und es erscheint wünschenswert, die obenstehenden Zahlen der Gleichförmigkeit halber bis auf bessere Belehrung allen elektrischen Arbeiten zu Grunde zu legen.

In Laboratorien, in denen Messungen mit Normalelementen laufend ausgeführt werden, ist die Berechnung der obenstehenden Gleichungen recht zeitraubend. Der Verfasser hat daher die nachstehenden zwei Tabellen berechnet, welche mit dem Argumente Temperatur[2]) die elektromotorische Kraft der beiden Normalelemente geben, und zwar mit einem möglichen grössten Fehler für das Clarkelement von $\pm$ 0,0065 Proc., für das Westonelement von $\pm$ 0,0053 Proc.

Eine grössere ziffernmässige Genauigkeit erschien mir im gegenwärtigen Zeitpunkte nicht unabweislich notwendig. Wenn auch die übliche „Compensation" scheinbar mit noch höherer Genauigkeit ausgeführt werden kann, so ist der Betrag der Constantenunsicherheit der Messbrückenwiderstände, der nicht eliminirbare Teil der Thermoströme, der Isolationsfehler und

1) Amtliche Veröffentlichung: Zeitschr. f. Instrumentenk. **19**. p. 212. 1899. Man vergleiche: K. Kahle, l. c. **18**. p. 230. 1898; W. Jaeger u. K. Kahle, l. c. **18**. p. 162. 1898.

2) Wasserstoffthermometerscala, nach welcher in Deutschland und Oesterreich alle Thermometer von den Behörden für Maass und Gewicht beglaubigt werden.

der Unsicherheit der Temperatur der Elemente, wohl nur in den ***seltensten*** Fällen in Summa auf ± 0,01 bis ± 0,02 Proc. herabzudrücken; in gewöhnlichen Laboratorien wird er auf ± 0,1, sogar auf ± 0,2 Proc. ansteigen.

Clarkelement.

Grad Celsius	Zehntel-Grade									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1,4491	4490	4489	4488	4487	4486	4485	4484	4483	4482
1	1,4481	4480	4479	4478	4477	4476	4475	4473	4472	4471
2	1,4470	4469	4468	4467	4466	4465	4464	4463	4462	4461
3	1,4460	4459	4458	4457	4456	4455	4454	4453	4452	4451
4	1,4450	4449	4448	4447	4446	4445	4444	4443	4442	4441
5	1,4440	4439	4438	4437	4436	4435	4433	4432	4431	4430
6	1,4429	4428	4427	4426	4425	4424	4423	4422	4420	4419
7	1,4418	4417	4416	4415	4414	4413	4412	4411	4410	4409
8	1,4407	4406	4405	4404	4403	4402	4401	4400	4399	4398
9	1,4397	4396	4394	4393	4392	4391	4390	4389	4388	4387
10	1,4386	4385	4383	4382	4381	4380	4379	4378	4377	4375
11	1,4374	4373	4372	4371	4370	4368	4367	4366	4365	4364
12	1,4363	4361	4360	4359	4358	4357	4356	4355	4353	4352
13	1,4351	4350	4349	4348	4346	4345	4344	4344	4342	4341
14	1,4340	4338	4337	4336	4335	4334	4333	4331	4330	4329
15	1,4328	4327	4326	4324	4323	4322	4321	4319	4318	4317
16	1,4316	4315	4313	4312	4311	4310	4308	4307	4306	4305
17	1,4304	4302	4301	4300	4299	4297	4296	4295	4294	4292
18	1,4291	4290	4289	4288	4286	4285	4284	4283	4281	4280
19	1,4279	4278	4277	4275	4274	4273	4272	4270	4269	4268
20	1,4267	4265	4264	4263	4262	4260	4259	4258	4256	4255
21	1,4254	4253	4251	4250	4249	4247	4246	4245	4243	4242
22	1,4241	4240	4238	4237	4236	4234	4233	4232	4230	4229
23	1,4228	4227	4225	4224	4223	4221	4220	4219	4218	4216
24	1,4215	4214	4212	4211	4210	4208	4207	4206	4205	4203
25	1,4202	4201	4199	4198	4197	4195	4194	4192	4191	4190
26	1,4188	4187	4186	4184	4183	4182	4180	4179	4177	4176
27	1,4175	4173	4172	4171	4169	4168	4167	4165	4164	4162
28	1,4161	4160	4158	4157	4156	4154	4153	4151	4150	4149
29	1,4147	4146	4145	4143	4142	4141	4139	4138	4136	4135
30	1,4134	4132	4131	4129	4128	4127	4125	4124	4122	4121

Westonelement.

Grad Celsius	E.M.K.	Grad Celsius	E.M.K.	Grad Celsius	E.M.K.
0	1,0191	11	1,0189	22	1,0185
1	91	12	89	23	85
2	91	13	88	24	84
3	91	14	88	25	84
4	90	15	88	26	83
5	90	16	87	27	83
6	90	17	87	28	83
7	90	18	87	29	82
8	90	19	86	30	1,0182
9	89	20	86		
10	1,0189	21	1,0186		

Die Tabellen beziehen sich unmittelbar auf Elemente, welche nach der Vorschrift der Reichsanstalt[1]) hergestellt sind. Von der Weston-Compagnie bezogene Westonelemente haben eine um 0,0005 höhere elektromotorische Kraft.[2])

Diejenigen Elektriker, welche bei der Annahme

Clark bei 15° C. = 1,4340

noch stehen bleiben wollen, haben die Tabellenwerte für das Clarkelement um 0,0012, jene für das Westonelement um $0{,}0008_6$ zu erhöhen.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die Weston-Compagnie für die von ihr bezogenen Elemente den Temperaturcoefficienten in den beigegebenen Begleitscheinen positiv angiebt. Ueber diesen Umstand müssen noch weitere Beobachtungen entscheiden. Im übrigen stimmen die Angaben der Weston-Compagnie sehr befriedigend mit jenen der Reichsanstalt und der obenstehenden Tabelle.

So hat man z. B. für ein in neuerer Zeit bezogenes Normalelement:

---

1) W. Jaeger u. K. Kahle, Zeitschr. f. Instrumentenk. **18.** p. 162. 1898.

2) Physikal.-Techn. Reichsanstalt, Zeitschr. f. Instrumentenk. **18.** p. 213. 1898.

E_t bei	10°	16°	20°	30° C.
Nach dem Begleitscheine der W.-C., Clark = 1,434	1,01990	—	1,01997	1,02000
Nach dem Certificate der R.-Anstalt, Clark = 1,434	—	1,0199	—	—
Nach der obenstehenden Tabelle [1])	1,02026	1,02006	1,01996	1,01956
Differenz, Beob.-Tabelle	−0,00036	−0,00016	+0,00001	+0,00044

Wien, 29. Januar 1900.

1) Reduction auf Clark gleich 1,434 . . . + 0,00086, Correction wegen Anfertigung durch die Weston-Compagnie + 0,0005, zusammen + 0,00136.

(Eingegangen 31. Januar 1900.)

d. h. es ist:

$$K' = \frac{L}{c^2} e^2 \mathfrak{N}'^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \tag{106}$$

K' ist die mechanisch gemessene Kraft, welche die auf der Längeneinheit vorhandenen $\mathfrak{N}'$-Kerne beanspruchen, um ihnen eine Beschleunigung $\partial^2 \xi / \partial t^2$ zu erteilen. Jeder einzelne Kern beansprucht also die Kraft:

$$K = \frac{K'}{\mathfrak{N}'} = \frac{L}{c^2} e^2 \mathfrak{N}' \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \tag{107}$$

Wenn der Kern eine Masse m besässe, so müsste sein:

$$K = m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \tag{108}$$

es ist daher die scheinbare Masse m des Kernes:

$$m = \frac{e^2}{c^2} L \mathfrak{N}' = \frac{2 e^2}{c^2} \log \frac{d}{\varrho} \cdot \mathfrak{N}^{1/3}. \tag{109}$$

Hierbei bezeichnet $\mathfrak{N}$ die in der Volumeneinheit enthaltene Kernzahl.

Aus dieser Formel (109) ist ersichtlich, *dass die scheinbare Masse einer Kerngattung in verschiedenen Metallen nicht immer dieselbe ist, selbst wenn der Kernradius ϱ stets derselbe sein sollte. Denn die scheinbare Masse ist proportional mit der dritten Wurzel von $\mathfrak{N}$, d. h. der Kernconcentration. Diese ist aber in verschiedenen Metallen verschieden.*

Aber selbst in einem bestimmten Metall kann die scheinbare Masse je nach den Umständen streng genommen etwas variiren, indem die Distanz d des Rückstromes dadurch beeinflusst werden kann. Allerdings wird diese Veränderung der scheinbaren Masse m praktisch nicht merklich sein. Bei stationären Strömen und bei Kathodenstrahlen ist die Distanz d des Rückstromes als sehr gross gegen den Kernradius ϱ anzunehmen. Da nun in der Formel (109) der log des Verhältnisses d/ϱ auftritt, so wird die procentische Aenderung von m ganz unmerkbar sein, auch wenn sich d in bedeutender Weise ändert. Eine Aenderung von m gegenüber den bei Kathodenstrahlen erhaltenen Werten liesse sich für Lichtwellen vielleicht denken, da für sie der Rückstrom in der Distanz d gleich der halben Lichtwellenlänge erfolgt. Aber selbst in diesen Fällen wäre wohl eine merkliche Verkleinerung von m nur in denjenigen Metallen

adiabatisch-isentropische Veränderung den Anfangszustand des Systems herstellt. Dann muss nach dem ersten Hauptsatz der Wärmetheorie die der entnommenen Wärme äquivalente mechanische Arbeit gewonnen worden sein, da andere Energiearten hier nicht in Betracht kommen. Der also geschlossene Kreisprocess stellt dann ein perpetuum mobile zweiter Art vor.

Dieser Schluss erscheint mir nicht nur „plausibel", sondern zwingend, während Hr. Wesendonck annimmt, es könne der Fall eintreten, „dass die betreffende periodisch functionirende Maschine gar nicht Arbeit leistet", was nach meiner Meinung dem ersten Hauptsatz der Wärmetheorie widersprechen würde.

Weiter sagt Hr. Wesendonck: „Ferner muss eine isentropische Aenderung immer als möglich vorausgesetzt werden, was doch nicht ohne weiteres angenommen werden kann." Dass eine isentropische Aenderung immer möglich ist, folgt nach meiner gerade in diesem Punkte sehr ausführlichen Darstellung mit Notwendigkeit aus der *Definition* der Entropie. Das ist ja gerade der Grund, weshalb ich die Entropie im directen Anschluss an die Betrachtung eines ganz bestimmten concreten, immer ausführbaren Processes definirt habe. Wo eine Veränderung nicht ausgeführt werden kann, ist eine Entropie gar nicht definirt.

Damit scheint allerdings auf den ersten Blick die Bedeutung des Entropiebegriffes eine gewisse Beschränkung zu erleiden, aber bei näherer Betrachtung wird man finden, dass diese Beschränkung gerade in der Natur der Sache liegt und eben deshalb ganz besonders in helles Licht gesetzt zu werden verdient. Es hätte nämlich offenbar gar keinen Sinn, von einem allgemeinen Maass der Irreversibilität eines Processes zu reden, wenn man nicht irgendwie in der Lage wäre, den Process zurückzuführen auf eine incompensirte Verwandlung von mechanischer Arbeit in Wärme. Dementsprechend halte ich es auch für vollkommen ausreichend und durch die Oekonomie der Darstellung geradezu für geboten, der Entropie eines Körpers lediglich die Definition $dS = (dU + p\,dV)/T$ zu Grunde zu legen, wobei p den Druck, V das Volumen darstellt, — im Gegensatz zur Ansicht des Hrn. Wesendonck, der diese Definition zu eng findet. Die Verallgemeinerung auf anderweitige äussere Arbeit, z. B. elektrische, wobei p

ordneten schnellen Bewegung von Elektronen (Aufprallen der Kathodenstrahlen auf die Antikathode) in der Erscheinung der Röntgenstrahlen[1]) zu Tage tritt.

Im folgenden II. Teil wird gezeigt werden, dass man sämtliche beobachteten galvano- und thermomagnetischen Effecte auf der hier benutzten Grundlage anschaulich erklären und berechnen kann ohne Zuhilfenahme neuer Hypothesen.

Leipzig, Februar 1900.

1) Hinsichtlich ihres Verhältnisses zu den Becquerelstrahlen scheint aus den Versuchen über ihre magnetische Ablenkbarkeit hervorzugehen, dass letztere wirklich frei fliegende Kerne sind, die die radioactiven Körper entsenden, während die Röntgenstrahlen lediglich in heftigen, aber kurzen Inductionsstössen bestehen, welche den Zusammenhang eines an ein Gasmolecül gebundenen positiven und negativen Kernes zerstören und daher das Gas leitend machen können.

(Eingegangen 22. Februar 1900).

die Richtung der in dem System eintretenden Veränderungen gestatten soll. Je nachdem man aber diese Bedingung wählt, lautet die Formulirung des Gesetzes verschieden.

Ich kann mich daher auch dem durch jene Gegensätzlichkeit veranlassten Zweifel, welchen Hr. Wesendonck bezüglich der gesunden Entwickelung der Wärmelehre äussert, nicht anschliessen.

Berlin, Januar 1900.

(Eingegangen 1. Februar 1900.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Ist es richtig, dass der an der activen Elektrode sich bildende Sauerstoff verhindert, dass der elektrolytische Unterbrecher auch mit schwachen Strömen dauernd functionirt, dann muss jeder Vorgang, der der Ansammlung des Gases entgegenarbeitet, die Wirkung haben, dass der elektrolytische Unterbrecher auch mit schwachen Strömen thätig ist. *In der That bewirkt eine heftige Bewegung der activen Elektrode, dass das Unterbrechungsphänomen unter den eingangs erwähnten Verhältnissen sofort eintritt.* Viel besser jedoch lässt sich dasselbe erreichen, wenn man gegen die active Elektrode einen Strom verdünnter Säure fliessen lässt. Ein Glas- oder Hartgummirohr, das im Deckel des Apparates verschiebbar ist, wird zweimal rechtwinklig umgebogen, sodass an dasselbe eine Düse von ca. 0,75 mm Oeffnung gekittet werden kann. Die active Elektrode steht nach unten und genau darunter befindet sich dann (in variabler Entfernung) die Düse. Das die Düse tragende Rohr wird vermittelst eines Gummischlauches unter Zwischenschaltung eines Glashahnes mit einem grösseren Glasgefäss, das die verdünnte Säure enthält, verbunden und in diesem Gefäss wird etwa durch ein kleines Gummigebläse der Druck erhöht. Strömt nun die Säure gegen die active Elektrode, so erhält man einen Apparat, der mit nur 24 Volt den Strom äusserst exact unterbricht[1]), selbst wenn die active Elektrode nur wenige Zehntel Millimeter lang ist. Man kann auch den Druck der Säure einfach dadurch hervorbringen, dass man das Säuregefäss etwa 1 m hoch über dem Unterbrecher aufstellt, wenigstens genügt dieser Druck bei 24 Volt vollständig. Ist der Druck der Säure zu hoch, dann tritt scheinbar Kurzschluss ein, *der Apparat unterbricht nicht mehr*, deswegen ist der Säurestrom durch den Hahn sorgfältig zu reguliren, sodass der Unterbrecher einen möglichst hohen gleichmässigen klaren Ton aussendet. Mit dem Apparat lassen sich Geissler'sche, Crookes'sche und Spectralröhren stundenlang ohne Störung betreiben, ebenso gewöhnliche Röntgenröhren, der entsprechenden Funkenlänge, ganz vortrefflich bei 32 Volt.

---

1) Mit dem erwähnten 10 cm-Inductorium betrug bei $3^1/_2$ mm langer activer Elektrode die Funkenlänge 55 mm bei ca. 450 Unterbrechungen pro Secunde und $6^1/_2$ Amp. Stromstärke.

Entladung durch den dunklen Raum erzwingt, die Entladung einen disruptiven Charakter, wie in Paraffinöl, annimmt, bestätigt worden. Wir haben somit in jeder Entladungsröhre zwei Teile scharf zu trennen, nämlich 1. die leitende positive Säule und 2. den nichtleitenden dunklen Raum.[1]) Aus Versuchen von Hrn. W. Hittorf[2]) geht nun hervor, dass bereits mit 15 Chromsäureelementen noch ein starker leuchtender Durchgang der Entladung durch verdünnte Luft erzielt werden kann, wenn als Kathode eine weissglühende Kohle benutzt wird, für dunkle Entladungen genügen bereits weit geringere Spannungen. Hält man dies Ergebnis mit dem obigen zusammen, so liegt der Gedanke nahe, dass die Gase nach der Ionisation Leiter der Elektricität sind, und dass nur ein eigentümliches Hindernis an der Kathode, welches durch Erhitzung, ultraviolettes Licht etc. beseitigt werden kann, unter gewöhnlichen Umständen den Durchgang des Stromes hindert. Ist dieser Gedanke richtig, dann muss es gelingen, durch starke Erhitzung auch den dunklen Kathodenraum zu einem Leiter zu machen und dadurch alle Erscheinungen wesentlich zu vereinfachen.

Um die hier obwaltenden Beziehungen aufzuklären, wurden eine grosse Reihe von Messungen, und zwar *1. über den Potentialgradienten im positiven Licht, 2. über das Kathodengefälle, 3. über den Potentialgradienten bei der dunklen Entladung und 4. über die Gesamtpotentialdifferenz bei verschiedenen Temperaturen* ausgeführt.

§ 2. *Versuchsanordnung.* Die Methode der Messung war die von Warren de la Rue und Müller[3]), Hittorf[4]), Warburg[5]) u. a. benutzte; in die von einem constanten Strom durchflossene Gasstrecke waren mehrere Platindrähte als Sonden eingesenkt. Die Potentialdifferenz zwischen den Sonden wurde mittels eines modificirten Warburg'schen Elektrometers[6]) gemessen. Als Stromquelle diente eine Batterie von 1000 Accumulatoren. In den Stromkreis waren Hittorf'sche Jodcadmium-

1) E. Wiedemann u. A. Wehnelt, Sitzungsber. Physico-medica 1898.

2) W. Hittorf, Wied. Ann. **21.** p. 135. 1884.

3) Warren de la Rue u. Müller, Phil. Trans. **169.** p. 165. 1873.

4) W. Hittorf, Wied. Ann. **20.** p. 712. 1883.

5) E. Warburg, Wied. Ann. **40.** p. 1. 1890; vgl. auch A. Herz, Wied. Ann. **54.** p. 244. 1865.

6) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. **66.** p. 316. 1898.

widerstände und ein Telephon zur Beurteilung der Continuirlichkeit des Stromes, sowie ein Spiegelgalvanometer eingeschaltet. Zum Erwärmen der Entladungsröhre diente ein gut mit Asbest ausgefütterter eiserner Kasten. Aus demselben ragten nur die beiden Enden mit den Elektroden und die Quecksilbernäpfchen, in welche die oberen Enden der Sonden tauchten, heraus. Ein Glimmerfenster erlaubte die Erscheinungen in der Entladungsröhre zu verfolgen. Die Temperaturen wurden an einem im Kasten befindlichen Thermometer abgelesen; Messungen wurden erst angestellt, wenn die Temperatur einige Zeit bis auf 1—2° constant blieb.

Die Untersuchung blieb auf *Stickstoff* beschränkt. Zur Darstellung desselben wurde eine Lösung von Ammoniumnitrit durch Erhitzen zersetzt und das sich entwickelnde Gas in einem Glasgasometer aufgefangen. Um Spuren von Kohlensäure, Sauerstoff und den Wasserdampf zu entfernen, wurde es durch Kalilauge, Pyrogallussäure und schliesslich über Chlorcalcium und Phosphorpentoxyd geleitet.

Die zu untersuchende Entladungsröhre wurde mehrere Male abwechselnd ausgepumpt und mit Stickstoff gefüllt, während sie gleichzeitig ca. 6 Stunden auf ungefähr 300° erhitzt wurde, um möglichst allen Wasserdampf von den Wänden zu entfernen. Die letztere Vorsichtsmaassregel war wichtig, da es nur so gelang, übereinstimmende Resultate zu erhalten. Die Pumpe enthielt gefettete Hähne und Schliffe, sodass im Lauf der Zeit durch Verdampfen der Kohlenwasserstoffe kleine Verunreinigungen im Stickstoff auftraten.

Die Versuche wurden teils bei constantem Druck, teils bei constanter Dichte des Gases angestellt. Zu dem letzteren Zweck war möglichst nahe an der Entladungsröhre ein Capillarhahn angebracht; war derselbe geschlossen, so blieb die Gasdichte constant, wurde er geöffnet und dadurch die Verbindung zwischen der Entladungsröhre und den grossen Gefässen der Pumpe hergestellt, so blieb der Druck während des Erhitzens nahezu unverändert.

§ 3. *Aenderung der Spectralerscheinungen bei sehr grossen Stromstärken, wobei auch die Temperatur des Gases stark steigt.* Es wurde bei gewöhnlicher Temperatur ein constanter Strom durch die Entladungsröhre bei einem solchen Druck geschickt,

dass eine ungeschichtete Entladung auftrat. Die Kathode war mit bläulichem Licht bedeckt, das positive Licht sah rot aus und zeigte die bekannten Stickstoffbanden. Wurde die Stromstärke stark gesteigert, so nahm das rote positive Licht eine prachtvoll orangene Farbe an. Der Charakter des Spectrums änderte sich nicht wesentlich; im letzteren Fall war nur das gelbe Band bedeutend intensiver, doch blieb selbst bei den grössten angewandten Stromstärken die Kannellirung erhalten. Messungen über den Potentialgradienten im orangefarbenen Licht waren leider nicht möglich, da die Kathode ausserordentlich rasch zerstäubte und die Entladungsröhre sehr heiss wurde.

Diese wohl noch nicht beschriebene Erscheinung entspricht nicht der bisher beim Stickstoff sonst beobachteten Thatsache, dass Steigerung der Stromdichte die violetten Teile des Spectrums besonders stark anregt. Schaltet man vor die Entladungsröhre eine Funkenstrecke und steigert man dadurch die Stromdichte, so wird das vorher rote Spectrum blau. In den engen Teilen einer Geissler'schen Röhre leuchtet der Stickstoff blau, in den weiten rot. Das eben beschriebene Resultat zeigt indes, dass hierbei nicht die Stromdichte das Maassgebende ist, sondern dass wir es wahrscheinlich mit einer ganz anderen Form der Anregung zu thun haben. Dass durch letztere die Spectren völlig verändert werden können, zeigt sich besonders schön bei vielen Metalldämpfen.[1])

§ 4. *Aenderung der Erscheinungen im positiven Licht beim Erhitzen.* Wir beschreiben jetzt die Veränderungen, welche eine Erhitzung bis zu 300° C. in den Entladungsröhren hervorruft, und zwar bei constanter Dichte, aber veränderlichem Druck.

Bei gewöhnlicher Temperatur füllt das rote Licht beinahe die ganze Röhre aus; der dunkle Trennungsraum trennt dasselbe von dem violetten Kathodenlicht, welches bei einem bestimmten Druck die Kathode nur halb bedeckt. Beim Erhitzen bis 130° zog sich das positive Licht zurück, der dunkle Raum wurde grösser und das rote positive Licht zerfiel in einzelne Schichten, die sich an die Sonden anlegten. Dieselben waren

1) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Sitzungsber. d. physikal.-med. Societät. Erlangen 1898.

schlecht ausgebildet und waren voneinander durch dunkle Räume getrennt. Bei Steigerung der Stromstärke wurden die Schichten intensiver und grösser. Wurde noch weiter erhitzt, so wurde die ganze Röhre dunkel, nur an der Anode und Kathode befanden sich noch kleine Lichtfünkchen. Die Erscheinung hatte das Aussehen, wie wenn bei sehr hohen Drucken die Entladung eben durch die Röhre zu gehen beginnt. Bei engen Röhren treten die Veränderungen erst bei höheren Temperaturen auf als bei weiten, und sind die Schichten viel besser ausgebildet. Offenbar spielt hierbei die Stromdichte eine Rolle. Vielfach bildeten sich auch Schichten zwischen den Sonden aus.

Ganz ähnliche Erscheinungen treten bei constantem Druck auf.

Aus den Beobachtungen ergiebt sich somit: *Sowohl bei constantem Druck, als auch bei constanter Gasdichte zerfällt bei gesteigerter Temperatur das ungeschichtete positive Licht in Schichten, die durch Steigerung der Stromstärke grösser, verwaschener und heller werden.*[1]) *Bei noch höheren Temperaturen zieht sich das positive Licht nach der Anode hin zurück, sodass schliesslich die Entladung eine dunkle wird.*

Dass diese letztere Erscheinung nicht davon herrührt, dass bei diesen hohen Temperaturen die Gase nicht mehr zu leuchten vermögen, geht deutlich daraus hervor, dass, sobald man eine Funkenstrecke vor die Entladungsröhre schaltet, die ganze Röhre schön leuchtet.[2])

---

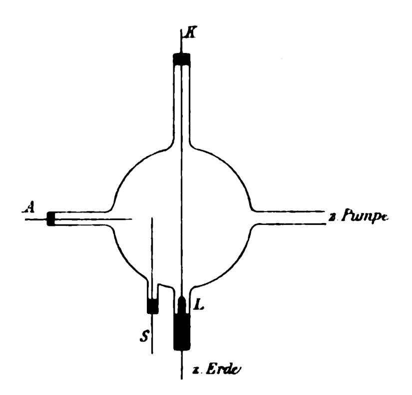
1) Vgl. W. Hittorf, Wied. Ann. **21.** p. 113. 1884.

2) Eine andere Ansicht scheint Hr. W. Hittorf (Wied. Ann. **19.** p. 14. 1883) zu haben, da derselbe schreibt: „Durch besondere Versuche habe ich mich auch überzeugt, dass alle Gase, welche diese hohen Wärmezustände angenommen haben, gute Leiter der Elektricität bei der schwächsten Spannungsdifferenz sind, und dass sie beim Durchgange des Stromes nicht mehr Spectra der ersten Ordnung geben. *Es ist hier die Temperatur erreicht, in welcher diese von Plücker und mir beschriebenen Spectra unmöglich werden.*“ Hätte Hr. Hittorf eine Funkenstrecke vor seine Entladungsröhre geschaltet, so hätten wahrscheinlich auch seine Gase geleuchtet. Das Verschwinden des roten positiven Lichtes rührt nicht daher, dass die Gase nicht mehr zu leuchten vermögen, sondern dass die Form der Entladung eine andere geworden ist. Eine definitive Entscheidung, ob diese letztere Ansicht die richtige ist, sollen spätere Versuche geben.

§ 5. *Aenderungen der Erscheinungen an der Kathode beim Erhitzen.* Sehr auffällige Veränderungen zeigt das Glimmlicht, wenn man bei constantem Druck erwärmt.

Bekanntlich wächst bei constanter Temperatur mit wachsender Stromstärke die Länge des Glimmlichtes, während seine Dicke solange ungeändert bleibt, als der Draht noch nicht ganz mit Glimmlicht bedeckt ist, und solange bleibt auch, wie Hr. W. Hittorf[1]) zuerst und später Hr. Warburg[2]) gezeigt haben, das Kathodengefälle ungeändert. Hat das Glimmlicht sich über die ganze Kathode verbreitet, so wächst bei weiter gesteigerter Stromesintensität die Dicke des Glimmlichtes und gleichzeitig das Kathodengefälle. Mit zunehmendem Druck wird das Glimmlich kleiner und bedeckt schliesslich die Kathode nur an der Spitze.

Erhöhung der Temperatur bewirkt nun genau dasselbe wie Erhöhung der Stromstärke. Bei constanter Gasdichte, also wenn der Druck zunimmt infolge der Erwärmung, kann unter besonders günstigen Umständen die Zunahme des Druckes den Temperatureinfluss compensiren, sodass grössere Veränderungen nicht wahrzunehmen sind. Bei constantem Druck wächst das Glimmlicht stets bei Erhöhung der Temperatur, selbst, wenn die Stromstärke ungeändert bleibt, und bedeckt schliesslich die ganze Kathode, zugleich flutet es weiter vom Draht ab.



Dies wurde noch durch Versuche bestätigt, bei denen die Kathode durch einen elektrischen Strom erhitzt wurde (vgl. nebenstehende Figur). An eine Kugel von 7 cm Durchmesser waren 4 Röhren angeschmolzen. In die eine war die Anode *A* eingekittet, in die andere die Kathode *K*, welche in ihrem unteren Ende aus einem dünnen Platiniridiumdraht bestand, der durch einen an-

1) W. Hittorf, l. c.
2) E. Warburg, Wied. Ann. **31**. p. 545. 1887.

gelöteten Kupferstab L straff gespannt war. Der letztere tauchte in Quecksilber, welches mit der Erde in Verbindung stand. Die Anode führte zu dem einen Pol einer 20-plattigen Influenzmaschine, deren anderer Pol ebenfalls mit der Erde in Verbindung stand. Sobald nun durch eine besondere Batterie, deren eines Ende zur Erde abgeleitet war, der Kathodendraht erwärmt wurde, wurde das Glimmlicht länger und breiter. S ist eine Sonde, welche bei späteren Versuchen Verwendung fand. Ueber die erhaltenen Resultate giebt die folgende Tabelle Auskunft. In derselben bedeuten p den Druck in Millimetern, T die Temperatur des Drahtes, L die Länge des Glimmlichtes und R.-Gl. schwache Rotglut.

Tabelle I.

p	T	L	p	T	L
115	20° C.	13 mm	17	20° C.	29 mm
115	R.-Gl.	16	17	R.-Gl.	45
38	20° C.	17	6	20° C.	35
38	R.-Gl.	21	6	R.-Gl.	50
26	20° C.	22	3	20° C.	40
26	R.-Gl.	30	3	R.-Gl.	65

Aus den Versuchen ergiebt sich: *Eine Steigerung der Temperatur der Kathode bewirkt, dass das Glimmlicht sich weiter ausdehnt, und zwar um so mehr, je geringer der Druck ist. Die Steigerung der Temperatur hat also denselben Einfluss wie Steigerung der Stromesintensität.*

§ 6. *Aenderungen des Potentialgradienten bei cyclischen Veränderungen der Temperatur.* Ist der Stickstoff sorgfältig gereinigt, so bleibt der Gradient auch bei geschlossenem Strom längere Zeit constant. Zum Belege hierfür möge folgende Tabelle dienen, in welcher p den Druck des Gases in Millimeter Quecksilber, i die Stromstärke in Ampère, L die Entfernung zwischen den beiden Elektroden, n die Nummer der Sonde von der Anode an gerechnet, V die Potentialdifferenz zwischen den beiden Sonden, G den entsprechenden Potentialgradienten und Π die Gesamtpotentialdifferenz zwischen den Elektroden bedeuten. Die benutzte Röhre enthielt 5 Sonden, die beiden Elektroden waren 3,5 cm lange und 1 mm dicke

Platindrähte. Die letzte (5.) Sonde befand sich im dunklen Raum.

Tabelle II.

$2R = 4{,}4$ cm. $L = 20{,}5$ cm. $i = 0{,}000\,22$ Amp. $p = 1{,}95$ mm. $T = 16°$ C.

Gleich nach Stromschluss				Nach 1 Stunde Stromdurchgang			
n	V	G	Π	n	V	G	Π
1,2	147,5	39,9	770 Volt	1,2	147,4	39,9	770 Volt
2,3	167,6	39,7	770	2,3	166,6	39,5	770
3,4	169,6	38,6	770	3,4	169,6	38,6	770
4,5	133,5	26,7	770	4,5	133,5	26,7	770

Die Röhre wurde nun drei Stunden auf 300° C. erhitzt und nach dem Abkühlen wiederum der Potentialgradient gemessen. Es ergab sich:

Tabelle III.

n	V	G	Π
1,2	138,1	37,3	720 Volt
2,3	157,2	37,3	720
3,4	161,0	36,6	720
4,5	107,7	21,6	720

Wie aus den Tabellen II und III hervorgeht, entspricht bei cyklischer Veränderung der Temperatur bei gleichen Stromstärken nicht mehr der gleiche Wert des Gradienten. Die Erklärung hierfür dürfte darin zu suchen sein, dass im Lauf der Zeit namentlich beim Erhitzen sich noch Wasserdampf von den Wandungen des Entladungsrohres entwickelt und von den eingefetteten Hähnen sich Kohlenwasserstoffe frei machen. Ganz wird sich dieser Fehler niemals eliminiren lassen. In den folgenden Tabellen habe ich nur solche Beobachtungsreihen berücksichtigt, bei denen das Gesamtpotential nach dem Erhitzen bis auf 2 Proc. mit dem vor dem Erhitzen übereinstimmte. [1])

---

1) Auch Hr. A. Herz (Wied. Ann. 54. p. 252. 1895) erwähnt, dass selbst das sorgfältigst gereinigte Gas in den Apparaten mit der Zeit durch Loslösung gasförmiger Bestandteile, sei es von den Rohrwandungen, sei es von den Elektroden, verunreinigt wird.

§ 7. *Aenderungen des Potentialgradienten im positiven Licht mit der Stromstärke bei höheren Temperaturen.* Von den Herren C. A. Mebius[1]) und A. Herz[2]) ist nachgewiesen, dass der Gradient im positiven ungeschichteten Licht mit wachsender Stromstärke abnimmt, und zwar geradlinig, ein Ergebnis, welches Hr. E. Wiedemann und ich[3]) bestätigt haben. Um zu sehen, ob dieser Satz auch bei höheren Temperaturen gilt, wurden mit verschiedenen Röhren und bei verschiedenen Drucken diesbezügliche Versuche angestellt. Ueber die erhaltenen Resultate giebt die folgende Tabelle Auskunft:

Tabelle IV.

Ungeschichtet. $T = 14^0$ C.				Ungeschichtet. $T = 48^0$ C.			
i	V	G	H	i	V	G	H
Amp.			Volt	Amp.			Volt
$1,42 . 10^{-4}$	107,4	29,0	640	$1,64 . 10^{-4}$	98,7	26,9	600
3,03	104,7	28,3	640	2,13	98,6	26,7	600
4,64	102,8	27,8	660	4,15	95,3	25,8	620
5,86	100,8	27,3	690	5,1	93,2	25,2	630
11,10	96,0	25,9	950	9,98*	91,0	24,6	810
Ungeschichtet. $T = 72^0$ C.				Schichten (wenig intensiv). $T = 128^0$ C.			
1,97	90,4	24,4	580	2,08	41,9	11,4	460
2,92	86,9	23,5	580	2,80	38,1	10,3	470
4,26	85,1	23,1	600	4,17	36,6	9,9	490
6,35	82,6	22,3	670	6,17	36,6	9,9	540
9,32*	86,9	23,5	760	9,32	41,9	11,3	620

Bei der ersten Beobachtungsröhre nimmt der Gradient mit der Stromstärke ab, und zwar geradlinig, sodass wir mit Herz setzen können

$$v = v_0 - b(i - i_0),$$

wo v_0 den Gradienten für $i = i_0$ und b eine von i unabhängige Grösse bedeutet, nämlich die Abnahme des Gradienten für die

1) C. A. Mebius, Wied. Ann. **54**. p. 537. 1895.

2) A. Herz, Wied. Ann. **54**. p. 249. 1895.

3) E. Wiedemann u. G. C. Schmidt, Wied. Ann. **66**. p. 316. 1898.

Zunahme 1 der Stromstärke, das ist für 1 Milliampère Stromzunahme.

Bei der zweiten und dritten Beobachtungsreihe nimmt der Gradient ebenfalls ab, und zwar wie früher zunächst geradlinig und parallel mit der ersten Geraden, d. h. *b ist bei allen drei Beobachtungsreihen gleich gross, also unabhängig von der Temperatur, während v_0 mit der Temperatur abnimmt.* Nur der letzte, mit einem * versehene Wert fällt vollständig heraus.

Dies konnte entweder daher rühren, dass die Kathode sich vollständig mit Licht bedeckt hatte, wodurch ihr Entladungspotential und hierdurch auch der Gradient im positiven Licht grösser geworden war, oder dass schon Schichtung eingetreten war, die aber dann so verwaschen sein musste (vgl. § 4), dass sie als solche nicht zu erkennen war. Thatsächlich lagerte sich an den Sonden intensiveres Licht an; da aber zwischen denselben noch eine Lichtbrücke sich ausspannte, so erschien die Entladung bei oberflächlicher Betrachtung eher als eine ungeschichtete, als eine geschichtete.

Um die erstere Annahme zu prüfen, wurde mit einem Rohr, dessen Kathode nur wenig über eine Glasröhre hinausragte und infolge dessen schon bei verhältnismässig geringen Stromstärken vollständig mit Licht bedeckt war, eine Reihe von Messungen über das Kathodenpotential und den Gradienten im positiven Licht angestellt. Ueber die Resultate giebt die folgende Tabelle Auskunft. i bedeutet in derselben die Stromstärke, G der Gradient im positiven Licht und K das Kathodenpotential.

Tabelle V.

$R = 4{,}4$ cm. $L = 20{,}5$ cm. $p = 1{,}34$ mm. $T = 48^\circ$ C.

i	G	K	i	G	K
0,000164 Amp.	45,5	180 Volt	0,00109 Amp.	42,5	240 Volt
0,000186	45,3	190	0,00140	41,3	270
0,000302	44,6	210	0,00240	38,6	280

Trotzdem also das Kathodengefälle mit steigender Stromstärke zunimmt, nimmt der Gradient im positiven ungeschichteten Licht mit wachsender Stromstärke ab, und zwar geradlinig ab.

Der Gradient in der positiven leuchtenden Säule ist also unabhängig von dem Kathodengefälle.

Es bleibt somit nur die zweite Erklärung für die obenerwähnte Erscheinung übrig; dass thatsächlich bei geschichteter Entladung die obige geradlinige Beziehung zwischen Stromstärke und Gradient nicht mehr gilt, davon habe ich mich durch eine Reihe von Messungen bei verschiedenen Temperaturen überzeugt. Sobald eine Entladung geschichtet oder dunkel ist, *steigt* im allgemeinen der Gradient mit wachsender Stromstärke. Es rührt dies daher, dass mit wachsender Stromstärke die Schichten, also die Orte des grössten Energieverbrauches, breiter und verwaschener werden, eventuell auch neue Schichten auftreten, während die dunklen Räume zwischen ihnen sich zusammenziehen. Für diesen Fall ergiebt sich keine einfache Beziehung zwischen Stromstärke und Gradient, wie zu erwarten ist, da die Erscheinungen sich ändern. Ich beschränke mich daher darauf als Beleg für den obigen Satz die folgenden beiden Beobachtungsreihen mitzuteilen.

Tabelle VI.

$L = 19$ cm. $2R = 3$ cm. $p = 2{,}89$ mm. $T = 106^{\circ}$ C. Geschichtet.

i	G	i	G	i	G
0,00038 Amp.	18,7	0,00053 Amp.	23,4	0,00166 Amp.	40,7
0,00046	21,3	0,00066	30,3	0,00246	43,7

$L = 19$ cm. $2R = 3$ cm. $p = 5{,}4$ mm. $T = 330^{\circ}$ C. Dunkel.

i	G
0,00046 Amp.	16,2
0,00091	19,2
0,00284	27,6

Bei anderen Drucken ergab sich das Nämliche wie oben; b nimmt mit abnehmendem Gasdruck etwas ab[1]), ist aber auch hier unabhängig von der Temperatur. Entladungsröhren von anderem Durchmesser zeigten dasselbe Verhalten, nur er-

1) A. Herz, Wied. Ann. **54.** p. 350. 1895.

gab sich eine bedeutende Abnahme von b mit zunehmendem Röhrenhalbmesser.[1])

§ 8. *Aenderung des Potentialgradienten mit der Temperatur im positiven ungeschichteten Licht bei constanter Gasdichte.* Es wurden mit verschiedenen Röhren eine Anzahl von Messungen über den Potentialgradienten im positiven, ungeschichteten Licht bei geschlossenem Hahn, also bei constanter Gasdichte angestellt. Ueber die erhaltenen Resultate giebt die folgende Tabelle Auskunft:

Tabelle VII.

$2R = 4,4$ cm. $L = 20,5$ cm. $p = 1.48$ mm.[2])

T	i	V	G	H
10° C.	0,00034 Amp.	155,6	42.1	790 Volt
36	0,00034	155,5	42,1	780
60	0,00034	155,8	42.2	770
74	0,00034	155,6	42,1	760
$2R = 4,4$ cm. $L = 20,5$ cm. $p = 3.06$ mm.				
13° C.	0,00034 Amp.	262,6	71,0	1010 Volt
35	0,00034	261,0	70,9	990
54	0,00034	262,8	71.0	940
73	0,00034	262.5	71,0	830
$2R = 2,2$ cm. $L = 17$ cm. $p = 2.42$ mm.				
12° C.	0,00088 Amp.	107,5	59,7	1010 Volt
65	0,00088	109,2	60,7	960
90	0,00088	109,0	60,6	920
145	0,00088	103,9	57,7	820
180	0,00088	108,5	60,3	830

Aus der Tabelle lässt sich entnehmen: *Der Gradient im positiven, ungeschichteten Licht ist bei constanter Gasdichte unabhängig von der Temperatur.*

Messungen mit anderen Entladungsröhren ergaben dasselbe Resultat. Höhere Temperaturen als die in der Tabelle

1) Th. Homen, Wied. Ann. 28. p. 201. 1889.

2) p ist der bei Beginn des Versuches, also bei 10° C., abgelesene Druck. Dasselbe gilt von den beiden anderen Beobachtungsreihen. Natürlich nahm beim Erhitzen der Druck zu.

angegebenen konnten leider nicht verwendet werden, da die ungeschichtete Entladung in Schichten zerfiel und bei noch höheren Temperaturen sich in eine dunkle umwandelte.

§ 9. *Aenderung des Potentialgradienten mit der Temperatur im positiven ungeschichteten Licht bei constantem Druck.* Aus Versuchen von den Herren Th. Homen[1]) und A. Herz geht hervor, dass der Gradient im positiven ungeschichteten Licht mit zunehmendem Druck zunimmt, aber langsamer, als der Druck wächst. Hält man dies Ergebnis mit dem eben gefundenen zusammen, dass der Gradient bei constanter Gasdichte unabhängig von der Temperatur ist, so war zu erwarten, dass *beim Erwärmen unter constantem Druck der Gradient abnehmen würde, und zwar langsamer als die Gasdichte. Die Versuche, von denen ich nur einige wenige anführe, bestätigten dies.*

Tabelle VIII.

$2R = 4{,}4$ cm. $L = 20{,}5$ cm. $p = 1{,}48$ mm.

T	i	V	G	H
10° C.	0,00034 Amp.	155,6	42,1	790 Volt
25	0,00034	151,2	40,8	770
46	0,00034	147,0	39,8	740
	$2R = 4{,}4$ cm. $L = 20{,}5$ cm. $p = 3{,}06$ mm.			
13° C.	0,00029 Amp.	271,5	73,2	1030 Volt
43	0,00029	253,5	68,6	910
76	0,00029	242,1	65,5	780
	$2R = 2{,}2$ cm. $L = 17$ cm. $p = 2{,}42$ mm.			
12° C.	0,00088 Amp.	107,5	59,7	1010 Volt
38	0,00088	105,0	58,6	930
61	0,00088	103,8	57,7	870

§ 10. *Einfluss der Temperatur auf das Kathodenpotential.* Von W. Hittorf[2]) ist nachgewiesen, dass das negative Glimmlicht bei der Zunahme der Stromstärke sich stetig über eine gewisse Fläche der Kathode ausbreitet. Solange ihm dies

1) Th. Homen, Wied. Ann. 20. p. 743. 1883.
2) W. Hittorf, Wied. Ann. 20. p. 743. 1883.

möglich ist, bleibt seine Dicke wie seine Spannungsdifferenz so gut wie unverändert. Sobald jedoch die ganze Kathode damit bedeckt ist, flutet es mit wachsender Stromstärke geradlinig weiter, und gleichzeitig steigt seine Spannungsdifferenz.

Um das Verhalten des Glimmlichtes, falls die Kathode nicht ganz bedeckt ist, bei höheren Temperaturen zu untersuchen, wurde in eine 30 cm lange und 5 cm dicke Röhre eine Aluminiumkathode von 15 cm Länge und 2 mm Durchmesser eingekittet. Die Röhre wurde in dem eisernen Kasten erwärmt und die Beziehung zwischen Stromstärke und Kathodenpotential bei verschiedenen Temperaturen gemessen. Es ergab sich:

Tabelle IX.

$p = 5$ mm.

T	i	Kathoden-potential	Π
14° C.	0,00018	234,4	370
	0,00032	234,4	370
	0,0018	230,1	390
	0,0022	231,5	430
83° C.	0,00020	227,6	320
	0,00032	229,4	320
	0,0018	234,4	380
	0,0022	234,4	410
150° C.	0,00020	230,1	290
	0,00032	234,3	290
	0,0018	234,4	300
	0,0022	231,4	310

Die Kathode war selbst bei den grössten Stromstärken höchstens ungefähr zur Hälfte mit Glimmlicht bedeckt. Das Kathodengefälle von 234 Volt stimmt gut mit der von Hrn. Warburg[1]) für Platinkathoden gefundenen Zahl von 232 Volt überein. Aus der Tab. IX geht hervor: *Das Kathodengefälle ist, solange die Kathode noch nicht ganz bedeckt und nicht bis zur Weissglut erhitzt ist, unabhängig von der Temperatur.* Bei

1) E. Warburg, Wied. Ann. **40.** p. 9. 1890.

noch höheren Temperaturen (bis 250° C.) ergab sich das Nämliche.

Dieses Ergebnis bestätigten auch einige mit Hülfe des § 5 beschriebenen Apparates (vgl. Figur) angestellte Versuche, bei denen durch einen Nebenstrom die Kathode erhitzt wurde. Um das Kathodenlicht, welches längs des Drahtes hin- und herflackerte und dadurch jede Messung unmöglich machte, an einer Stelle festzuhalten, wurde die Anode bis dicht an die Kathode geschoben. Zwischen beiden befand sich eine bis auf die Spitze in Glas gehüllte Sonde. Es ergab sich bei 15 mm bei gewöhnlicher Temperatur ein Kathodengefälle von 230,5 Volt und, als der Draht auf ca. 600° erhitzt wurde, von 236,8 Volt, also auch hier so gut wie unabhängig von der Temperatur. Dieses Ergebnis, welches noch durch andere Messungen bestätigt wurde, stimmt mit der von Hrn. Hittorf gefundenen Thatsache überein, dass erst dann das Kathodengefälle sinkt, wenn die Kathode weissglühend ist.

Es wurde noch eine Reihe von Messungen über das Kathodenpotential bei verschiedenen Temperaturen mit einer kurzen Elektrode, die von vornherein ganz mit Glimmlicht bedeckt war, angestellt. Ueber die erhaltenen Resultate giebt die folgende Tabelle Auskunft. K bedeutet Kathodenpotential. Die übrigen Buchstaben haben dieselbe Bedeutung wie früher.

Tabelle X.

$2R = 4$ cm. $L = 20,5$ cm. $p = 0,96$ mm.

T	i	K	H	T	i	K	H
12° C.	0,00016	300,3	1030	93° C.	0,00011	280,5	790
	0,00027	317,7	1010		0,00019	284,0	820
	0,00069	383,4	1010		0,00033	302,4	880
	0,00144	521,3	1020		0,00070	360,2	850
	0,00237	656,3	1010		0,00113	407,4	840
					0,00155	464,5	860
					0,00211	538,2	860
223° C.	0,00018	302,0	380	310° C.	0,00017	301,4	370
	0,00032	310,5	380		0,00032	311,5	370
	0,00051	345,9	410		0,00050	348,6	400
	0,00084	389,0	510		0,00096	394,5	490
	0,00189	520,1	600		0,00190	522,1	590

Aus der Tab. X geht hervor: *Steigert man die Stromstärke, nachdem die Kathode schon ganz bedeckt ist, so nimmt das Kathodenpotential zu, und zwar geradlinig mit der Stromstärke zu.* Eine Formel von der Gestalt: $v = v_0 + b\,i$, wo b eine Constante bedeutet, stellt alle Beobachtungen dar. Die Geraden für die verschiedenen Temperaturen laufen ziemlich parallel miteinander, die kleinen Abweichungen hiervon rühren wohl nur davon her, dass bei höheren Temperaturen noch Wasserdampf sich von den Wänden freimacht und dadurch der Stickstoff verunreinigt wird.

Es wurden noch eine grosse Anzahl von ähnlichen Messungen mit verschiedenen Röhren bei verschiedenen Temperaturen angestellt. Da sich aus denselben Neues nicht ergab, so übergehe ich dieselben.

§ 11. *Einfluss der Stromstärke auf den Gradienten bei der dunklen Entladung.* Wie schon § 4 beschrieben, ist die Entladung bei höheren Temperaturen eine dunkle. Der Gradient ist dann sehr klein, ändert sich aber ziemlich beträchtlich mit der Stromstärke, wie die Tab. XI zeigt. Länge war 19 cm, Dicke gleich 3 cm. i bedeutet Milliampère.

Tabelle XI.

p = 2,16 mm T = 200° C.			p = 2,16 mm T = 310° C.			p = 5,4 mm T = 330° C.		
i	G	H	i	G	H	i	G	H
0,151	14,5	560	0,182	16,2	600	0,204	16,2	510
0,204	16,9	580	0,236	19,5	620	0,404	19,2	550
0,381	20,5	620	0,364	20,5	630	1,261	27,6	670
0,959	25,2	680	0,670	22,0	635			
			1,291	25,6	650			

Aus diesen Zahlen ergiebt sich:

1. *Mit wachsender Stromstärke nimmt der Gradient zu.*

2. *Das Anwachsen des Gradienten mit der Stromstärke ist ein ziemlich starkes.* Wächst z. B. die Stromstärke um das 10 fache, so nimmt der Gradient ungefähr um das Doppelte zu.

Die dunkle Entladung zeigt also ein ganz anderes Verhalten als die leuchtende Lichtsäule. Während für letztere der Satz gilt, dass der Gradient mit wachsender Stromstärke

abnimmt, *findet bei der dunklen Entladung ein Annähern an das Ohm'sche Gesetz statt.*

Eine besondere Untersuchung muss zeigen, ob nicht bei noch höheren Temperaturen das Ohm'sche Gesetz für Gasentladungen gültig ist. Es würde, falls dies der Fall ist, die Elektricitätsleitung in Gasen bei gewöhnlicher Temperatur aus der Superposition zweier Vorgänge bestehen, von denen der eine dem Ohm'schen Gesetz gehorcht, der andere aber einem anderen Gesetz folgen müsste. Dies aufzuklären, soll die Aufgabe einer demnächst erscheinenden Arbeit sein.

§ 12. *Verteilung des Energieverbrauches bei der dunklen Entladung.* Es wurde eine Reihe von Messungen über die Potentialgradienten bei der dunklen Entladung an verschiedenen Stellen der Röhre angestellt. Die benutzten Röhren hatten zu dem Zweck fünf Sonden. Von den Messungen teile ich nur die mit der Röhre $L = 20{,}5$ cm, $2R = 4{,}4$ cm mit. In der nachfolgenden Tab. XII bedeutet K das Kathodenpotential. In der ersten Columne stehen die Nummern der Sonde, von der Anode an gerechnet, in der zweiten der entsprechende Gradient.

Tabelle XII.

$p = 4{,}22$ $T = 105°$C. $\Pi = 420$ V. $K = 160$ V. $i = 0{,}00032$ Amp.		$p = 4{,}86$ $T = 162°$C. $\Pi = 450$ V. $K = 195$ V. $i = 0{,}00032$ Amp.		$p = 5{,}51$ $T = 220°$C. $\Pi = 510$ V. $K = 195$ V. $i = 0{,}00032$ Amp.	
1,2	18,3	1,2	20,0	1,2	22,3
2,3	11,9	2,3	12,9	2,3	16,1
3,4	8,2	3,4	8,5	3,4	10,2
4,5	6,6	4,5	6,9	4,5	8,4

$p = 3{,}05$ $T = 107°$C. $\Pi = 490$ V. $K = 255$ V. $i = 0{,}00032$ Amp.		$p = 3{,}05$ $T = 153°$C. $\Pi = 450$ V. $K = 260$ V. $i = 0{,}00032$ Amp.		$p = 3{,}05$ $T = 211°$C. $\Pi = 440$ V. $K = 260$ V. $i = 0{,}00032$ Amp.	
1,2	19,1	1,2	16,2	1,2	15,5
2,3	12,4	2,3	10,6	2,3	10,4
3,4	7,5	3,4	6,8	3,4	6,8
4,5	6,4	4,5	6,2	4,5	6,0

$p = 2,29$ $T = 150°$ C. $\Pi = 430$ V. $K = 370$ V. $i = 0,00034$ Amp.		$p = 2,66$ $T = 220°$ C. $\Pi = 430$ V. $K = 350$ V. $i = 0,00034$ Amp.	
1,2	4,1	1,2	4,3
2,3	3,0	2,3	3,2
3,4	1,8	3,4	1,9
4,5	1,6	4,5	1,7

$p = 1,48$ $T = 143°$ C. $\Pi = 420$ V. $K = 370$ V. $i = 0,00034$ Amp.		$p = 1,48$ $T = 210°$ C. $\Pi = 420$ V. $K = 370$ V. $i = 0,00034$ Amp.	
1,2	3,8	1,2	2,6
2,3	3,0	2,3	2,1
3,4	1,7	3,4	1,4
4,5	1,5	4,5	1,0

Die 1. bis 3., 7. und 8. Beobachtungsreihe beziehen sich auf den Gradienten bei constanter Gasdichte, die übrigen bei constantem Druck.

Aus der Tabelle geht hervor:

1. *Bei constanter Gasdichte nimmt der Gradient mit der Temperatur zu.*

2. *Bei constantem Druck nimmt der Gradient mit der Temperatur ab.*

3. *Der Gradient nimmt von der Anode nach der Kathode zu ab.*[1]

4. *Der Gradient ist ungefähr proportional der Entfernung von der Kathode.* Dividirt man z. B. den Gradienten durch die Entfernung der Mitte zwischen den beiden Sonden von der Kathode, so erhält man bei der ersten Beobachtungsreihe Zahlen, die zwischen 1,1 bis 1,4 und bei der dritten Beobachtungsreihe Zahlen, die zwischen 1,3 bis 1,7 schwanken. Ob diese Regel strenge gilt, müssen noch weitere Versuche, bei denen die Entfernung zwischen den Sonden kleiner ist als wie bei den bisher angewandten Röhren, zeigen.

§ 13. *Einfluss der Temperatur auf die Gesamtpotentialdifferenz.* Aus den im Vorhergehenden mitgeteilten Erschei-

1) Dies Ergebnis hat W. P. Graham (Wied. Ann. **64.** p. 76. 1898) für den dunklen Raum bereits gefunden.

nungen und den dabei gemessenen Gradienten lässt sich ein Schluss auf die Aenderung der Gesamtpotentialdifferenz zwischen den beiden Elektroden mit der Temperatur ziehen. Da der Gradient im positiven ungeschichteten Licht und der an der Kathode, solange dieselbe nicht vollständig bedeckt ist, unabhängig von der Temperatur ist, und nur das positive Licht beim Erwärmen sich zurückzieht, so nimmt die Gesamtpotentialdifferenz anfangs langsam ab, um, sobald das positive Licht ganz verschwunden ist, auf sehr kleine Werte zu sinken. Für den weiteren Verlauf der Erscheinungen sind zwei Fälle zu beachten. Bleibt die Dichte constant, wobei der Gradient bei der dunklen Entladung mit der Temperatur zunimmt, so steigt die Gesamtpotentialdifferenz. Ist der Druck constant, wobei der Gradient mit der Temperatur abnimmt, so nimmt die Gesamtpotentialdifferenz ab, bis die Kathode ganz bedeckt ist und dadurch ein plötzlicher Sprung in dem Kathodengefälle auftritt. In beiden Fällen haben wir also einen Umkehrpunkt. Messungen, von denen ich nur einige mitteile, bestätigen dies.

Tabelle XIII.

Bei constanter Dichte. $2R = 3$ cm. $L = 19$ cm.

T	p	Π	T	p	Π
20° C.	6,7 mm	1340 Volt	20° C.	4,2 mm	1185 Volt
60	7,7	1320	55	4,7	1155
140	9,4	1190	114	5,5	1000
175	10,1	1020	171	6,3	890
230	11,3	930	210	6,7	830
290	12,7	unstetig	260	7,5	800
			300	8,1	790
			340	8,6	800
	$i = 0{,}0019$			$i = 0{,}0019$	
19° C.	2,34 mm	1010 Volt	19° C.	1,3 mm	800 Volt
61	2,7	960	60	1,5	760
111	3,0	770	129	1,8	600
196	3,6	580	186	2,0	540
244	4,0	560	239	2,3	490
280	4,4	585	271	2,4	495
319	4,6	590	300	2,5	520
			363	2,8	600
	$i = 0{,}0609$			$i = 0{,}0006$	

Aus dieser Tabelle und einer grossen Anzahl anderer Messungen geht hervor: *Mit steigender Temperatur nimmt die Gesamtpotentialdifferenz anfangs langsam, dann rasch ab, erreicht ein Minimum, um dann wieder zu steigen.*

Aus einer graphischen Darstellung, einer Reihe von Messungen wurden die folgenden Minimumspotentiale Π' und die zugehörigen Temperaturen t abgelesen. In der folgenden Tabelle stehen noch die Anfangspotentiale unter A verzeichnet.

Tabelle XIV.

Röhre I: $2R = 3$ cm. $L = 14$ cm.			Röhre II: $2R = 4{,}4$ cm. $L = 20{,}5$ cm.		
A	t	Π'	A	t	Π'
1185 Volt	290° C.	790 Volt	685 Volt	220° C.	490 Volt
1010	244	560	590	170	425
800	237	495			

Röhre III: $2R = 2{,}2$ cm. $L = 17$ cm.		
A	t	Π'
1330 Volt	176° C.	1060 Volt
1010	150	840
910	110	740

Aus dieser Tabelle lässt sich entnehmen:

Das Minimum des Potentials liegt bei einer und derselben Röhre bei einer um so niedrigeren Temperatur, je geringer das Anfangspotential, oder, was dasselbe ist, je geringer der Anfangsdruck ist.

Je nach dem Rohr liegt das Minimum bei einer verschiedenen Temperatur. Bei Röhre I nahm z. B. das Potential von 1010 Volt ab, um bei 244° C. seinen geringsten Wert von 560 Volt zu erreichen; bei Röhre III nahm das Potential nur von 1010 Volt bei 20° C. bis 840 Volt ab bei 150° C. Es bedarf noch einer eingehenden Untersuchung, ob hier nur die Enge der Röhre eine Rolle spielt, oder ob die Länge der Kathode von Einfluss ist.

Sehr verwickelt sind die Curven, welche die Beziehung zwischen Gesamtpotentialdifferenz und Temperatur bei constantem Druck darstellen. Im grossen und ganzen besitzen sie dasselbe Aussehen wie die bei constanter Dichte, doch schneidet häufig die eine die andere. Ich verzichte daher darauf, meine diesbezüglichen Messungen mitzuteilen. Neues lässt sich aus denselben nicht entnehmen.

In einer vor kurzem erschienenen Abhandlung hat Hr. P. Ewers[1]) den Schluss gezogen, dass das Minimumpotential oder der Umkehrdruck U direct proportional sei der mittleren Weglänge λ der Molecüle, also $U/\lambda = \text{const.}$ Aus dem Vorhergehenden geht hervor, dass diese Regel keine allgemeine Geltung haben kann. Denn erhitzt man eine Entladungsröhre bei constanter Dichte, wobei sich die mittlere Weglänge nicht ändert, so tritt bei einer bestimmten Temperatur ein Minimumpotential ein, und zwar bei einem verhältnismässig hohen Druck; U/λ ist also gross. Ein ähnliches Minimumpotential lässt sich aber bei gewöhnlicher Temperatur durch Auspumpen erreichen. In diesem Fall ist U klein; U/λ ist also klein. Es beweist dies unzweifelhaft, dass diese beiden Grössen nicht in dem nahen Zusammenhang miteinander stehen, wie Hr. Ewers angenommen hat. Ich beabsichtige hierüber mit anderen Gasen noch einige Messungen anzustellen.

§ 14. *Schluss.* Die vorliegende Untersuchung, welche unternommen wurde, um einen allgemeinen Ueberblick über die Aenderung der Erscheinungen mit der Temperatur und die dabei in Betracht zu ziehenden Grössen zu gewinnen, kann natürlich nicht als eine endgültige Lösung aller sich neu aufdrängenden Fragen angesehen werden. Sie weist aber mit Bestimmtheit darauf hin, dass bei höheren Temperaturen eine Reihe von bei gewöhnlicher Temperatur auftretenden Complicationen wegfallen, sodass es nicht ausgeschlossen erscheint, dass man auf diesem Wege zu einfachen Gesetzen gelangen kann.

Die dunkle Entladung, die bei höheren Temperaturen auftritt, scheint die normale zu sein, wie ja auch schon Faraday die Entladung überhaupt als eine „dunkle" bezeichnete. Jeden-

1) P. Ewers, Wied. Ann. **69**. p. 191. 1899; vgl. auch H. Ebert, l. c. **67**. p. 608. 1899.

falls ergiebt sich aus der vorliegenden Untersuchung, dass das rote positive Licht mit der Stromüberführung nichts zu thun hat. Wahrscheinlich lagern sich bei gewöhnlicher Temperatur über den Strom noch Wellen, die beim Erhitzen verschwinden. Nur die letzteren rufen das Luminescenzlicht hervor.

Auffällig ist, dass bei Steigerung der Stromstärke bei gewöhnlicher Temperatur, wodurch der Stickstoff ebenfalls sehr stark erhitzt wurde, das rote positive Licht *nicht* verschwand (§ 3), wie beim gewöhnlichen Erhitzen, sondern im Gegenteil intensiver wurde. Diesen Punkt müssen noch weitere Versuche aufklären.

Resultate.

1. Sowohl bei constantem Druck, als auch bei constanter Gasdichte zerfällt bei gesteigerter Temperatur das ungeschichtete positive Licht in Schichten, die durch Steigerung der Stromstärke grösser, verwaschener und heller werden. Bei noch höheren Temperaturen zieht sich das positive Licht nach der Anode hin zurück, sodass schliesslich die Entladung eine dunkle wird.

2. Eine Steigerung der Temperatur der Kathode bewirkt, dass das Glimmlicht sich weiter ausdehnt und zwar um so mehr, je geringer der Druck ist. Die Steigerung der Temperatur hat also denselben Einfluss, wie Steigerung der Stromintensität.

3. Der Gradient in der positiven leuchtenden Säule ist unabhängig von dem Kathodengefälle.

4. Der Gradient im positiven, ungeschichteten Licht ist bei constanter Gasdichte unabhängig von der Temperatur.

5. Beim Erwärmen unter constantem Druck nimmt der Gradient im positiven, ungeschichteten Licht ab, und zwar langsamer als die Gasdichte.

6. Das Kathodengefälle ist, solange die Kathode noch nicht ganz bedeckt und nicht bis zur Weissglut erhitzt ist, unabhängig von der Temperatur.

7. Steigert man die Stromstärke, nachdem die Kathode schon ganz bedeckt ist, so nimmt das Kathodenpotential zu, und zwar geradlinig mit der Stromstärke zu.

8. Mit wachsender Stromstärke nimmt der Gradient bei der dunklen Entladung zu.

9. Bei constanter Gasdichte nimmt der Gradient mit der Temperatur bei der dunklen Entladung zu.

10. Bei constantem Druck nimmt der Gradient bei der dunklen Entladung mit der Temperatur ab.

11. Der Gradient nimmt von der Anode nach der Kathode bei der dunklen Entladung ab und zwar ist der Gradient ungefähr proportional der Entfernung von der Kathode.

12. Mit steigender Temperatur nimmt die Gesamtpotentialdifferenz zwischen den Elektroden anfangs langsam, dann rasch ab, erreicht ein Minimum, um dann wieder zu steigen.

13. Das Minimum des Potentiales liegt bei einer und derselben Röhre bei einer um so niedrigeren Temperatur, je geringer das Anfangspotential, oder, was dasselbe ist, je geringer der Anfangsdruck ist.

Erlangen, Physikal. Institut, 1. December 1899.

(Eingegangen 19. Februar 1900.)

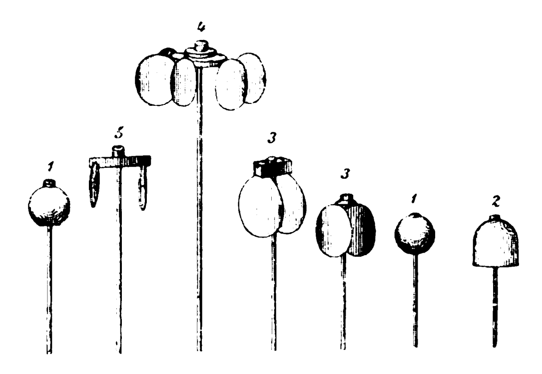
2. *Ueber mechanische Bewegungen unter dem Einfluss von Kathodenstrahlen und Röntgenstrahlen; von L. Graetz.*

1. Die in evacuirten Röhren auftretenden Rotationen von leicht beweglichen Körpern unter dem Einfluss von Kathodenstrahlen werden vielfach als Beweis für die Hypothese der geschleuderten Teilchen angesehen. Bei Röntgenstrahlen liessen sich solche Rotationen bisher nicht erzeugen, was zuweilen als Beweis dagegen angesehen wird, dass auch diese aus geschleuderten Teilen bestehen. Indes beobachtet man in Crookes'schen Röhren beim allmählichen Evacuiren, dass die Rotation von passend aufgesetzten Körpern schon sehr bald anfängt. lange ehe noch merkliche Kathodenstrahlen auftreten. In den käuflichen Röhren sind auf die beweglichen Glasglocken etc. häufig Figuren aus phosphorescirender Masse aufgetragen. Man findet nun, dass die Glocke bereits rotirt, ehe noch diese Figuren phosphoresciren, sodass also darnach die Kathodenstrahlen nicht unbedingt zur Rotation notwendig sind. Mit der Ausbildung kräftiger Kathodenstrahlen wird allerdings die Rotation bedeutend lebhafter. Evacuirt man aber weiter, so beobachtet man, dass, wenn das Vacuum sehr hoch getrieben wird, die Rotationen aufhören, obwohl immer noch kräftige Kathodenstrahlen vorhanden sind, die das Glas und die gemalten Figuren zu lebhafter Phosphorescenz bringen. Es ergiebt sich daraus, dass diese mechanischen Bewegungen schon eintreten, ehe merkliche Kathodenstrahlen vorhanden sind und wieder aufhören, während noch starke Kathodenstrahlen existiren, sodass also die Erklärung dieser Rotationen jedenfalls nicht eine so einfache sein kann, dass der Stoss der bewegten Teile der Kathodenstrahlen die Rotation hervorbringt.

2. Es lassen sich nun aber auch durch passende Anordnungen bei Röntgenstrahlen sehr leicht derartige Rotationen hervor-



bringen und der Mechanismus, durch welchen diese zu stande kommen, lässt sich vollständig aufklären, sodass man dadurch, da in evacuirten Röhren dieselben Bedingungen herrschen, auch die Erklärung für die Bewegungen unter Kathodenstrahlen gewinnt. Bisherige Versuche, etwaige Bewegungen unter dem Einfluss der Röntgenstrahlen zu finden, verliefen negativ. Es wurden Radiometer den Strahlen ausgesetzt[1]) und die Flügel rotirten nicht nur nicht, sondern es fand sogar eine Hemmung schon vorhandener Bewegungen statt, was offenbar auf elektrostatischer Anziehung beruht und auch so gedeutet wurde.[2]) Bei den Versuchen, über die hier berichtet wird, wurden leichte Körper aus dielektrischer Substanz, Paraffin, Schwefel, Ebonit drehbar auf



Spitzen aufgesetzt. Sie wurden zum Teil in der Form von Kugeln wie in der Figur, Nr. 1, angewendet, wobei die Kugel in der Richtung des verticalen Durchmessers durchbohrt und die Bohrung oben durch ein Achathütchen verschlossen wurde. Es wurden ferner glockenförmige Körper (Figur, Nr. 2) benutzt, dann Körper, die aus zwei parallelen, verticalen hängenden runden Scheiben aus dem Dielektricum bestanden, die an einem Querstück aus Ebonit befestigt waren, in dessen Mitte ein Achat sass (Figur, Nr. 3), oder endlich Körper, die eine Reihe von Scheiben speichenförmig an einem Mittelstück trugen, welches durch den Achat auf die Spitze gesetzt wurde (Figur, Nr. 4). Die letzteren Formen der Körper eignen sich zur Projection der Be-

1) Gossart u. Chevallier, Compt. rend. **122.** p. 316. 1896.

2) J. R. Rydberg, Compt. rend. **122.** p. 715. 1896; Fontana u. Umani, Rendic. Acc. Lincei (5) **5.** p. 170. 1896.

wegungen, welche bei Kugeln und Glocken nicht ohne weiteres möglich ist. Man kann auch metallische Scheiben (Figur, Nr. 5) an einem isolirenden Querstück aufsetzen. Diese verhalten sich im wesentlichen ebenso, wie die dielektrischen. Dagegen mit ganz metallischen Körpern (ohne Isolation zwischen den einzelnen Teilen) gelingen die Versuche nicht.

Bringt man diese Körper, auf eine Nadelspitze aufgesetzt, zwischen zwei Condensatorplatten und bringt zwischen den Platten durch eine Hochspannungsbatterie oder eine Influenzmaschine ein constantes elektrisches Feld hervor, so bleiben die Körper in Ruhe. Sobald man aber durch eine Röntgenröhre Strahlen in dieses Feld hineinwirft, beginnen die Körper zu rotiren und rotiren so lange, als die Bestrahlung dauert. Dabei ist es ganz gleichgültig, ob die Strahlen von der Seite oder von oben oder von unten in das Feld hineingeworfen werden. Der Sinn der Rotation ist unbestimmt und hängt von der Anfangstendenz ab. Die Körper können sowohl in dem einen Sinne, wie im andern Sinne rotiren. Am einfachsten wird der Versuch so angestellt, dass man den Inductionsapparat selbst, mit dem man die Röntgenröhre betrübt, zur Erzeugung des constanten Feldes in der Weise benutzt, dass man die Röntgenröhre mit den Condensatorplatten verbindet. Dann überwiegt die Spannung des Oeffnungsstromes auch an den Condensatorplatten und das Feld verhält sich wie ein constantes. Bei diesem Versuch waren Condensatorplatten von der Grösse, wie sie die Kohlrausch'schen Condensatoren besitzen, angewendet. Die Röntgenröhre hatte dabei also immer einen nicht kleinen Abstand von dem drehbaren Körper. Die Erscheinung erwies sich als ein Analogon zu den von Quincke[1]) entdeckten Rotationen von Körpern in dielektrischen Flüssigkeiten, die von Heydweiller[2]) erklärt sind. Es lassen sich die Bewegungen aus dieser Theorie vollständig ableiten[3]), da die Luft durch Röntgenstrahlen ionisirt, etwas leitend wird, und sich also ganz wie eine der Flüssigkeiten bei den Quincke'schen Versuchen verhält.

1) G. Quincke, Wied. Ann. 59. p. 417. 1896.
2) A. Heydweiller, Verh. phys. Ges. 16. p. 32. 1896.
3) L. Graetz, Ann. d. Phys. 1. p. 530. 1900.

3. Wenn man aber die Condensatorplatten kleiner nimmt, etwa von 5 cm Durchmesser, so beobachtet man zwar an den ganz dielektrischen Körpern immer noch, dass der Sinn der Rotation ein beliebiger ist, aber wenn man den Körper, der aus zwei verticalen Kupferscheiben mit verbindendem isolirenden Querstück besteht, in das Feld bringt, und die Strahlen von der Seite in das Feld dringen lässt, so kehrt sich die Richtung der Rotation um mit der Umkehrung des Feldes. Man findet leicht, dass auf die Richtung der Rotation die Stellung der Röntgenröhre einen Einfluss hat. Bezeichnet man eine von den beiden gleichen Condensatorplatten als I, die andere als II, und sieht man von I nach II hin, so kann die Röntgenröhre rechts oder links stehen. Steht sie rechts, so ergiebt sich, wenn I positiv, II negativ geladen ist, eine Drehung entgegengesetzt dem Uhrzeiger, bei Umkehrung des Feldes dreht sich die Richtung der Rotation um. Bringt man die Röntgenröhre links an, so findet bei der ersten Richtung des Feldes Rotation im Uhrzeigersinn, bei der zweiten gegen den Uhrzeiger statt. Die verschiedenen Fälle lassen sich in der Weise zusammenfassen, dass die Rotation immer von der positiv geladenen Platte über die Röntgenröhre zur negativ geladenen Platte geht. Lässt man die Röntgenstrahlen nicht von der Seite, sondern von oben in das Feld fallen, so bleibt der Sinn der Drehung wieder unbestimmt, wenn die ebene Antikathode genau senkrecht über der Mitte des drehbaren Körpers liegt; ist sie etwas nach rechts oder links gestellt, so findet wieder die Drehung in dem oben festgestellten Sinne statt.

Dass die Lage der Röntgenröhre einen Einfluss auf die Rotation hat, führt naturgemäss dazu anzunehmen, dass die Ladung, die die Wand der Röntgenröhre besitzt, den Rotationssinn mit bestimmt. Diese Wand ist immer negativ geladen und sie muss also die positiv geladenen Teile des drehbaren Körpers, welche der positiv geladenen Condensatorplatte gegenüberliegen, anziehen. Dadurch erklärt sich die Richtung der Rotation in jedem Falle. Dass dieser Einfluss nur auf den metallischen Körper, nicht auch auf die dielektrischen stattfindet, kann dann nur daher rühren, dass, wenn die durch Leitung positiv geladene Scheibe der Röntgenröhre sich zudreht,

sie noch durch Influenz stärker positiv wird. Die Ladung wird dann bei der Weiterbewegung durch die Leitung neutralisirt und die Rotation dauert an. Bei den dielektrischen Körpern ist die Influenzwirkung geringer und daher bleibt der Sinn der Rotation unbestimmt. Wenn das richtig ist, so muss man aber auch bei dielektrischen Körpern einen bestimmten Sinn der Rotation erzwingen können, wenn man nur die Röntgenröhre näher an dieselben bringt. Das ist in der That der Fall und die Erscheinungen sind, wenn man sie allein, ohne die vorhergehenden Erklärungen betrachtet, sehr auffallend. Es wurde zu dem Zwecke die eine Platte des Kohlrausch'schen Condensators entfernt und an ihre Stelle eine kleine Kugel angebracht. Der drehbare Körper befand sich zwischen Kugel und Platte. Man kann nun die Röntgenröhre nahe an den Körper heranbringen und es lässt sich nun bei allen drehbaren Körpern, den leitenden sowohl wie den dielektrischen, der Sinn der Rotation durch Umkehrung des Feldes umkehren. Die Rotation geht auch hierbei immer von dem positiv geladenen Teile des Condensators über die Röntgenröhre zum negativ geladenen.

4. Indes sind hiermit die Erscheinungen noch nicht auf die einfachste Form gebracht. Man braucht nämlich schliesslich gar keinen geladenen Condensator, um die Rotation hervorzubringen, sondern es genügt, wenn man die drehbaren Körper einfach in der Luft in der Nähe der Röntgenröhre so aufstellt, dass sie bestrahlt werden. Die Rotation findet dann in sehr lebhafter Weise statt und zwar zunächst so, dass der Sinn der Drehung völlig unbestimmt bleibt, dass die Körper sowohl in dem einen Sinne als in dem anderen rotiren. Wenn man will, hat man hierin das vollständige Analogon zur Rotation von Körpern unter dem Einfluss der Kathodenstrahlen, nur dass letztere eben bloss in den evacuirten Röhren, diese aber in freier Luft vor sich gehen. Wollte man aber auch hieraus auf directen Stoss von geschleuderten Teilchen schliessen, so würde man irren. Es zeigt sich nämlich, dass die Rotation aufhört, wenn man beliebige Substanzen, durch welche die Röntgenstrahlen hindurchgehen, zwischen die Röntgenröhre und den drehbaren Körper bringt. Stellt man eine Ebonitscheibe oder eine abgeleitete oder eine isolirte Aluminiumplatte dazwischen,

so ist es nicht möglich, die Rotation zu erzeugen. Es beweist das, dass die Rotationen hierbei noch auf demselben Grunde beruhen, wie vorher. Durch die Strahlen wird die Luft in der Nähe des drehbaren Körpers leitend gemacht. Das Glas der Röntgenröhre selbst ist negativ elektrisch. Dadurch wird nun ein Teil der Elektricität durch Leitung auf den Körper übertragen und durch die Abstossung der gleichnamigen Elektricitäten beginnt die Rotation. Sie wird dauernd aufrecht erhalten dadurch, dass die Ladungen des Körpers auf der entgegengesetzten Seite wieder durch Leitung fortgeführt werden.

Man kann auch hierbei, bei diesen freien Rotationen, den Sinn der Drehung nach Belieben bestimmen und ändern, wenn man in der Nähe der Röhre seitlich von dem drehbaren Körper in passendem Abstand einen Metallstab isolirt oder nicht isolirt, aufstellt. Schon ein eisernes Stativ, durch welches man etwa die Spitze tragen lässt, auf der die Körper sitzen, genügt zu diesem Zweck. Es dreht sich dann der Körper immer in der Richtung von dem Stab zur Röntgenröhre, sodass man durch Umstellen des Stabes auch die Rotationsrichtung ändert. Der Stab wird hierbei durch Influenz von der Röntgenröhre zunächst positiv elektrisch und man hat daher denselben Fall, der oben bei dem Condensator erörtert wurde.

5. Weitere Consequenzen dieser Erscheinungen einer folgenden Mitteilung vorbehaltend, möchte ich zum Schluss nochmals auf die Rotationen in Crookes'schen Röhren zurückkommen. Es ist die Ansicht kaum abzuweisen, dass auch dort die Bewegungen einfach auf elektrostatischer Abstossung der geladenen Teile des Körpers und der Zerstreuung dieser Ladung durch Leitung beruhen. Die Kathodenstrahlen führen ihre negative Elektricität dem Körper zu und laden dessen zunächst liegende Teile. Diese werden von der Kathode abgestossen und durch die Leitung des Gases in der evacuirten Röhre verlieren sie dann ihre Ladung, sodass die Rotation nicht zum Stillstand kommt, sondern dauernd fortgeht. Dadurch, dass man die Kathodenstrahlen durch den Magneten auf gewisse Partien des Körpers bringen kann, kann man die Richtung der Rotation beeinflussen. Die Rotationen treten aber bei passender Anbringung des rotirenden Körpers schon auf, noch bevor Kathodenstrahlen sich merklich entwickeln. Man

hat dann eben auch schon von der Kathode ausgehend negative Teile, nur mit geringerer Geschwindigkeit, von der Anode ausgehend positive, welche die gegenüberliegenden Teile laden und damit die Abstossung hervorbringen. Wird das Vacuum in einer Crookes'schen Röhre sehr hoch, sodass die Leitung des Gases in derselben sehr gering wird, so wird die auf dem drehbaren Körper erzeugte Ladung nicht mehr zerstreut und Rotationen finden dann nicht mehr statt.

Versuche, ebensolche Bewegungen mit ultraviolettem Licht und Radiumstrahlen zu erhalten, sind bisher nicht von Erfolg gewesen, im letzteren Falle vermutlich wegen der geringen Stärke des Präparates.

München, Phys. Inst. d. Univ., Februar 1900.

(Eingegangen 22. Februar 1900.)

3. *Störungen am kritischen Punkt von reinen Flüssigkeiten und Mischungen; von R. v. Hirsch.*

Die am kritischen Punkt von reinen Stoffen und Gemischen beobachteten Erscheinungen haben zu einer Reihe von Auffassungen Anlass gegeben, welche die einfache Theorie von van der Waals-Andrews verwerfen und in den Ideen von de Heen[1], Galitzine[2], Battelli[3] ihren schärfsten Ausdruck finden. Diese scheinbaren Anomalien sind, wie besonders Gouy[4] und Kuenen[5] gezeigt haben, durch Störungen veranlasst, welche in diesem Gebiete deshalb einen so bedeutenden Einfluss ausüben, weil hier die Aenderung des specifischen Volumens mit dem Druck $(dv/dp) = \infty$ wird.

Da sich im Lauf hierher gehöriger Experimente einige Ergänzungen und Aenderungen der bisherigen Darstellungen dieser Einflüsse als nötig ergeben haben, so soll deren Theorie im Anschluss an die genannten Arbeiten im Folgenden gegeben werden. Die erwähnten Versuche, die bereits bei den citirten Autoren in ähnlichen Formen zu finden sind, wurden mit sorgfältig gereinigtem Aether ausgeführt, der vor der Benutzung mehrmals über Natrium destillirt worden war. Derselbe befand sich in zugeschmolzenen Glasröhren, die zur Entfernung von Luft stets an der Pumpe geschlossen wurden. Die Heizung geschah durch Dämpfe von Dimethylanilin, welches unter regulirbarem Druck zum Sieden gebracht, eine geeignete Temperatur constant zu erhalten und mit wechselnder Geschwindigkeit zu verändern gestattete.

---

1) P. de Heen, Bull. de l'acad. Belge (3) **24.** p. 96 u. p. 267. 1892; **25.** p. 14 u. p. 695. 1893; **27.** p. 580. 1894.

2) B. Galitzine, Wied. Ann. **50.** p. 521. 1893.

3) A. Battelli, Ann. chim. et phys. (6) **29.** p. 400. 1893.

4) Gouy, Compt. rend. **115.** p. 720. 1892; **116.** p. 1289. 1893; **121.** p. 201. 1895.

5) J. P. Kuenen, Comm. of the Lab. of Phys. Leiden, Heft 1, 4, 8, 11, 13, 17; Arch. Néerl. (2) **1.** p. 22, 270, 274, 277, 331, 342. 1898.

I. Reine Substanzen.

Der Betrachtung zu Grunde gelegt sei eine Erhitzung bei constantem Volumen (isochore Zustandsänderung).

1. Ohne Störung ergiebt die Theorie von **van der Waals** folgendes: Bei steigender Temperatur wird die Menge der einen Phase $= 0$, ausser für die kritische Isochore AB, auf der am kritischen Punkt beide Phasen in endlicher Menge identisch werden. Die kritische Erscheinung (Verschwinden bez. Erscheinen des Meniscus im Innern des Rohres) ist auf diese eine Isochore beschränkt, wäre also experimentell schwer zu verwirklichen (Fig. 1).

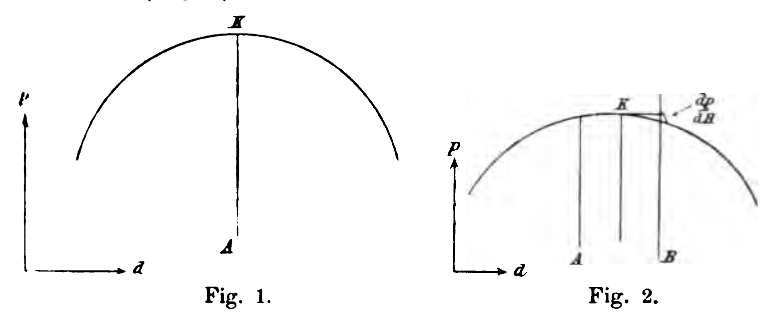


Fig. 1. Fig. 2.

2. Unter der Wirkung der Schwere: Anstatt der Gleichgewichtsbedingung $p = \text{const.}$ im ganzen Rohr gilt hier[1]):

$$\frac{dp}{dh} = -dg,$$

wo p den Druck, h die Niveauhöhe im Rohr, d die Dichte, g die Beschleunigung durch die Schwere bedeuten. Obwohl dieser Druckunterschied gegenüber dem Gesamtdruck minimal ist, bewirkt er ein erhebliches Dichtegefälle am kritischen Punkt, da hier eben $(dv/dp) = \infty$ ist. Die kritische Erscheinung tritt ein, wenn t gleich der kritischen Temperatur ϑ, in dem Niveau, in dem p gleich dem kritischen Druck π; sie ist also nicht mehr auf eine Isochore beschränkt, sondern innerhalb eines Isochorenbandes AB sichtbar, dessen Breite bestimmt ist durch

$$\frac{dp}{dH} = -dg,$$

wo H die Rohrlänge bedeutet. (Vgl. Fig. 2.)

1) Vgl. J. W. **Gibbs**, Thermodynamische Studien p. 173.

3. Verzögerung: Da die Herstellung des Gleichgewichtes durch Verdampfung und Diffusion von der Trennungsfläche aus geschieht, so kommt dasselbe beim Erwärmen oder Abkühlen nur langsam zu stande. Dies veranlasst ein Dichtegefälle im gleichen Sinne wie die Schwere, verstärkt also deren Einfluss, verbreitert das Isochorenband *AB*. Die Wirkung der Verzögerung gleicht sich, wie Gouy gezeigt hat[1]), mit der Zeit sehr langsam aus, kann jedoch durch Rühren aufgehoben werden; hierdurch wird zugleich der Einfluss der Schwere beeinträchtigt, da ein Zustand gleichmässiger Dichteverteilung angestrebt wird. Doch können die auftretenden Strömungen der Beobachtung hinderlich werden. Bei gleichmässiger, langsamer Temperaturänderung macht nämlich beim Ueberschreiten des kritischen Punktes die Unstetigkeitsfläche allmählich einem stetigen Uebergang Platz, bez. umgekehrt. Man sieht dies deutlich an dem Bild eines hinter der Versuchsröhre aufgestellten Glühlampefadens, welches die in Fig. 3 angedeutete Wandlung durchmacht.[2]) Bei Benutzung eines derartigen Hülfsmittels genügt die häufig angefochtene „optische“ Methode wohl vollständig zur genauen Bestimmung des kritischen Punktes. Bei zu rascher oder ungleicher Temperaturänderung, bei Strömungen, kurz bei der geringsten thermischen oder mechanischen Störung treten die bekannten Nebel-, Wolken- und Regenbildungen auf, die bei der reinen Erscheinung fehlen. Umgekehrt können durch absichtliche Einwirkungen weitere Anomalien hervorgebracht werden, insbesondere wurde ein doppelter Meniscus an beiden Rohrenden in solchen Fällen mehrmals gesehen.

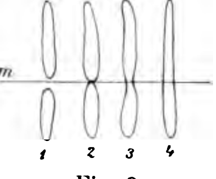


Fig. 3.

Durch Beobachten mittels des Glühfadens erkennt man, dass der Meniscus beim Erhitzen stets etwas höher im Rohr verschwindet als er beim Abkühlen erscheint, wie dies der

1) Gouy, Compt. rend. **116.** p. 1289. 1893.

2) Die Stelle *m* in der Figur entspricht dem Meniscus. In 1 ist derselbe stark ausgebildet, in 2 bereits verflacht, in 3 ist nur mehr eine Einschnürung an der betreffenden Stelle vorhanden, in 4 ist jede Unstetigkeit verschwunden. Moment 3 entspricht dem kritischen Punkt.

angenommenen Verzögerung entspricht, die beim Ueberschreiten des kritischen Punktes sehr bedeutend ist, da hier der Meniscus sehr rasch wandert. Der Sinn der Abweichung ist insbesondere derselbe, ob die Trennungsfläche gegen den kritischen Punkt zu steigt oder fällt, was durch stärkere oder schwächere Füllung des Rohres erreicht werden kann; im zweiten Fall kehrt dieselbe nämlich kurz vor dem Verschwinden nochmals um. Fig. 4 zeigt in übertriebener Weise diesen Gang des Meniscus[1]),

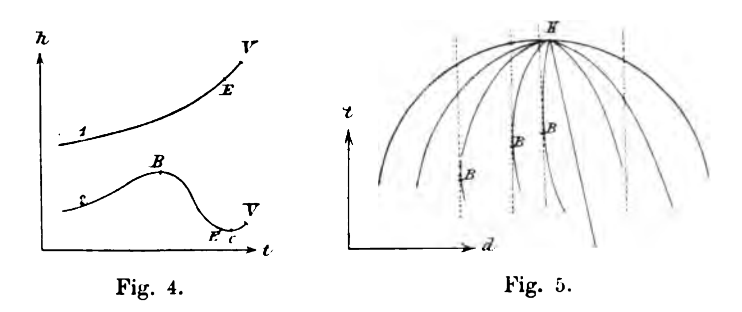


Fig. 4. Fig. 5.

während in Fig. 5 neben den punktirten Isochoren die Curven constanter specifischer Dampfmenge roh gezeichnet sind; diese erhält man mittels der Gleichung

$$\frac{d_1 m + d_2 n}{m + n} = x$$

aus den Grenzcurven[2]), welche die Dichte des gesättigten Dampfes (d_1) und der Flüssigkeit (d_2) angeben. Dieselben enthalten offenbar keinen zweiten Wendepunkt, der dem Punkt C in Fig. 4 entspräche, derselbe ist also nur durch eine Abweichung vom Gleichgewicht hervorgebracht. Ein weiterer Anhaltspunkt dafür, dass es sich nur um Verzögerung handelt, ist der deutliche Einfluss der Geschwindigkeit der Temperaturänderung, die der Versuch zeigt.

---

1) In Fig. 4 entspricht 1 der starken Füllung, 2 der schwachen. In V verschwindet der Meniscus, in E erscheint er.

2) $m : n$ ist das Verhältnis der Dampfmenge zur Flüssigkeitsmenge.

Beispiel.

Temperatur, von 30″ zu 30″ abgelesen	Stand des Meniscus in mm einer Teilung mit willkürlichem Nullpunkt		
	beim Verschwinden	Differenz	beim Erscheinen
194,3			
195,0			
195,5			
195,5	91,2	1,2	—
194,5			90,0
195,2	—	1,5	—
195,9	91,5	—	—
195,0			
194,0	—	1,8	—
196,5	—	—	89,7
193,5			
188,5	—	—	87,0
191,4	—	5,2	—
195,5			
197,2	92,7	—	—

Da die erwähnte Wirkung auch bei sehr langsamer Temperaturänderung nicht ganz verschwindet, und das Thermometer, vor der verzögerten Versuchsröhre voraneilend, beim Verschwinden des Meniscus höhere, beim Erscheinen desselben tiefere Temperaturen zeigt, so ist als kritische Temperatur der Mittelwert aus beiden zu nehmen. Für Aether ergab sich auf diese Weise unter Benutzung von fünf verschiedenen Röhren die Zahl 194,7; der Wert ist etwas höher als er ohne Benutzung des Glühfadens ausgefallen wäre, da derselbe die Unstetigkeit noch anzeigt, wenn bei gewöhnlicher Beleuchtung nichts mehr zu sehen ist.

II. Mischungen.

Das Verhältnis beider Bestandteile, d. h. die mittlere Concentration im ganzen Rohr, sei als constant vorausgesetzt.

1. Ohne Störung: Der Zustand ist im Gegensatz zu reinen Substanzen durch die Temperatur nicht vollständig bestimmt. Druck (p), Dichte (d) und Zusammensetzung (c) ändern sich während der Condensation. Um daher die Erscheinungen über-

sehen zu können, muss eine Abbildung im *p-d-t-* oder *p-c-t-* System gewählt werden. Dieselbe besteht aus zwei Flächen, die flüssigen bez. dampfförmigen *d* (oder *c*) entsprechen, und einen Punkt, den Faltenpunkt[1]) *F* gemeinsam haben. Ihre Projectionen auf die *p-t*-Ebene decken sich (Fig. 6) und bilden die „Grenzcurve", auf der neben dem Faltenpunkt *F* die kritischen Contactpunkte C_1 und C_2 liegen, die bei der räumlichen Darstellung (Fig. 7) in C_1 und C_1' bez. C_2 und C_2' zerfallen. Im Punkt *F* berühren Isotherme und Isobare[2]), die Condensation ist kritisch (Fig. 7, *a*); zwischen *F* und C_1 bez C_2

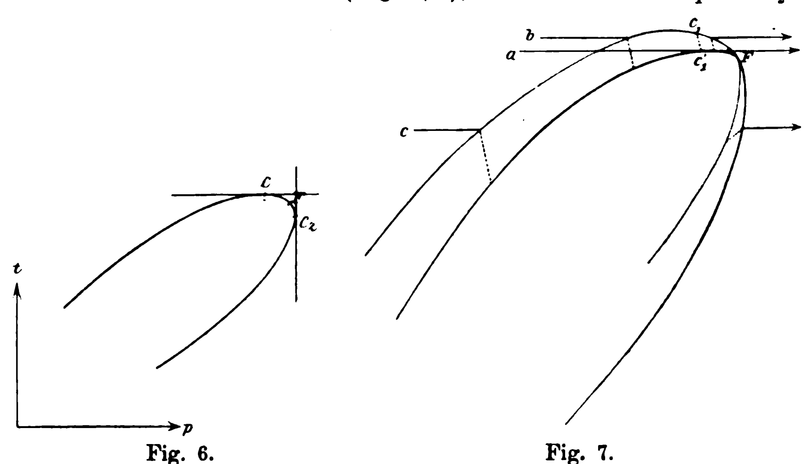


Fig. 6. Fig. 7.

ist die Condensation auf der Isotherme bez. Isobare retrograd, d. h. diese Linien durchsetzen den Zweiphasenraum, indem sie durch die gleiche Fläche ein- und austreten (Fig. 7, *b*). Die während der retrograden Condensation coexistirenden Phasen (in der Figur punktirt verbunden) liegen auf verschiedenen Flächen, die eine besitzt also grössere, die andere kleinere Dichte und Concentration als dem Faltenpunkt entspricht; es ist dies deshalb hervorgehoben, weil aus einigen Stellen in den Abhandlungen von Kuenen die entgegengesetzte Auffassung entnommen werden könnte. Auf allen anderen Isothermen und Isobaren ist die Condensation normal (Fig. 7, *c*), diese Linien treten durch die eine Fläche in das heterogene Gebiet ein, durch die andere aus.

1) Die Bezeichnungen sind die gleichen wie bei Kuenen.

2) In Fig. 7 sind nur die Isothermen gezeichnet.

2. Unter der Wirkung der Schwere: Die Gleichgewichtsbedingungen werden:

$$1. \quad \frac{dp}{dh} = -dg,$$

$$2. \quad \frac{d\mu}{dh} = -g,$$

wo μ die Potentiale der Bestandteile bedeuten.[1]) Druck und besonders Dichte und Concentration ändern sich also mit der Höhe im Rohr. Dies bedingt eine doppelte Abänderung der Abbildung für die Umgebung des Faltenpunktes:

I. Statt jedes abbildenden Punktes tritt eine Curve, welche alle infolge der Schwere gleichzeitig im Rohr vorhandenen

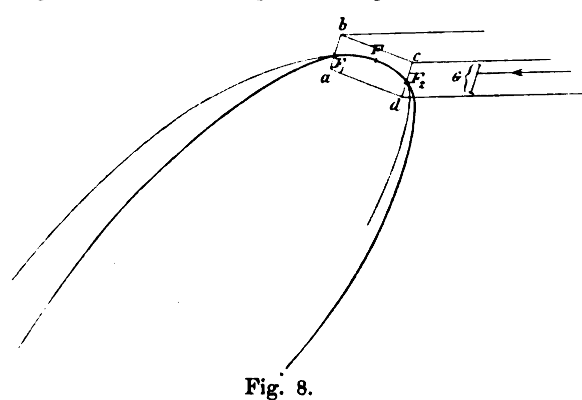


Fig. 8.

Zustände zusammenfasst (Gravitationscurve nach Kuenen[2]); Isothermen und Isobaren sind daher in Bänder verbreitert.

II. Die beiden Grenzflächen des heterogenen Raumes, welche für eine bestimmte Zusammensetzung galten, verbreitern sich auf beiden Seiten des Faltenpunktes in Gebiete, die eigentlich zu benachbarten Zusammensetzungen gehören, durch die Wirkung der Schwere aber gleichzeitig im Rohr vorhandenen Zuständen entsprechen. Die so verbreiterten Flächen haben ein Stück der Faltenpunktslinie für Gemische aus den betrachteten Bestandteilen gemeinsam ($F_1 F_2$, Fig. 8).

Wo die Gravitationslinien G die Faltenpunktscurve treffen, berühren sie dieselbe; wo auf einer Isotherme oder Isobare diese Berührung stattfindet, ist die Condensation kritisch;

1) Vgl. J. W. Gibbs, l. c.
2) J. P. Kuenen, l. c. Nr. 17.

dieser Fall ist also infolge der Schwerkraft auf ein grösseres Gebiet (*a b c d*) ausgedehnt. Diese Vergrösserung des kritischen Raumes geschieht offenbar auf Kosten des Bereichs retrograder Condensation, der hierdurch vollständig verdeckt werden kann; in Fig. 8 ist dieser Fall, der den Versuchen von Kuenen entspricht, angenommen.[1])

3. Verzögerung verstärkt, wie bei reinen Substanzen die Wirkung der Schwere, Rühren wirkt beiden entgegen, ist daher zur Beobachtung retrograder Condensation von Kuenen mit Erfolg angewandt worden. Beide Störungen veranlassen aber noch eine weitere Schwierigkeit. Da die Faltenpunktstemperatur, bei der die kritischen Erscheinungen im geschlossenen Rohr auftreten, von der Concentration abhängt, so ändert sich dieselbe infolge der Schwere mit der Höhe, infolge der Verzögerung mit der Zeit und entspricht nicht der angewandten Zusammensetzung; d. h. die Dichte und Concentration am Faltenpunkt bietet der directen Bestimmung dieselbe Schwierigkeit, wie die kritische Dichte reiner Substanzen, was um so hinderlicher ist, da hier eine dem Durchmessergesetz von Matthias entsprechende Abhülfe nicht bekannt ist. Die Verzögerung ist bei Gemischen grösser als bei einfachen Stoffen; folgender Versuch ist ein Beispiel für diese Wirkung.

Lösung von 3,4 g Borneol in 100 ccm Aether.

Beobachtete Temperatur der kritischen Erscheinung.

	Temperatur		
1.	194,5 194,6 195,7 196,0	Dauer etwa 30 sec	Der Meniscus verschwand etwa um 1/3 Rohrlänge von der oberen Spitze entfernt und verschob sich langsam nach unten.
Nach 12 Stunden:	197,4 197,9 198,5 198,6	Dauer etwa 30 sec	

Der Endzustand ist hier noch nicht erreicht.

	Temperatur		
2.	194,5 195,2 195,6 195,7	Dauer etwa 30 sec	Der Meniscus verschwand fast am oberen Rohrende

Endzustand nahezu erreicht.

1) In Fig. 8 sind nur die Isothermen gezeichnet.

Durch Berücksichtigung der erörterten Einflüsse lässt sich wohl die grosse Zahl der von verschiedenen Autoren beschriebenen Anomalien am kritischen Punkt in befriedigender Weise erklären, ohne den Boden der einfachen Theorie von van der Waals zu Gunsten neuer Hypothesen zu verlassen.

Vorliegende Arbeit wurde im physikalischen Institut der Universität München ausgeführt, deren Leiter, Hrn. Prof. Graetz, ich an dieser Stelle meinen besten Dank ausspreche für die liebenswürdige Unterstützung, welche mir die Anstellung der nötigen Versuche ermöglichte.

(Eingegangen 27. Februar 1900.)

4. *Bestimmung einiger Magnetisirungszahlen;* *von Stefan Meyer.*

I. Vanadiumchlorid.

Zu den paramagnetischen Elementen der Gruppe mit dem Atomgewicht zwischen 50 und 60 gehört auch das Vanadium. Da aus Salzlösungen desselben noch keine Bestimmungen der Atomsusceptibilität vorliegen und andererseits Vanadiumchlorid (VCl_2) so stark magnetisch ist, dass sich auch bequem unmagnetische Lösungen herstellen lassen dürften, wie sie die Herren H. du Bois, O. Liebknecht und A. P. Wills[1]) zuletzt zu ihren Messungen verwendet haben, gebe ich hier die von mir nach der ausserordentlich bequemen, rasch durchführbaren und genauen Methode[2]) mittels einer langen cylindrischen Glasröhre, die auf der einen Seite einer eisenfreien Waage angebracht in das Magnetfeld reicht, gewonnenen Resultate, um eventuell einen Vergleich mit Messungen nach der Methode des Hrn. du Bois zu ermöglichen.

Die Substanz war als rein von Merck-Darmstadt bezogen und wurde in fünf verschiedenen Concentrationen — und zwar bedeutet im Folgenden Mol die Zahl der Grammmolecüle im Liter — gemessen. Die angegebenen Werte der Magnetisirungszahl $\varkappa$ sind Mittel für Messungen bei Feldstärken zwischen 10000 und 17000 [C.G.S.], indem sich wie bei früheren Untersuchungen eine Abhängigkeit von der Feldintensität in diesem Bereiche nicht nachweisen liess. Die Dichte γ bezieht sich auf 17,5° C.

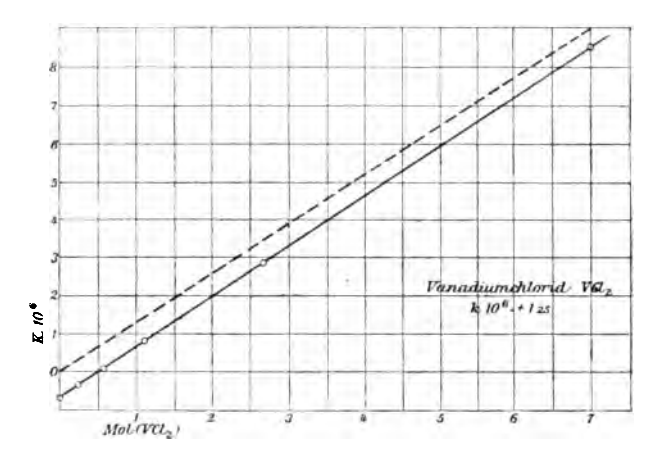
γ	Mol (VCl_2)	$\varkappa \cdot 10^6$
1,792	6,96	+ 8,5
1,327	2,72	+ 2,84
1,140	1,13	+ 0,80
1,057	0,55	+ 0,036
1,024	0,25	− 0,357

1) H. du Bois, O. Liebknecht u. A. P. Wills, Ann. d. Phys. 1. p. 178 u. 189. 1900. Die dort p. 196 von den Herren du Bois und Liebknecht geäusserte Vermutung, dass unter anderen Vanadium wenige oder gar keine paramagnetische Verbindungen liefere, hat sich nicht bestätigt.

2) G. Jäger u. St. Meyer, Wied. Ann. 67. p. 707. 1899.

Die beigegebene Figur giebt eine graphische Darstellung des Verlaufes, die gestrichelte Gerade deutet den Gang nach Abzug des Wertes für Wasser, der bei 17,5° zu $-0{,}067 \cdot 10^{-6}$ angenommen wurde[1], an.

Der Wert für die moleculare Susceptibilität für VCl_2 ergiebt sich hieraus als $k = + 1{,}25 \cdot 10^{-6}$.



Wie schon bei den von Hrn. G. Jäger und mir gemeinschaftlich untersuchten Lösungen[2], zeigt sich auch hier völlige Unabhängigkeit von der Dissociation. Es ist dies insbesondere wichtig für die Methode der unmagnetischen Lösungen, die dieses Resultat von vornherein unbedingt voraussetzt.

Was den absoluten Wert von k anbelangt, möchte ich, ohne indes vorläufig auf diese Gesetzmässigkeit besonderes Gewicht zu legen, darauf aufmerksam machen, dass die gefundene Zahl wieder in einfacher Beziehung zu den von Hrn. G. Jäger und mir erhaltenen Werten für die Eisengruppe[3]) steht und die seinerzeit gegebene Reihenfolge in der Weise ergänzt, dass sich

$$V : Ni : Cr : Fe' : Co : Fe : Mn = \tfrac{1}{2} : 2 : 2\tfrac{1}{2} : 3 : 4 : 5 : 6$$

verhalten.

1) Vgl. G. Jäger u. St. Meyer, Wied. Ann. **67.** p. 712. 1899.

2) G. Jäger u. St. Meyer, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien (IIa) **106.** p. 594 u. p. 623. 1897, (IIa) **107.** p. 5. 1898.

3) l. c. (IIa) **107.** p. 13. 1898.

Als Annäherungsregel mag diese Beziehung immerhin von Nutzen sein, auch wenn spätere Untersuchungen sie nicht unbedingt bestätigen sollten.

II. Nachtragsbestimmungen an seltenen Erden.

Anschliessend an die Messungen an trockenen anorganischen Verbindungen[1]) habe ich nunmehr noch zwei von Hrn. P. T. Cleve stammende Präparate, die mir von Hrn. F. Exner zu diesem Zwecke überlassen wurden, untersucht. Es ergab sich unter Benutzung der in der angezogenen Abhandlung gebrauchten Bezeichnungen bei 17° C.

Substanz	μ	g	a	n	p	$\varkappa . 10^6$	$k . 10^6$
Gd_2O_3	360,3	0,881	1244	3,5	+6,22	+ 205	+59,2
$Sa_2(SO_4)_3 + 8H_2O$	732	0,7915	1415	1,9	+1,39	+43,1	+22,3

Das ergiebt für $\frac{1}{2} Gd_2O_3$ den Wert von $29,6 . 10^{-6}$, während für das ältere Marignac'sche Präparat sich $23,2 . 10^{-6}$ ergeben hatte. Das Samariumsulfat, das von gleicher Provenienz war, wie die früher untersuchten Samariumverbindungen, ergiebt die Atomsusceptibilität $11,2 . 10^{-6}$ gegen $10,1 . 10^{-6}$ aus Sa_2O_3 und $12,1 . 10^{-6}$ aus $Sa(NO_3)_3$, also befriedigende Uebereinstimmung. Die mangelnde Uebereinstimmung im Gadoliniumoxyd wird durch die Untersuchung der Funkenspectra dieser Substanzen durch die Herren F. Exner und E. Haschek einigermaassen aufgeklärt.[2]) Diese fanden, dass Gd und Sa zusammen noch einen dritten Körper mit einer grossen Linienzahl enthalten. Nach der unlängst aufgestellten Beziehung zwischen Linienzahl und Susceptibilität[3]) ist dieses neue Element als stark magnetisch anzusehen und es ist zu vermuten, dass die beiden Präparate von Marignac und Hrn. Cleve nicht gleichviel dieses Körpers enthalten.

Leider haben es die Herren H. du Bois und O. Liebknecht bei ihren Messungen an seltenen Erden unterlassen,

---

1) St. Meyer, Wied. Ann. **69**. p. 236. 1899.

2) F. Exner u. E. Haschek, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, XVIII. Mitteilung. 1900.

3) St. Meyer, Wied. Ann. **69**. p. 263. 1899.

auf die chemischen Verunreinigungen und Vermengungen dieser Elemente einzugehen. Da diese Forscher aber teilweise gleichfalls von Hrn. P. T. Cleve stammende Substanzen[1]) untersucht haben, dürften die in den Funkenspectren durch die Herren F. Exner und E. Haschek klargelegten Verhältnisse auch für ihre Resultate einigermaassen in Rücksicht gezogen werden können.

Wien, Physikal. Inst. d. Univ., Februar 1900.

1) Von den von mir früher untersuchten seltenen Erden stammten die Präparate von Sa, Er von P. T. Cleve, Yb und Sc von Nilson, Gd von Marignac.

(Eingegangen 2. März 1900.)

5. *Ueber Atommagnetismus und Molecularmagnetismus; von Stefan Meyer.*

Im Anschluss an die unlängst veröffentlichten Bestimmungen der Magnetisirungszahlen anorganischer Verbindungen[1]) habe ich nunmehr noch specielle Untersuchungen für Kupferverbindungen durchgeführt. Sie waren erforderlich, weil, wie ich schon damals hervorhob[2]), beim Kupfer die Verhältnisse nicht ganz klar gestellt erschienen und, wenn auch spurenweise Beimengungen, insbesondere von Nickel, sich spectrisch fast in allen Verbindungen des Kupfers nachweisen lassen dürften, es doch schwer fällt, diese allein zur Erklärung des auffallenden paramagnetischen Charakters vieler Kupferverbindungen heranzuziehen. Dazu kommt noch, dass schon G. Wiedemann die Ansicht vertreten hatte, dass Cupro- und Cuprisalze sich in ihrem magnetischen Wesen unterscheiden[3]), was sich allerdings, wie ich im Folgenden zeigen werde, nicht allgemein bestätigt hat.

In der oben citirten Abhandlung habe ich bereits darauf hingewiesen[4]), dass bei einzelnen diamagnetischen Verbindungen der Molecularmagnetismus eine grössere Diamagnetisirungszahl liefert, als der Summe der Atommagnetismen entspricht und zwar dann, wenn in der Verbindung eine erhebliche Volumendilatation eintritt, wie bei AgJ, HgJ_2 und PbJ_2. Es lag nahe zu untersuchen, ob sich diese Verhältnisse auch umkehren, das heisst, welchen Einfluss Volumencontractionen bei der Verbindung haben, wozu sich die Salze des Kupfers mit ihren besonders kleinen Susceptibilitätscoefficienten besonders eignen.

In der folgenden Tabelle sind zunächst die Magnetisirungszahlen und Hülfsgrössen, nach der von mir für Pulver bisher

1) St. Meyer, Wied. Ann. **69.** p. 236. 1899.

2) l. c. p. 247.

3) G. Wiedemann, Pogg. Ann. **126.** p. 1. 1865; **135.** p. 177. 1868. Auch Hr. J. Königsberger macht neuerdings darauf aufmerksam, vgl. Ann. d. Phys. **1.** p. 175. 1900.

4) l. c. p. 250.

benutzten Methode bestimmt[1]), in der früher angewendeten Bezeichnung angeführt. Die Substanzen sind alle, wo nichts anderes bemerkt ist, aus dem nahezu absolut reinen Kupfer, das ich der Freundlichkeit des Hrn. E. Murmann verdanke und das derselbe zur Atomgewichtsbestimmung verwendet hatte, gewonnen. Sie wurden zum Teil von Hrn. A. Nabl im hiesigen III. Chemischen Laboratorium in bereitwilligster Weise mit ganz besonderer Sorgfalt hergestellt und danke ich demselben an dieser Stelle bestens für seine Bemühungen. Mit Rücksicht auf die geringen mir zur Verfügung stehenden Mengen sind die Angaben des k für Cu_2Br_2 und Cu_2J_2 etwas weniger genau als die der anderen Salze, ohne dass dadurch der allgemeine Ueberblick über ihr magnetisches Wesen leidet.

Die Messungen sind alle bei Zimmertemperatur 16—18° C. gemacht.

Einige Salze, die an der Luft basisch werden, wurden in mit einem Stöpsel versehenen Gläschen untersucht.[2])

Tabelle 1.

Substanz	μ	g	a	n	p	$K.10^6$	$k.10^6$
$CuCl_2$	134,6	0,538	891	6,7	+0,2891	+1,015	+0,153
$CuBr_2$ (Merck)	223,5	2,624	2509	11,2	+0,204	+6,13	+0,546
Cu_2Br_2	287,2	0,373	1505	5,2	−0,0049	−0,250	−0,048
Cu_2J_2	381	0,167	675	1,8	−0,0035	−0,180	−0,102
CuO (Merck)	79,6	0,981	934	11,7	+0,0986	+2,90	+0,247
Cu_2O (Merck)	143,2	1,733	1650	11,5	+0,0416	+1,21	+0,105
CuS	95,3	0,3107	599	6,3	−0,0025	−0,091	−0,015
Cu_2S	159,3	2,935	2665	16,7	−0,0115	−0,388	−0,023
Cu_6P_2[3])	442	1,341	3100	7	−0,009	−0,40	−0,057
$CuSO_4$	159,7	0,374	672	4,2	+0,184	+6,72	+1,60
Cu_2Se	206,3	3,393	3082	14,5	−0,0135	−0,450	−0,031

Man ersieht aus diesen Zahlen, dass an einem principiellen Unterschied zwischen Cupro- und Cupriverbindungen im Sinne

1) St. Meyer, Wied. Ann. **68**. p. 326. 1899.

2) Vgl. l. c. **69**. p. 239.

3) Dieses Kupferphosphid wurde l. c. p. 240 irrtümlich als Cu_3P_2 angenommen, die Angaben für p und somit auch k sind hier wegen zu geringer Mengen nicht sehr genau.

G. Wiedemann's nicht festgehalten werden kann, da CuS (dasselbe war frei von Cu_2S und von S) und Cu_2S gleicherweise diamagnetisch sind. Hingegen ist bei der Art der Darstellung aus gleichem absolut reinen Materiale nicht daran zu denken, dass der Paramagnetismus hier überall von Verunreinigungen herrühren könnte.

Um Einblick in den Zusammenhang mit dem Molecular- bez. Atomvolumen zu erhalten, habe ich ähnlich, wie dies in der oben erwähnten Abhandlung geschehen ist[1]), die Atom- bez. Molecularmagnetismen mit diesen Grössen zusammengestellt. In der Tab. 2 bedeuten μ das Moleculargewicht, γ die Dichte, α das Molecularvolumen der Verbindung, $\Sigma\alpha_e$ die Summe der Atomvolumina, Σk_e die Summe der Atommagnetismen der die Verbindung bildenden Elemente und k den direct gefundenen Wert der Molecularsusceptibilität.

Tabelle 2.

Substanz	μ	γ	α	$\Sigma\alpha_e$	$k \cdot 10^6$	$\Sigma k_e \cdot 10^6$
$CuCl_2$	134,6	3,05	44,1	$<$ 48,9	+0,153	$>$ −0,046
$CuBr_2$	223,5	—	—	$<$ 60,9	+0,546	$>$ −0,072
Cu_2Br_2	287,2	4,72	60,9	$<$ 64,2	−0,048	$>$ −0,078
Cu_2J_2	381	4,41	86,2	$>$ 65,4	−0,102	$<$ −0,092
CuO	79,6	6,40	12,4	$<$ 15,1	+0,247	—
Cu_2O	143,2	5,88	24,4	$\geqq$ 22,2	+0,105	—
CuS	95,6	3,98	24,0	$\geqq$ 22,3	−0,015	$\geqq$ −0,017
Cu_2S	159,2	5,58	28,5	$\leqq$ 29,4	−0,023	= −0,023
Cu_6P_2	442	6,6	67,0	$\leqq$ 69,6	−0,057	$\leqq$ −0,050
$CuSO_4$	159,7	3,58	44,6	$<$ 87,1	+1,60	$>$ —
Cu_2Se	206,3	6,49	31,8	$\geqq$ 30,6	−0,031	$\geqq$ −0,037

Dabei sind für die Atommagnetismen der Elemente diejenigen Zahlen zu Grunde gelegt, die ich in der Tabelle der citirten Abhandlung p. 252 zusammengestellt habe. Das $\gtreqless$-Zeichen vor dem Wert von $\Sigma\alpha_e$ deutet Volumencontraction bez. Dilatation bei der Verbindung an; wo die Unterschiede gering sind, habe ich ausserdem noch ein Gleichheitszeichen beigefügt.

1) St. Meyer, l. c. p. 249.

Vor den Zahlen für Σk_e habe ich gleichfalls noch Ungleichheitszeichen angebracht, die anzeigen, ob der Molecularmagnetismus der Verbindung gegenüber der Summe der Atommagnetismen wächst oder abnimmt.

Es lässt sich unmittelbar aus der Tab. 2 entnehmen, dass überall, wo erhebliche Volumencontractionen eintreten, der Molecularmagnetismus vergrössert wird, soweit, dass sogar Paramagnetismus entstehen kann, wo hingegen Dilatation eintritt, die Diamagnetisirungszahl steigt. Wo die Unterschiede zwischen $\Sigma \alpha_e$ und α klein sind, da sind auch diejenigen von Σk_e und k so gering, dass sie mit Rücksicht auf die bei diesen Messungen erreichte Genauigkeit als innerhalb der Fehlergrenzen liegend betrachtet werden müssen.

Es ist beachtenswert, dass, wie in letzter Zeit wieder von Hrn. J. Königsberger und den Herren A. P. Wills und O. Liebknecht gezeigt wurde, auch in Lösungen der paramagnetische Charakter paramagnetischer Kupfersalze erhalten bleibt, was darauf schliessen lässt, dass der Binnendruck der Verbindung hier trotz der Dissociation weiter besteht.

Gleichwohl ist es, vorläufig wenigstens, durchaus noch nicht möglich, aus den an Lösungen gewonnenen Resultaten direct auf die Susceptibilität trockener Salze[1]) oder diejenige der enthaltenen Elemente zu schliessen und es scheinen die Herren H. du Bois und O. Liebknecht den Zweck meiner bisherigen Untersuchungen völlig missverstanden zu haben, wenn sie in ihren letzten Mitteilungen[2]) ihre Methode der unmagnetischen Lösungen für erheblich einfacher, leichter ausführbar und genauer gegenüber der Methode mittels der Waage empfehlen. Mir handelte es sich ja eben darum, den Magnetismus der trockenen Substanzen direct zu bestimmen, da der Einfluss der Lösungsmittel noch nicht genau festgestellt ist. Ausserdem ist die Methode des Hrn. du Bois nur auf relativ stark paramagnetische Lösungen beschränkt und auf schwach paramagnetische oder diamagnetische Körper nicht in einfacher Weise anwendbar, was bei einer einheitlichen Unter-

---

1) Im grossen und ganzen hat sich bisher allerdings in dieser Hinsicht Uebereinstimmung ergeben.

2) H. du Bois u. O. Liebknecht, Ann. d. Phys. 1. p. 198. 1900 und Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 2. p. 19. 1900.

suchung der verschiedensten Substanzen diese Methode ausschliesst.

Auch der Fussnote[1]) der zuletzt genannten Forscher, dass eine einzige diamagnetische Bestimmung eines Metalles seine Stellung entscheidet, kann ich nicht unbedingt zustimmen. Es wäre nach der constatirten Abhängigkeit der Susceptibilität vom Volumen ganz wohl denkbar, dass schwach magnetische Elemente das eine Mal krystallisirt, das andere Mal amorph auch qualitativ verschiedene Resultate ergeben könnten. Insbesondere möchte ich daher das von mir an sehr reinen Magnesiumkrystallen gewonnene Resultat noch nicht als ausschlaggebend für Magnesium überhaupt ansehen. Auch deuten die auffallenden Resultate der Herren Howard und Seckelson an elektrolytisch niedergeschlagenen Metallen, worauf Hr. Königsberger kürzlich aufmerksam gemacht hat[2]), und ebenso die Existenz der Faraday'schen Magnekrystallkraft auf den ausserordentlich grossen Einfluss der Structur der Substanz.

In erster Linie empfiehlt es sich jedenfalls, um eine wohldefinirte Zahl für die Atomsusceptibilität zu erhalten, an isotropem Materiale, und zwar an den Elementen selbst, Messungen zu machen.

Bezüglich der Bestimmbarkeit von Atommagnetismen aus Molecularmagnetismen kann man nach meinen Ergebnissen unsere Kenntnis in die folgenden Sätze zusammenfassen:

Wo in Verbindungen Volumencontraction eintritt, steigt der paramagnetische, wo Dilatation entsteht, der diamagnetische Charakter der Substanz.

Rückschlüsse auf das magnetische Wesen der Elemente können daher nur aus solchen Verbindungen gezogen werden, deren Molecularvolumen sich additiv aus den Atomvolumen zusammensetzt, insolange eine präcise Formulirung der Abhängigkeit der Susceptibilität von Binnendruck und Volumen nicht gefunden ist.

Wien, Physikal. Institut der Universität, Februar 1900.

1) H. du Bois u. O. Liebknecht, Ann. d. Phys. 1. p. 196. 1900.
2) Vgl. J. Königsberger, Ann. d. Phys. 1. p. 176. 1900.

(Eingegangen 2. März 1900.)

6. *Die Druckkräfte in der Hydrodynamik und die Hertz'sche Mechanik; von Ludwig Boltzmann.*

Hertz geht in seiner Mechanik stets von einer, wenn auch beliebig grossen, doch bestimmt gegebenen Zahl materieller Punkte aus, niemals von einem wirklichen Continuum. In consequenter Verfolgung der Ideen Hertz's kann man daher ein Continuum nur in folgender Weise vorstellen. Man denkt sich sehr viele in einem Raume liegende materielle Punkte und lässt deren Anzahl in der Weise fort und fort wachsen, dass sich der Quotient der Grösse jedes Volumenelementes in die darin enthaltene Masse einer endlichen, möglicherweise von Punkt zu Punkt continuirlich veränderlichen Grenze nähert. Ist dann zu Anfang Grösse und Richtung der Geschwindigkeit jedes Massenpunktes eine beliebig gegebene continuirliche Function der Coordinaten desselben, und ist keine Bedingung gegeben ausser der der Erhaltung der Masse, so kann und wird sich nach Hertz jeder Massenpunkt nicht nur in der geradesten Bahn, sondern wirklich in einer Geraden mit constanter Geschwindigkeit bewegen. Die Bedingung der Erhaltung der Masse wird dann von selbst erfüllt sein, wie immer die anfangs gegebenen Geschwindigkeiten und deren Richtungen beschaffen gewesen sein mögen. Aus derselben kann bloss die Aenderung der Dichte für jede Stelle berechnet, aber keine Relation zwischen den Bewegungen der verschiedenen Massenteilchen abgeleitet werden. Wenn daher Hr. Reiff[1]) aus der Bedingung der Erhaltung der Masse allein scheinbare Druckkräfte gewinnen zu können glaubt, welche den hydrodynamischen analog sind, so scheint mir das auf einem Irrtum zu beruhen.

Aus dem Principe der Erhaltung der Masse folgt in der That, wenn wir uns den Bezeichnungen Reiff's (l. c.) anschliessen, die einzige Gleichung

$$\delta(\varrho\, d\tau) = 0\,.$$

1) R. Reiff, Ann. d. Phys. **1.** p. 226. 1900.

Dieselbe legt den Verschiebungen $\delta\xi_1$, $\delta\xi_2$, $\delta\xi_3$ nicht die mindeste Beschränkung auf, sodass daraus keinerlei scheinbare Kräfte abgeleitet werden können; sie kann vielmehr nur zur Berechnung des den willkürlichen Verschiebungen $\delta\xi_1$, $\delta\xi_2$, $\delta\xi_3$ jedesmal entsprechenden $\delta\varrho$ benutzt werden und liefert:

$$\delta\varrho = -\left(\frac{\partial\,\delta\xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\,\delta\xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\,\delta\xi_3}{\partial x_3}\right)\varrho$$

Hr. **Reiff** setzt ausserdem

$$\delta\varrho = \frac{\partial\varrho}{\partial x_1}\delta\xi_1 + \frac{\partial\varrho}{\partial x_2}\delta\xi_2 + \frac{\partial\varrho}{\partial x_3}\delta\xi_3 .$$

Wenn man die Art und Weise, wie dieser letztere Ausdruck gebildet ist, betrachtet, so sieht man, dass er nicht die Dichteänderung angiebt, welche dadurch erzeugt wird, dass jeder Massenpunkt mit den Coordinaten x_1, x_2, x_3 die Verschiebungen $\delta\xi_1$, $\delta\xi_2$, $\delta\xi_3$ erhält, sondern vielmehr den Unterschied der beiden Dichten, welche in der Flüssigkeit, wie sie vor der Verschiebung gegeben war, einerseits im Punkte mit den Coordinaten x_1, x_2, x_3, andererseits in dem mit den Coordinaten $x_1 + \delta\xi_1$, $x_2 + \delta\xi_2$, $x_3 + \delta\xi_3$ geherrscht haben.

Hr. **Reiff** setzt nun in seiner citirten Abhandlung beide Werte von $\delta\varrho$ untereinander gleich. Dadurch führt er nebst dem Principe der Erhaltung der Masse auch noch stillschweigend die Bedingung ein, dass nach der Verschiebung die Dichte in jedem Volumenelemente genau so gross wird, wie sie vor der Verschiebung in der Flüssigkeit an derjenigen Stelle war, wohin das betreffende Volumenelement verschoben wurde, dass also an jede fixe Stelle im Raume eine unveränderliche Dichte der Flüssigkeit geknüpft ist, d. h., dass die Flüssigkeit bei ihrer Bewegung sich zwar verdichtet und ausdehnt, jedoch genau so, dass sie beim Durchgange durch irgend eine Stelle im Raume immer die für diese Stelle unveränderlich vorgeschriebene Dichte annimmt. Durch diese Bedingung (Bedingung unbeweglich constanter Dichte) sind dann in der That Relationen zwischen den Bewegungen der einzelnen Massenteilchen stipulirt, und zwar solche, welche zu den **Reiff**'schen Bewegungsgleichungen

$$\varrho\frac{du_1}{dt} = -\varrho\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}, \quad \varrho\frac{du_2}{dt} = -\varrho\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}, \quad \varrho\frac{du_3}{dt} = -\varrho\frac{\partial\lambda}{\partial x_3}$$

führen; doch konnte ich die weiteren Bemerkungen, welche Hr. Reiff an diese Gleichungen knüpft, nicht mehr ganz verstehen.

Bedenken, ob die besprochene, an fixe Raumpunkte geknüpfte Bedingung auch in der That durch blosse Gleichungen zwischen den Coordinaten bez. Coordinatendifferentialen der Massenpunkte im Sinne Hertz's ausdrückbar ist, entgeht man, wie Hr. Brill[1]) zeigte, vollständig, wenn man an Stelle der bisher discutirten Bedingung unbeweglich constanter Raumdichte die auch physikalisch viel einfachere setzt, dass jedes Volumenelement im Fortwandern unveränderlich dieselbe Dichte behält, welche mit ihm im Raume mitwandert. Wir wollen dies die Bedingung der Incompressibilität nennen. Beide Bedingungen sind natürlich identisch, wenn ϱ an allen Stellen der Flüssigkeit denselben Wert hat und wenn man von gewissen singulären Schwierigkeiten absieht, die bei der ersteren Bedingung z. B. eintreten würden, wenn die Begrenzung des Raumes, in dem sich die Flüssigkeit bewegt, nicht unveränderlich dieselbe ist.

Die letztere Bedingung (also die der Incompressibilität) liefert zwischen den Verschiebungen $\delta\xi_1$, $\delta\xi_2$, $\delta\xi_3$ statt der Reiff'schen die folgende Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial\,\delta\,\xi_1}{\partial\,x_1} + \frac{\partial\,\delta\,\xi_2}{\partial\,x_2} + \frac{\partial\,\delta\,\xi_3}{\partial\,x_3} = 0,$$

aus welcher dann sofort die gewöhnlichen Euler'schen Bewegungsgleichungen

$$\varrho\frac{d\,u_1}{d\,t} + \frac{\partial\,\lambda}{\partial\,x_1} = \varrho\frac{d\,u_2}{d\,t} + \frac{\partial\,\lambda}{\partial\,x_2} = \varrho\frac{d\,u_3}{d\,t} + \frac{\partial\,\lambda}{\partial\,x_3} = 0$$

für eine incompressible Flüssigkeit folgen, auf welche keinerlei äussere Kräfte wirken. Geradeso, wie die Bewegungsgleichungen für einen starren Körper, können also auch die für eine incompressible Flüssigkeit und für starre Körper, welche in incompressible Flüssigkeiten tauchen oder solche umschliessen, ohne alle Schwierigkeit aus den Hertz'schen Principien der Mechanik abgeleitet werden; natürlich mit Ausschluss äusserer Kräfte.

---

1) A. Brill, Mitteilungen d. naturw. Vereins in Württemberg 1899; vgl. auch Bericht d. deutsch. Mathem. Vereinigung und der Naturf.-Versamml. in München 1899.

Es eröffnet sich hierdurch eine Möglichkeit, aus den mechanischen Principien Hertz's unter Zugrundelegung einer ganz bestimmten Vorstellung von der Natur der vorborgenen Bewegungen ein detaillirtes Bild der gesamten Erscheinungswelt zu erhalten. Man könnte sich, wie es Lord Kelvin, J. J. Thomson und andere gethan haben, die Atome als Wirbel oder andere stationäre Bewegungserscheinungen in einer incompressiblen Flüssigkeit denken, wobei man auch eingetauchte starre Körper beiziehen könnte. Aus den scheinbaren Wechselwirkungen dieser Wirbel etc. wären dann die Naturerscheinungen zu erklären. Man sieht aber sofort folgendes: Sobald man sich vom Standpunkte der mechanischen Principien Hertz's ein vollkommen ins Detail ausgearbeitetes Bild der Naturerscheinungen machen will, ist man, wenigstens bei dem heutigen Stande unserer Kenntnisse, wiederum zur Einführung von Hypothesen gezwungen, die kaum weniger gekünstelt oder weniger willkürlich sind, als die der Fernwirkung von Massenpunkten. Auch sehe ich kaum ein, welchen Vorzug vom philosophischen Standpunkte die Vorstellung incompressibler Flüssigkeiten, starrer undurchdringlicher Körper vor der fernwirkender Atome hat. Erstere ist in fast ebenso roher Weise aus dem angenäherten Verhalten der tropfbaren und festen Körper, wie letztere aus dem der Himmelskörper abgeleitet.

Weit grösser wird der Nutzen der Hertz'schen Vorstellungsweise, sobald man sich von der Art und Weise der Bewegung der verborgenen Massen nur eine ganz allgemeine, unbestimmte Vorstellung macht, wie ich dies selbst im I. Teil meiner Vorlesungen über Maxwell's Theorie des Elektromagnetismus dem Beispiele des letzteren folgend versuchte. Man hat dann sicher den Vorteil, dass man bestimmte Hypothesen vermeidet, die sich nachher als falsch erweisen können. Allein man wird kaum behaupten können, dass solche allgemeine Theorien den ins Detail ausgearbeiteten unbedingt überlegen seien und letztere kein Recht hätten, neben ersteren zu bestehen, da ja letztere wieder den Vorzug haben, die Verschwommenheit und Unbestimmtheit der Begriffe auf ein Minimum zu reduciren.

Versuche, das Kraftgesetz der alten Mechanik aus einfacheren, philosophisch besser einleuchtenden Grundgesetzen

abzuleiten, wurden schon vor Hertz gemacht. So versuchten, anlehnend an bekannte Ideen Lesage's, Lord Kelvin, Isenkrahe, Preston u. a. die Gesetze des elastischen Stosses als die Grundgesetze zu betrachten und die Kräfte als scheinbare Wirkungen von Molecularstössen zu erklären. Hertz hat das Verdienst, ein sehr allgemeines Schema aufgestellt zu haben, nach dem solche Versuche gemacht werden können, und es ist abzuwarten, ob ein solcher Versuch, der gleichzeitig unbestimmte Verschwommenheit und Willkürlichkeit in der Specialisirung vermeidet, gelingen wird.

(Eingegangen 9. März 1900.)

7. *Ueber die Energie der Kathodenstrahlen*[1]; *von Walter Cady.*

§ 1. Es ist bekannt, dass durch die Energie der Kathodenstrahlen ein von ihnen getroffener, so schwer schmelzbarer Körper wie Platin geschmolzen werden kann.

Ebert und E. Wiedemann[2], E. Wiedemann[3], und Ewers[4] haben die Energie der Kathodenstrahlen mittels Calorimeter gemessen. Für genaue und vergleichbare Messung dieser Energie aber bietet das Thermoelement grosse Vorzüge vor dem Calorimeter. Unter den neueren Untersuchungen auf Grund der Emissionshypothese ist diese Methode von J. J. Thomson[5] benutzt worden, allein bei ihm spielen die thermischen Messungen nur eine relativ kleine Rolle. Neuerdings hat auch O. Berg[6] mittels eines Thermoelementes relative *Energiemessungen* gemacht.

§ 2. Jene Energie hängt nun nach der Emissionshypothese der Kathodenstrahlen mit der zwischen der Kathode und dem getroffenen Körper bestehenden Potentialdifferenz V und mit der dem Körper durch die Kathodenstrahlen zugeführten Elektricitätsmenge zusammen, welche, auf die Secunde berechnet, als Kathodenstrom i bezeichnet wird.

Der Körper sei durch ein Galvanometer zur Erde abgeleitet und werde in der Secunde von N Teilchen getroffen. Es werde zuerst die Annahme gemacht, dass die Teilchen ihre ganze Ladung und ihre ganze Energie, letztere als Wärme, an den getroffenen Körper abgeben. Sei dann v die Geschwindigkeit der Teilchen in Centimeter pro Secunde, m ihre Masse

1) Berliner Inaugural-Dissertation, für die Annalen bearbeitet. Im Auszug der Deutsch. Physikal. Gesellsch. vorgelegt 21. April 1899.

2) H. Ebert u. E. Wiedemann, Sitzungsber. der phys.-med. Soc. zu Erlangen 14. December 1891.

3) E. Wiedemann, Wied. Ann. **66.** p. 61. 1898.

4) P. Ewers, Wied. Ann. **69.** p. 167. 1899.

5) J. J. Thomson, Phil. Mag. **44.** p. 293. 1897.

6) O. Berg, Ber. d. naturforsch. Gesellsch. zu Freiburg i. Br. **11.** Heft 2. p. 73. 1899.

in Gramm, so wird dem Körper die mechanisch gemessene Wärmemenge

$$Q = N \cdot \tfrac{1}{2} m v^2 \text{ (Erg pro Secunde)} \tag{1}$$

zugeführt. Die Intensität i des durch das Galvanometer fliessenden Kathodenstromes ist

$$i = N \cdot \varepsilon, \tag{2}$$

wenn ε die Ladung eines Teilchens vorstellt.

Ist andererseits V die Potentialdifferenz zwischen der Kathode und dem Körper, so ist

$$V \cdot \varepsilon = \tfrac{1}{2} m v^2. \tag{3}$$

Daher

$$Q = N \cdot V \cdot \varepsilon = i \cdot V,$$

oder

$$\frac{i V}{Q} = 1. \tag{4}$$

Nach den Versuchen von Starke[1]) wird ein Teil der Kathodenstrahlen reflectirt. Dadurch wird an den obigen Beziehungen nichts geändert, sofern nach den Versuchen von Merritt[2]) bei der Reflexion die Ablenkbarkeit, folglich auch die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen, ungeändert bleibt. Nimmt man indessen vorläufig an, dass bei der Reflexion die Energie der Teilchen im Verhältnis $r' : 1$ vermindert wird, während die reflectirten Teilchen ihre Ladung beibehalten, so erhält man, wenn der Bruchteil r der einfallenden Strahlen reflectirt wird:

$$\left\{\begin{aligned} Q &= N(1 - r) \cdot \tfrac{1}{2} m v^2 + N r (1 - r') \cdot \tfrac{1}{2} m v^2 \\ &= \tfrac{1}{2} N m v^2 (1 - r r'), \end{aligned}\right. \tag{1a}$$

$$i = N \varepsilon (1 - r), \tag{2a}$$

$$V \varepsilon = \tfrac{1}{2} m v^2, \tag{3a}$$

$$\frac{i V}{Q} = \frac{1 - r}{1 - r r'}. \tag{4a}$$

Ist $r' = 1$ (Merritt), so wird auch in diesem Falle $(i V / Q) = 1$. Ist im Grenzfalle $r' = 0$, so ist $(i V / Q) = 1 - r$.

Der Zweck der vorliegenden Untersuchung war, diese Beziehungen quantitativ zu prüfen.

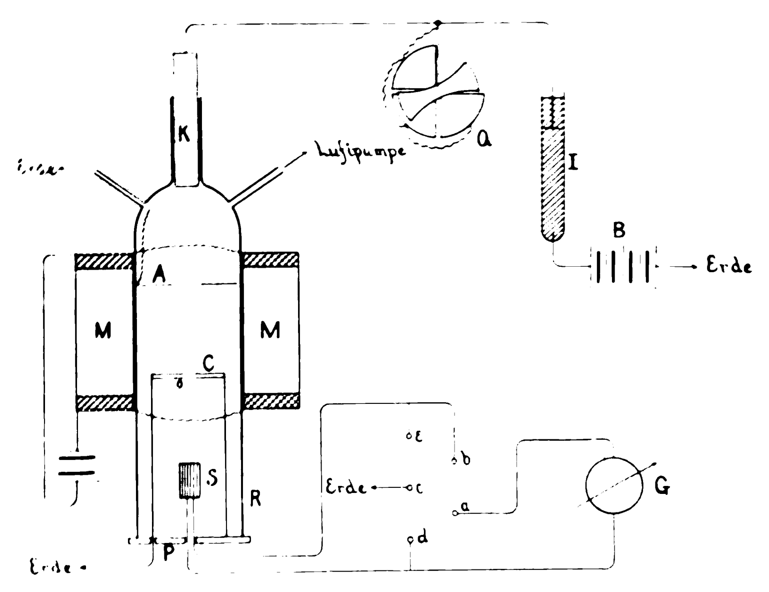
1) H. Starke, Wied. Ann. **66**. p. 49. 1899.

2) E. Merritt, Phys. Rev. **7**. p. 217. 1898.

Beschreibung des Apparates.

§ 3. Zur Messung der Energie Q diente bei den ersten Versuchen eine Thermosäule, bei späteren ein Bolometer. Die bei der Thermosäule benutzte Versuchsanordnung zeigt Fig. 1; die Anordnung bei den bolometrischen Messungen unterscheidet sich nicht wesentlich davon.

Der von den Kathodenstrahlen getroffene Körper S (Thermosäule) befand sich im Innern eines zur Erde abgeleiteten



(Das Entladungsgefäss ist in $^1/_5$ der natürlichen Grösse dargestellt.)

Fig. 1.

Faraday'schen Messingcylinders C; durch eine Oeffnung o von 6 mm Durchmesser traten die Strahlen in den Cylinder ein. Um die Thermosäule gegen Wärmestrahlungen möglichst zu schützen, wurde das Diaphragma des Cylinders doppelt gemacht. R ist eine 7 cm breite, 25 cm lange Glasglocke, auf die dicke Glasplatte P luftdicht aufgesetzt.

Als Kathode diente der kupferne Boden des Messingrohres A von 18 mm Durchmesser, durch welches während der Versuche ein Wasserstrom geleitet wurde, um die Er-

wärmung der Kathode möglichst zu verringern. Das Rohr *K* wurde in ein Ansatzrohr der Glasglocke mittels Siegellacks eingekittet. Anode war das zur Erde abgeleitete Zinkdiaphragma *A* mit einer Oeffnung von 15 mm Durchmesser. Durch die Glasplatte *P* führten die nötigen Leitungsdrähte isolirt und luftdicht nach aussen.

Die Dimensionen der verschiedenen Teile des Apparates sind aus der Fig. 1 ersichtlich. Die Strecke AK betrug ca. 66 mm; $CK = 144$ mm, $SK = 203$ mm. Durch diese Anordnung war die Thermosäule gegen Störungen durch Wärmestrahlungen gut geschützt, und es wurde auch erzielt, dass, abgesehen von etwaiger Absorption und Diffusion durch das Gas[1]), die bei den benutzten Drucken keine wesentliche Rolle spielen, sämtliche in den Cylinder *C* gelangende Kathodenstrahlen direct auf die Lötstellen der Thermosäule fielen; und zwar entwickelte sich allmählich mit dem Gebrauch ein undeutlicher kreisrunder Fleck auf der Fläche der Säule.

Zur Stromerzeugung diente eine Hochspannungs-Accumulatorenbatterie *B* von 2288 Zellen; der Strom wurde durch einen Hittorf'schen Jodcadmiumwiderstand I regulirt. Um eine noch höhere Spannung zu erzeugen, wurde zuweilen eine Transformatormaschine von Siemens & Halske vor der Batterie eingeschaltet, wodurch die elektromotorische Kraft um etwa 800 Volt gesteigert wurde; Stromquelle war die 110-Voltcentrale.[2]) Das Kathodenpotential wurde durch das Quadrantelektrometer *Q* gemessen; um eine passende Empfindlichkeit zu erreichen, wurden drei Quadranten (Fig. 1) gebraucht, wobei sowohl die Quadranten, als auch die Nadel auf das Potential der Kathode gebracht wurden. Wegen der in Fig. 1 angedeuteten eigentümlichen Stellung der Nadel war es nötig, das Elektrometer empirisch zu aichen, weil, obwohl die Kraft bei constanter Nadelstellung prop. V^2 ist, doch bei gewissen Stellungen die wirksame Componente derselben von der Nadelstellung stark abhängig ist. In der That waren hier die Ablenkungen zufällig nahezu prop. *V* selbst.

1) Vgl. W. Kaufmann, Wied. Ann. **69.** p. 95. 1899.

2) Die Transformatormaschine wurde mir durch die Liebenswürdigkeit des Hrn. Dr. L. Arons zur Verfügung gestellt.

G ist ein Thomson'sches Galvanometer zur Messung des Kathoden- und Thermostromes; *MM* endlich sind zwei Spulen, welche durch eine Hülfsbatterie betrieben wurden und dazu dienten, die Kathodenstrahlen von dem Körper *S* nach Bedarf abzuhalten. *Es ist wichtig, dass sämtliche Contacte gut und sicher sind, und dass der thermoelektrische Stromkreis SG von der Erde gut isolirt sei.*

§ 4. Das Entladungspotential hängt in hohem Maasse von der Lage der Kathode *K* ab. Lag nämlich der Boden von *K* einige Millimeter innerhalb des Ansatzrohres, so war cet. par. das Potential bedeutend höher, als wenn er in den grösseren Raum der Glasglocke hineinragte, sodass das negative Glimmlicht sich frei ausdehnen konnte. Letztere Anordnung wurde daher gewöhnlich gewählt, weil es dann möglich war, bei viel niedrigeren Drucken zu arbeiten.[1])

Bei sämtlichen Messungen bestand die Kathode aus Kupfer. Ein Versuch mit einer Aluminiumkathode zeigte, dass wegen der unablässigen Entwickelung von occludirten Gasen es unmöglich war, ein constantes Potential zu erhalten. Hierbei bestand natürlich das ganze Rohr *K* (Fig. 1) aus Aluminium. Da das Rohr durch Siegellack eingekittet war, konnte man nicht das Gas durch Erhitzen der Kathode entfernen. Auch bei Kupfer war die Gasentwickelung so reichlich, dass ein starker Strom durch die Röhre stundenlang bei stetigem Evacuiren geleitet werden musste, bis es möglich war, auch nur annähernde Messungen zu machen. Das Gas wurde nicht nur von der Kathode, sondern auch von den Glaswänden und grossen Metallflächen abgegeben. Eine weitere Schwierigkeit bot die mit der Zeit allmählich eintretende Veränderung der Kathodenoberfläche, welche die Entladung sehr unregelmässig machte, sodass es nötig war, nach wenigen Messungsreihen jedesmal die Kathode herauszunehmen und wieder zu poliren.

Versuche mit der Thermosäule.

§ 5. Dieselbe, von Melloni'scher Construction, bestand aus 49 25 mm langen Wismutantimonelementen; die Fläche

1) Vgl. W. Wien, Wied. Ann. **65**. p. 442. 1898.

der Lötstellen betrug 196 mm². Die Säule wurde mittels Hartgummi gut isolirt auf der Glasplatte *P* (Fig. 1) befestigt.

Zur Messung des Kathodenstromes wurde (Fig. 1) *a c* geschlossen, sodass der in *b* endigende Poldraht der Säule isolirt, der andere durch das Galvanometer zur Erde abgeleitet war.

Zur Messung des Thermostromes wurde *a b*, zur Ableitung des Kathodenstromes gleichzeitig etwa *c d* geschlossen. Doch fliesst hierbei der Bruchteil $w_1 / w_1 + w_2$ des Kathodenstromes durch das Galvanometer, wenn w_1 und w_2 die Widerstände bez. von *S d c* und *S b a G d c* vorstellen. Schliesst man aber *c e* anstatt *c d*, so fliesst derselbe Bruchteil des Kathodenstromes im entgegengesetzten Sinne wie vorhin durch

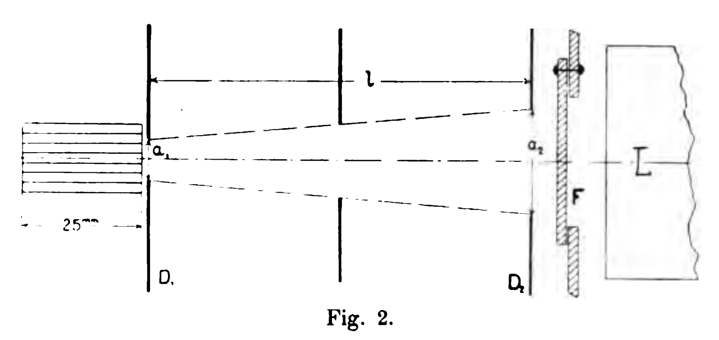


Fig. 2.

das Galvanometer, sofern auch *S e c* den Widerstand w_1 besitzt. Das Mittel der beiden um nur einige Procente differirenden Galvanometerablenkungen giebt das vom Kathodenstrom befreite Maass des Thermostromes.

Um den Einfluss der Wärmestrahlung von der Kathode zu eliminiren, wurden vor jeder Beobachtung die Kathodenstrahlen durch die magnetische Einwirkung der Spulen *M* von *S* abgehalten und der etwa vorhandene kleine Strom von dem nach Einfall der Strahlen auf *S* beobachteten in Abzug gebracht.

§ 6. Durch eine Reihe Prüfungen wurde zunächst festgestellt, dass die Thermoströme innerhalb der benutzten Grenzen proportional den auf die Lötstellen fallenden Wärmemengen waren, ganz unabhängig davon, ob ein grösserer oder kleinerer Teil der Fläche getroffen wurde; hierbei wurde stets die Strahlungsdauer von einer Minute als die geeignetste gewählt.

Zur Aichung der Thermosäule wurde dieselbe vor Einfügung in den Apparat der berussten Seite eines siedendes Wasser enthaltenden Leslie'schen Würfels L gegenübergestellt (Fig. 2). Vor Säule und Würfel befanden sich die Diaphragmen D_1 und D_2 mit kreisförmigen Oeffnungen von den Durchmessern $a_1 = 8{,}3$ mm und $a_2 = 22{,}0$ mm.

Es wurde die Ablenkung bestimmt, welche unter diesen Umständen ein in den Kreis der Säule eingeschaltetes Galvanometer erfuhr, wenn nach Aufziehen des Schirmes F die Strahlung des Würfels eine Minute lang auf die Säule gewirkt hatte.

Werden Säule und Leslie'scher Würfel als schwarze Körper angesehen, und hat jene die Temperatur 0°, so beträgt die durch Strahlung in der Secunde der Säule zugeführte Wärmemenge

$$h_1 \frac{a_1^2\, a_2^2}{16\, l^2} \text{ g-Cal.},$$

wo h_1 die zuerst von Lehnebach bestimmte Constante, l den Abstand der Oeffnungen a_1 und a_2 bedeutet. Hat die Thermosäule die Temperatur t, so ist nach dem Stefan-Boltzmann'schen Gesetz statt h_1 zu setzen

$$h_1 \frac{1 - \left(\frac{273 + t}{373}\right)^4}{1 - \left(\frac{273}{373}\right)^4}.$$

So ergiebt sich die der Säule pro Secunde zugeführte Wärmemenge:

$$(5) \qquad Q = \frac{h_1}{0{,}713} \left\{1 - \left(\frac{273 + t}{373}\right)^4\right\} \frac{a_1^2\, a_2^2\, \pi}{16\, l^2} \frac{\text{g-Cal.}}{\text{sec}}.$$

Ist die entsprechende Galvanometerablenkung s_0, so ist

$$(6) \qquad \frac{Q_0}{s_0} = e$$

die Wärmemenge pro Scalenteil, und die der Ablenkung s entsprechende Wärme

$$(7) \qquad Q = s \,.\, e.$$

h_1 wurde nach F. Kurlbaum[1]) gleich 0,0176 gesetzt.

Der Wert $i \,.\, V$ (Gleichung 4) in g-Cal./sec ist Kathodenstromstärke in Ampère × Potentialdifferenz in Volt × 0,240.

---

1) F. Kurlbaum, Wied. Ann. **65**. p. 759. 1898.

§ 7. Bei der Aichung befand sich die Thermosäule in freier Luft, bei den Versuchen befand sie sich im partiellen Vacuum, ausserdem wurde bei den Versuchen der Russ von den Lötstellen entfernt (§ 9). Für die Temperaturerhöhung t bez. t' durch Wärmeeinstrahlung W pro Secunde hat man nun im stationären Zustand

$$W = t \,.\, A \text{ im ersten Falle,}$$

$$W = t' \,.\, A' \text{ im zweiten Falle.}$$

Da die Galvanometerablenkungen mit t proportional sind, so folgt daraus

$$\frac{e'}{e} = \frac{A'}{A},$$

sodass zu setzen wäre

$$Q = s \cdot e' = s \cdot e \cdot \frac{A'}{A},$$

wo $A' < A$ ist. Gleichwohl ist nach (7) gerechnet, also $A' = A$ gesetzt worden. Die Grösse des hierdurch begangenen Fehlers ist um so geringer, je mehr der Wärmeverlust der Lötstellen durch Strahlung und Leitung an die Luft gegen den Wärmeverlust durch Leitung an den massiven metallischen Körper der Thermosäule zurücktritt.

§ 8. Die ersten Versuche ergaben Werte von $i V / Q$, welche viel grösser als 1 waren, wie folgende Tab. I zeigt. Hierbei bedeutet i den Kathodenstrom, V das Kathodenpotential in Volt und Q die Wärme.

Tabelle I.

Druck	$i \,.\, 10^7$ Amp.	V	$Q \,.\, 10^6$ g-Cal.	$i V / Q$
0,067	152	2280	90,3	9,18
0,046	138	2470	141	5,80
0,044	113	2490	123	5,50
0,042	99,4	2600	127	4,89

Bei diesen Versuchen waren die Lötstellen wie bei der Aichung berusst. Es ist nun anzunehmen, dass die zur Aichung benutzten langwelligen Wärmestrahlen ziemlich tief im Innern der Russschicht, die Kathodenstrahlen dagegen sehr

nahe der äusseren Oberfläche des Russes absorbirt werden. Wenn nun die Wärmeleitung durch die Russschicht klein ist gegen die Wärmeleitung durch den massiven metallischen Körper der Thermosäule, so kann es kommen, dass bei gleicher Wärmezufuhr die Temperaturerhöhung der Lötstellen bei den Versuchen mit den Kathodenstrahlen kleiner ausfällt als bei der Aichung mit Wärmestrahlung. Es wurde also die Russschicht entfernt, und in der That nahm hierbei das Verhältnis $i \,.\, V/Q$ ab.[1])

§ 9. Folgende Messungsreihen wurden zunächst nach Fortnahme der Russschicht gemacht.[2]) Die Bezeichnung ist stets dieselbe wie in Tab. I.

Tabelle II.

Druck	$i \,.\, 10^7$ Amp.	V	$Q \,.\, 10^5$ g-Cal.	$i\, V/Q$
0,046	180	3100	412	3,25
0,050	175	3100	397	3,28

Tabelle III.

Druck	$i \,.\, 10^7$ Amp.	V	$Q \,.\, 10^5$ g-Cal.	$i\, V/Q$
0,043	122	3150	331	2,80
0,029	116	3500	416	2,34
0,026	100	3620	416	2,09
0,025	65,4	3820	309	1,94
0,022	61,7	4070	344	1,75

1) Zum Teil rührt dies nach § 7 daher, dass nach Fortnahme der Russschicht die Grösse A (§ 7) einen kleineren Wert A' annimmt, daher Gleichung (7), welche zur Berechnung von Q benutzt wurde, einen zu grossen Wert dieser Grösse liefert. Die durch Fortnahme der Russschicht etwa veränderte Reflexion der Kathodenstrahlen ist auf den Wert $i\, V/Q$ ohne Einfluss, sofern nach Merritt $r' = 1$ gesetzt werden kann (§ 2).

2) Die Werte von V, folglich auch von i, trotz der grösseren Reflexion der Kathodenstrahlen (H. Starke, l. c.) sind hier bei gleichem Druck grösser als in Tab. I, weil die Anzahl Hochspannungszellen eine grössere war.

Bemerkenswert ist, dass in Tab. III sowie auch in Tab. I *der gemessene Wert von iV/Q bei abnehmendem Druck und Kathodenstrom abnimmt.*

§ 10. Um diese Beziehung näher zu untersuchen, wurden verschiedene Versuche angestellt, wobei Kathodenstrom und Druck innerhalb möglichst weiter Grenzen variirt wurden. Im allgemeinen war es ersichtlich, dass das Verhältnis iV/Q mit abnehmender Stärke des Kathodenstromes zuerst stark, dann immer langsamer abnahm. Dies führte auf die Vermutung, dass ausser den Kathodenstrahlen auch ein Leitungsstrom von der Kathode zur Thermosäule gelangt, indem nach J. J. Thomson[1]) das von den Kathodenstrahlen durchsetzte Gas, also auch das im Innern des Faraday'schen Cylinders befindliche, Leitungsvermögen erlangt. Eine Bestätigung dieser Vermutung ergab sich, als man zwischen c (Fig. 1) und der Erde eine Batterie einschaltete, durch welche die Thermosäule und der Faraday'sche Cylinder auf ein positives oder negatives Potential v gebracht wurden. Der wahre Wert des Verhältnisses iV/Q kann hierdurch nicht beeinflusst werden, sofern für V die Potentialdifferenz zwischen Kathode und Thermosäule eingesetzt wird, wohl aber der vermutete Leitungsstrom, der stärker oder schwächer werden muss, je nachdem v positiv oder negativ gemacht wird.

Dementsprechend nahm, wie folgende Tabelle zeigt, der scheinbare Wert des Verhältnisses iV/Q zu oder ab, je nachdem v + oder − war.

Druck	v	V	$i \cdot 10^7$ Amp.	$Q \cdot 10^5$ g-Cal.	iV/Q
0,050	+70	4050	3,54	34,1	1,01
0,050	0	3980	2,64	30,2	0,84
0,050	−70	3910	2,29	30,5	0,71

Das Kathodenpotential ist hier $= V - v$; i bedeutet, wie bei allen Messungsreihen, die beobachtete Summe des Kathoden- und Leitungsstromes.

Auf die Aenderung, die der Wert von v in dem Wert von Q hervorruft, ist kein Gewicht zu legen, da durch Ladung

1) J. J. Thomson, l. c.

der Säule die Bahn der Kathodenstrahlen zwischen A und C (Fig. 1) sichtbar verändert wurde.

Als Messungen bei hohen Verdünnungen gemacht wurden, zeigte es sich, dass durch die Ladung der Thermosäule der Wert von iV/Q nicht mehr beeinflusst wurde.

Dass bei hohen Vacuen das Leitungsvermögen der Kathodenstrahlen verschwindend klein wird, hat zuerst J. J. Thomson gefunden.[1])

§ 11. Es wurde auch versucht, den Leitungsstrom durch ein über die Oeffnung o des Faraday'schen Cylinders (Fig. 1) gelegtes Drahtnetz abzuhalten. Zu diesem Zweck wurde ein kleines Gitter aus mehreren dünnen Platindrähten auf den Cylinder so montirt, dass es von aussen durch die Einwirkung eines Magnetstabes von der Oeffnung o beliebig abgelenkt werden konnte. Dadurch konnte man Beobachtungen mit und ohne Gitter unmittelbar nacheinander machen. Messungen nach dieser Weise zeigten, dass die durch das Gitter bewirkte Verminderung des Kathodenstromes auch bei hohen Drucken sehr gering war. Hierbei wurde selbstverständlich die Verminderung des Querschnittes des Strahlenbündels in Betracht gezogen. Bei einem Druck von 0,08 mm und sehr starken Kathodenstrahlen betrug die Verminderung des scheinbaren Kathodenstromes etwa 7 Proc.; bei Drucken unter 0,04 mm war sie kaum mehr wahrzunehmen. Die Unwirksamkeit eines Drahtnetzes ist auch von Starke[2]) bemerkt worden; derselbe leitet die Kathodenstrahlen durch einen langen, schmalen Canal, um „reine“ Kathodenstrahlen zu gewinnen.

§ 12. Es bleibt noch übrig, den unteren Grenzwert des Verhältnisses festzustellen. Zu diesem Zweck sind sämtliche Messungen, bei denen der Kathodenstrom $< 40 \, . \, 10^{-7}$ Amp. war, in der Tab. IV zusammengestellt; jede einzelne Gruppe entspricht einer an demselben Tage, also unter ähnlichen Bedingungen gemachten, Messungsreihe.

Die Unregelmässigkeiten bei den einzelnen Messungen in derselben Gruppe rühren hauptsächlich von den oben erwähnten Störungen durch Gasentwickelung her. Dies ist be-

1) J. J. Thomson, l. c.
2) H. Starke, l. c. p. 52.

sonders merklich, wo der Druck am kleinsten ist. Im allgemeinen aber zeigt das Verhältnis iV/Q eine Abnahme bei abnehmendem Kathodenstrom.

Tabelle IV.

Druck	$i \cdot 10^7$ Amp.	V	$Q \cdot 10^5$ g-Cal.	iV/Q
0,035	9,39	4000	99,0	0,91
0,036	9,18	4010	98,7	0,90
0,022	7,75	4200	86,9	0,90
0,019	5,51	4280	66,4	0,85
0,016	4,49	4310	51,4	0,90
0,032	8,57	4200	92,1	0,94
0,025	4,93	4290	59,5	0,85
0,019	3,35	4350	40,5	0,86
0,043	39,7	4130	271	1,45
0,040	26,8	3730	155	1,55
0,040	12,3	3430	73,8	1,37
0,045	5,64	3170	35,8	1,20
0,041	4,96	3080	30,0	1,22
0,052	22,9	4400	183	1,32
0,048	12,5	4170	104	1,21
0,048	8,44	3950	71,0	1,15
0,048	8,37	4050	75,0	1,09
0,048	3,18	3510	26,8	1,00
0,049	3,04	3490	26,4	0,97
0,046	0,90	3000	5,94	1,09
0,046	0,76	3030	5,94	0,93
0,044	4,79	4250	52,8	0,93
0,048	4,73	4010	47,4	0,96
0,048	3,89	4020	40,1	0,94
0,050	2,64	3980	30,2	0,84
0,048	1,15	3500	10,9	0,88
0,042	0,69	3530	6,64	0,89
0,048	24,1	3560	126	1,63
0,046	23,2	3700	122	1,69
0,046	13,5	3950	102	1,26
0,030	7,64	3900	88,2	0,81
0,018	4,13	4200	59,1	0,70
0,018	4,04	4200	58,2	0,70
0,018	2,52	4000	35,3	0,69
0,034	1,62	3105	16,8	0,72

Tabelle IV (Fortsetzung).

Druck	$i \cdot 10^7$ Amp.	V	$Q \cdot 10^5$ g-Cal.	$i\,V/Q$
0,016	1,13	5320	19,4	0,74
0,014	0,70	5350	11,3	0,80
0,013	0,34	5390	5,37	0,83
0,012	0,23	4700	3,34	0,77
0,012	0,23	4700	3,48	0,74
0,013	4,22	3080	42,5	0,73
0,013	2,29	2710	20,3	0,73
0,013	1,70	2410	13,5	0,73
0,017	11,4	4440	147	0,82
0,026	8,04	3440	94,9	0,70
0,010	4,32	5030	57,2	0,91

Werden nun diese 46 Beobachtungen nach der Stärke des Kathodenstromes in fünf Gruppen geteilt und die Mittel aus den fünf Gruppen genommen, so erhält man:

Druck	$i \cdot 10^7$ Amp.	$i\,V/Q$
0,041	19,6	1,32
0,035	7,41	0,97
0,026	4,29	0,85
0,033	2,02	0,84
0,023	0,49	0,83

Der scheinbare Wert $i\,V/Q$ nimmt hiernach mit abnehmendem Kathodenstrom ab, was durch die Einmischung des Leitungsstromes erklärt werden kann. Von dem Wert $i = 4{,}29$ des Kathodenstromes an abwärts nimmt $i\,V/Q$ nur wenig ab, woraus zu schliessen wäre, dass der Leitungsstrom hier nicht mehr erheblich ist.

Wenn also der Kathodenstrom von 19,6 auf 0,49, d. h. auf den 40. Teil seines Wertes sinkt, so ändert sich das Verhältnis $i\,V/Q$ nur um 38 Proc. des Anfangswertes. Dieses Ergebnis spricht jedenfalls dafür, dass die aus der Emissionshypothese abgeleitete gesetzmässige Beziehung (4) (§ 2) nahezu besteht. Doch geben diese Versuche wegen der Bedenken, die nach § 7 und § 9 (Fussnote) gegen die Messung von Q erhoben werden können, über den wahren Wert von $i\,V/Q$

keinen sicheren Aufschluss, und sind also in dieser Beziehung nur als orientirende zu betrachten. Es wurde daher Q nach einer mehr einwandsfreien Methode, nämlich nach der von Hrn. Kurlbaum[1]) vorgeschlagenen Methode durch das Bolometer gemessen.

Versuche mit dem Bolometer.

§ 13. Ein Flächenbolometer bildet einen Zweig einer Wheatstone'schen Brückenanordnung; die Brücke werde auf Null eingestellt, während ein Strom von der Stärke J den Bolometerzweig durchfliesst, wobei der Bolometerwiderstand gleich w sei. Wird demselben nun durch Strahlung eine Wärmemenge Q pro Secunde zugeführt, so wird die Galvanometernadel in der Brücke eine gewisse Ablenkung erfahren; dieselbe Ablenkung werde dadurch hervorgebracht, dass nach Ablenkung der Strahlung die Stromstärke J_1 im Bolometerzweig auf J_2 erhöht wird. Dann ist nach Kurlbaum

$$Q = w \cdot \frac{J_2}{J_1} (J_2^2 - J_1^2) \text{ Watt,}$$

wenn J und w bez. in Ampère und Ohm ausgedrückt sind. Sind die vier Widerstände in der Wheatstone'schen Brücke einander gleich, so ist $J = \frac{1}{2} j$, wenn j die Stromstärke im Batteriezweig bedeutet, und

$$Q = \frac{1}{4} w \frac{j_2}{j_1} (j_2^2 - j_1^2) \text{ Watt.}$$

Vorausgesetzt ist hierbei, dass die Temperaturverteilung im dünnen Bolometerblech bei Einwirkung des Stromes und der Strahlung als gleich betrachtet werden kann.[2])

Da nun bei meinen Untersuchungen im allgemeinen es sich nicht empfahl, weder beide Ablenkungen — durch Kathodenstrahlen bez. durch den Strom j_2 — genau einander gleich zu machen, noch die Kurlbaum'sche Interpolationsmethode zu benutzen, so wurde beobachtet: 1. die Ablenkung a_1 bei Stromstärke j_1 unter Einwirkung der Kathodenstrahlen, 2. die Ablenkung a_2 bei Stromstärke j_2 ohne Einwirkung der Kathodenstrahlen.

1) F. Kurlbaum, Wied. Ann. 65. p. 746. 1898.
2) F. Kurlbaum, l. c. p. 755.

Man erhält daher folgenden Ausdruck:

$$Q = \frac{1}{4} w \frac{a_1}{a_2} \frac{j_2}{j_1} (j_2^2 - j_1^2) \text{ Watt.}$$

a_2 wurde möglichst gleich a_1 gemacht.

§ 14. Zur Anwendung dieser Methode wurde die Thermosäule S (Fig. 1) in der früheren Anordnung durch ein Bolometer ersetzt, dessen Poldrähte durch die Platte P nach aussen führten. Dasselbe wurde nach dem Verfahren von Lummer und Kurlbaum[1]) unter einigen Modificationen hergestellt. Es bestand bei den ersten Versuchen aus einem ca. 0,001 mm dicken, auf einem Messingrahmen befestigten Platinblech, das von dem Rahmen durch Glimmer isolirt war. Die Form des Bolometers ist in B (Fig. 3) dargestellt. Mittels zweier ebenfalls vom Bolometer durch Glimmer isolirten, an beiden Seiten des Rahmens durch Schrauben befestigten Messingstreifen, wurde das Bolometer festgehalten. Da der Rahmen, welcher am Messingboden des Faraday'schen Cylinders sass, zur Erde abgeleitet war, so war dadurch die Sicherheit gegeben, dass alle Kathodenstrahlen, die nicht auf die Bolometerstreifen fielen, durch das Metall des Rahmens ihre Ladung zur Erde abgaben.

Das Diaphragma A (Fig. 1) hatte eine Oeffnung von 20 mm Durchmesser, der Durchmesser der Oeffnung o betrug 12 mm. Es wurde dadurch bewirkt, dass der ganze Bolometerwiderstand von den Kathodenstrahlen getroffen wurde; es wird angenommen, dass unter diesen Umständen die im § 13 genannte Voraussetzung über die Temperaturverteilung erfüllt sei, obgleich die Dichtigkeit der Strahlen im Bündel bekanntlich nicht constant ist.

§ 15. Die weitere Anordnung geht aus Fig. 3 hervor. Die Stromstärke j_1 im Batteriezweig wurde durch das Präcisionsampèremeter M gemessen und durch Einschaltung des Widerstandes R im Nebenschluss zu r von j_1 auf j_2 gesteigert; aus der Widerstandsänderung konnte man dann j_2 sehr genau berechnen, auch wenn bei schwacher Entladung der Unterschied zwischen j_2 und j_1 sehr klein war.

---

1) O. Lummer u. F. Kurlbaum, Wied. Ann. **46**. p. 204. 1892.

Das Galvanometer im Brückenzweige war ein Thomson'sches von du Bois-Rubens'scher Construction. Zu den thermischen Messungen wurden zwei 20 Ohm-Rollen *mm* benutzt; um dabei die Wirkung des Kathodenstromes abzuhalten, wurde ein Punkt zwischen den beiden Rollen zur Erde abgeleitet und durch Einschaltung eines passenden Widerstandes *T* bewirkt, dass nach Ausschaltung der Batterie der Kathodenstrom keinen Ausschlag hervorbrachte. Zur Messung des Kathodenstromes diente ein 4000 Ohm-Rollensystem *n*, welches durch Schliessen des Stromschlüssels *b* zur Erde abgeleitet wurde,

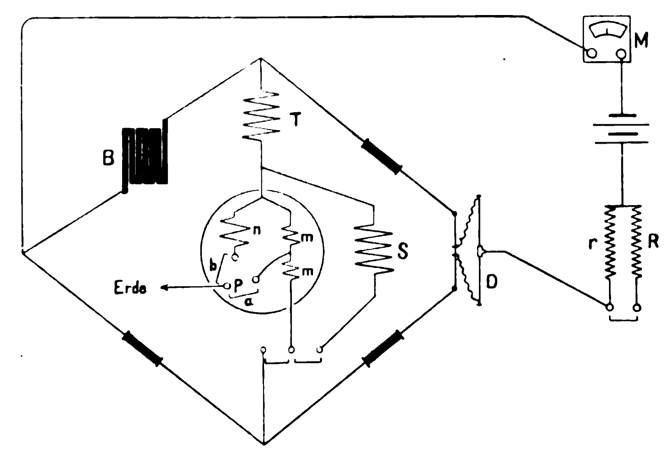


Fig. 3.

während *a* offen blieb. Dabei war die Batterie ausgeschaltet. Durch den Nebenschluss *S* konnte die Galvanometerempfindlichkeit nach Bedarf herabgesetzt werden; ausser bei den schwächsten Entladungen war dies bei den bolometrischen Messungen immer nötig. Die Gleitdrahtvorrichtung bei *D* diente zur letzten Abgleichung der Brückenanordnung.

Die Zweigwiderstände *W* bestanden aus Manganindraht und wurden möglichst gleich dem Bolometerwiderstand gemacht, kleine Abweichungen wurden berücksichtigt.

Die ganze Anordnung war sehr gut von der Erde isolirt. Die Probe hierfür bestand darin, dass, wenn ein Pol der Batterie zur Erde abgeleitet war, ein empfindliches Galvanometer im Batteriezweig keinen Strom anzeigte.

§ 16. Das Bolometer war bei dieser Anordnung sehr empfindlich; noch bei den schwächsten Entladungen konnte man Messungen machen, obwohl die Fläche des Bolometers bedeutend kleiner als diejenige der Thermosäule war. Die Fehlerquelle durch Gasentwickelung war hierbei auch etwas geringer wegen der Schnelligkeit, womit die bolometrischen Beobachtungen vor sich gingen. Das Bolometer war aber auch gegen Druckänderungen sehr empfindlich; wenn nämlich ein Strom durch die Brücke floss, so zeigte die Galvanometernadel immer eine Erwärmung des Bolometers an, als das Entladungsgefäss ausgepumpt wurde, welche von der immer kleiner werdenden Wärmeleitung des Gases herrührte.

Es treten aber bei der Herstellung von so kleinen Bolometern gewisse schwer zu beseitigende Fehlerquellen ein. Die Streifen des grössten Bolometers betrugen z. B. nur etwa 11,5 × 1,3 mm. Es war nun beim Ablösen des Silbers vom Platinsilberblech nötig, um den Messingrahmen gegen die Salpetersäure zu schützen, denselben mit einem Wachshäutchen zu belegen, welches nachher mittels Terpentinöls gelöst wurde; letzteres wurde durch Alkohol entfernt. Während dieses Verfahrens war es fast unmöglich, trotz der grössten Sorgfalt Verzerrungen der dünnen Bolometerstreifen zu vermeiden. Dadurch konnte der Bolometerwiderstand verfälscht werden oder die Temperaturverteilung bei Einwirkung der Kathodenstrahlen und des Stromes nicht mehr annähernd gleich sein. Ausserdem bildete sich beim Aetzen ein bräunlicher Niederschlag auf den Bolometerstreifen, welcher vielleicht von einer Wirkung der Salpetersäure auf Unreinlichkeiten im Wachs herrührte. Diese Substanz liess sich nicht entfernen und kann irgendwie eine Quelle falscher Messungen gewesen sein.

§ 17. Es wurden vier verschiedene auf Messingrahmen montirte Bolometer benutzt. Die entsprechenden Messungsreihen sind hier kurz angegeben, obgleich wegen der genannten Fehlerquellen mindestens zwei derselben grosse Abweichungen zeigen. Erst bei der Benutzung eines auf einem Schieferrahmen befestigten Bolometers wurden verhältnismässig einwandsfreie Messungen erzielt (§ 22).

Bolometer I. Elf Streifen, 11,5 × 0,66 mm. Widerstand w bei Zimmertemperatur gleich 26,21 Ohm.

Nur wenige Messungen wurden mit diesem Bolometer gemacht, immer bei hohem Druck.

Druck	$i.10^7$ Amp.	V	$Q.10^5$ Watt	iV/Q
0,116	18,0	2590	213	2,21
0,113	12,3	2610	140	2,28
0,064	22,3	4090	541	1,69
0,055	13,7	4210	376	1,53

Die Werte von iV und von Q sind hier, wie bei allen folgenden Messungen, in Watt [cm^2 g/sec] anstatt g-cal./sec ausgedrückt.

Bolometer II. Neun Streifen, $11,5 \times 1,0$ mm. $w = 15,74$ Ohm.

Bei den meisten Messungen wurde der Strom von einer grossen, durch einen Elektromotor getriebenen Influenzmaschine geliefert; da sie bei kleinem Druck gemacht wurden (Kathodenstrom von 0,83 bis $2,70.10^{-7}$ Amp.), war kein Gang des Verhältnisses iV/Q vorhanden. Die Mittelwerte sind

$$i = 1,40.10^{-7} \text{ Amp.}, \quad \text{Druck} = 0,020 \text{ mm}, \quad iV/Q = 0,81.$$

Bei diesem Bolometer wurden auch folgende Messungen mittels der Hochspannungsbatterie gemacht.

Druck	$i.10^7$ Amp.	V	$Q.10^5$ Watt	iV/Q
0,029	6,37	3920	260	0,96
0,027	5,30	4140	230	0,95
0,023	3,68	4540	184	0,91

Diese Resultate stimmen mit denen durch die Thermosäule erhaltenen gut überein.

Bolometer III. Sieben Streifen, $11,5 \times 1,3$ mm. $w = 8,75$ Ohm.

Bei einer Versuchsreihe wurden Bolometer und Faraday'scher Cylinder abwechselnd auf das Potential Null und + 60 Volt gebracht, indem eine 60 Volt-Batterie, zwischen P (Fig. 3) und der Erde eingeschaltet, das ganze Viereck auf das Potential ihres isolirten Poles erhob. Mittels einer Wippe konnte man die Batterie aus- und einschalten.

Druck	v	$i \cdot 10^7$	V	$Q \cdot 10^5$	iV/Q
0,033	0	5,30	3130	106	1,57
	+60	7,20	3090	119	1,91
0,028	0	2,10	4320	80,8	1,12
	+60	3,23	4200	113	1,20
0,029	0	1,96	5150	75,5	1,33
	+60	4,91	4960	154	1,58
0,030	0	1,90	4230	67,5	1,19
	+60	2,80	4130	88,5	1,31
0,030	0	0,54	3910	20,8	1,02
	+60	0,67	3880	25,3	1,02
0,031	0	0,28	4220	11,9	0,98
	+60	0,56	3900	21,9	1,01

Aus dieser Tabelle geht hervor:

1. Dass, wie bei den Versuchen mit der Thermosäule, die Ladung des Bolometers auf ein positives Potential das genannte Verhältnis um so mehr vergrössert, je stärker der Kathodenstrom, je stärker also das durch ihn dem Gase erteilte Leitungsvermögen ist.[1])

2. Dass das Verhältnis bei den kleinsten benutzten Kathodenströmen sich von der Einheit wenig unterscheidet.

In dem letztgenannten Ergebnis scheint eine sehr gute Bestätigung der zu prüfenden Gleichung (4) enthalten zu sein; doch ist es in Widerspruch mit allen übrigen Messungen.

Bolometer IV. Sieben Streifen, 11,5 × 1,3 mm. $w = 9{,}20$ Ohm.

Die Werte des Verhältnisses sind sehr unregelmässig. Folgende sind die Mittelwerte aus drei Beobachtungsgruppen nach Werten des Druckes geordnet:

Druck	$i \cdot 10^7$ Amp.	iV/Q
0,070	9,43	0,81
0,040	11,48	0,76
0,023	0,18	0,72

1) Dass durch Ladung des Bolometers der absolute Wert von Q geändert wird, ist in § 12 erklärt worden.

Ebenso wie bei Bolometer I scheint das Verhältnis bei
hem Drucke von dem Drucke selbst und nicht von i abhängig
sein. Bei der dritten Gruppe wurden die Kathodenströme
ttels eines sehr grossen Jodcadmiumwiderstandes verkleinert.
Auf die obigen Resultate ist wegen der genannten Fehler-
elle bei der Herstellung der Bolometer kein grosses Gewicht
legen. Doch sprechen sie jedenfalls dafür, dass der Wert
n iV/Q etwas kleiner als 1 ist.

§ 18. Es wurde daher ein Bolometer nach dem Kurl-
um'schen Verfahren auf einen Schieferrahmen mittels Kolo-
oniums befestigt; die Befestigungsstellen wurden durch Asphalt-
k bedeckt. Nach dem Aetzen sahen die Platinstreifen absolut
n aus, sie schienen auch von jeder Verzerrung frei zu sein.
n nun die Kathodenstrahlen vom Asphalt bez. vom Schiefer
zuhalten, wurde ein zur Erde abgeleiteter Messingschirm,
ssen Oeffnung genau der Fläche des Bolometerwiderstandes
tsprach, dicht über dem Bolometer befestigt.

Bolometer V. Sieben Streifen, $7 \times 0{,}73$ mm. $w = 8{,}72$ Ohm.
Die Fläche war nur etwa $^1/_3$ so gross, wie bei den übrigen
lometern; es war daher die Dichtigkeit der auf verschiedene
ile des Bolometers fallenden Kathodenstrahlen als nahezu
nstant zu betrachten (vgl. § 18).

Es wurden folgende Messungen gemacht:

Druck	$i \cdot 10^7$	V	$Q \cdot 10^5$	iV/Q
0,038	6,10	2270	76,9	1,80
0,061	5,00	2600	82,3	1,58
0,035	4,80	3480	149	1,12
0,024	2,26	3770	85,5	1,00
0,024	2,09	3560	81,2	0,92
0,030	1,69	4460	92,6	0,81
0,022	1,36	3730	58,0	0,87
0,032	1,09	3740	50,4	0,81
0,032	1,06	3750	47,9	0,83
0,028	0,50	3900	23,6	0,83
0,026	0,255	4740	14,5	0,83
0,023	0,040	4800	2,29	0,84

Daraus ergiebt sich, dass der beobachtete Wert des Ver-
ltnisses iV/Q vom Kathodenstrom und nicht vom Druck

abhängt, was wir bei mittleren und kleinen Drucken schon vorhin gefunden haben (§§ 11, 21). Ebenso wie bei Bolometer III steigt das Verhältnis mit wachsendem Kathodenstrom bedeutend stärker als bei den Versuchen mit der Thermosäule.

Das Bolometer V war von den Fehlerquellen der übrigen Bolometer scheinbar annähernd frei; es können daher nur die gewöhnlichen Beobachtungsfehler, insbesondere derjenige durch die Gasentwickelung, in Betracht gezogen werden. Da bei schwachem Kathodenstrom der Fehler kaum grösser als 3 Proc. sein kann, so folgt aus den obigen Messungen, dass, sofern keine noch nicht entdeckte Fehlerquelle vorhanden ist, *der Grenzwert des Verhältnisses* iV/Q *zwischen 0,80 und 0,86 liegt.*

Schlussfolgerungen.

§ 19. Es bleibt nur noch übrig, die Beziehung zwischen dem gefundenen Grenzwert des Verhältnisses und der zu prüfenden Gleichung (4a) zu untersuchen. Wir haben nämlich nach der Emissionshypothese die Gleichung

$$\frac{iV}{Q} = \frac{1 - r}{1 - r r'}$$

abgeleitet, wo r den reflectirten Bruchteil der Strahlen darstellt, während die Strahlen bei der Reflexion ihre Energie im Verhältnis $r' : 1$ verlieren.

Starke[1]) hat gefunden, dass Platin ungefähr 40 Proc. der Kathodenstrahlen reflectirt. Nimmt man an, dass dieser Bruchteil der Strahlen vom Bolometer reflectirt wird, d. h. dass in der obigen Gleichung $r = 0,4$, so erhält man, wenn $iV/Q = 0,83$, den Wert $r' = 0,7$.

Dieses Ergebnis steht mit den genannten Versuchen von Merritt (§ 2) in Widerspruch. Letztere sind aber, wie auch der Verfasser selbst zugiebt, leider nicht sehr einwandsfrei. Merritt hat nämlich die Ablenkbarkeit der directen und der reflectirten Strahlen durch die Verschiebung der Phosphorescenzflecken beobachtet. Es ist nun kaum zu denken, dass der Fleck bei dem reflectirten Strahl auch nur annähernd ebenso scharf sein kann als bei dem directen; ferner sollte man, da

1) H. Starke, l. c. p. 58.

ein Inductorium als Stromquelle benutzt wurde, das Entstehen eines „Kathodenspectrums"[1]) erwarten, wodurch beide Flecke sich sehr verändern würden. Daraus ist es leicht einzusehen, dass ein systematischer Fehler bei den Messungen eintreten könnte.

Ob ein solcher Fehler gross genug ist, um den Wert $r' = 1$ anstatt $r' = 0{,}7$ zu ergeben, lässt sich nicht ohne weiteres sagen; es sei nur erwähnt, dass die Energie der Kathodenstrahlen dem Quadrat der Ablenkbarkeit proportional ist, folglich würde einem Fehler von n Proc. bei der Ablenkbarkeitsmessung ein Fehler von $2n$ Proc. in der Energie entsprechen.

Es wäre jedenfalls sehr wünschenswert, sowohl die Energie als auch die Ablenkbarkeit der reflectirten Kathodenstrahlen auf möglichst einwandsfreie Weise zu messen.

Zum Schlusse sei es mir gestattet, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Prof. Dr. Warburg, für seine Anregung und vielseitige Unterstützung während dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank auszudrücken.

1) K. Birkeland, Compt. rend. **123.** p. 492. 1896.

(Eingegangen 17. März 1900.)

8. *Ueber den elektrischen Lichtbogen zwischen Metallelektroden in Stickstoff und Wasserstoff; von Leo Arons.*

1. Metallelektroden haben für die theoretische Untersuchung der Verhältnisse im Lichtbogen vor Kohlenelektroden zwei Vorzüge: erstens ist ihr Material besser definirt, zweitens geben sie während des Brennens nicht die grossen Mengen von fremden Gasen aus, die bei Kohlenelektroden das Arbeiten in beliebig variirten Atmosphären fast ausschliessen. Ich habe mich deshalb seit vielen Jahren mit Beobachtungen des Lichtbogens zwischen Metallen beschäftigt; leider stellen sich aber auch hier so zahlreiche Schwierigkeiten ein, dass an Präcisionsmessungen gar nicht zu denken ist. Im Folgenden gebe ich eine Uebersicht über die Resultate, welche ich mit Metallelektroden in N und H erhalten habe. Als Elektricitätsquelle benutzte ich die städtische Leitung (105—110 Volt Spannung); über Versuche mit höheren Spannungen werde ich später berichten.

Die Apparate.

2. Als Elektroden dienten cylindrische Metallstäbe von 5—8 mm Durchmesser, die rechtwinklig gebogen, sich mit den verticalen, 4 cm langen Schenkeln in Abständen von Bruchteilen eines Millimeters bis zu mehreren Millimetern parallel gegenüberstanden. Die horizontalen Schenkel waren zwischen dreieckig ausgefeilten Metallbacken verschraubt, die von Schiefersäulchen getragen werden. Die Schiefersäulchen waren in eine Messingfussplatte eingeschraubt und mit Mennige verkittet. Die Stromzuleitung geschah durch Klemmschrauben an den Metallbacken. Der kleine Apparat stand auf einer gut abgeschliffenen Glasplatte, die an zwei Stellen von 8 mm starken eingekitteten Metallstäben mit Klemmschrauben durchsetzt wurde. Die Platte ruhte auf zwei Glaskästen, die mit Wasser gefüllt waren; in das Wasser tauchten die eingekitteten Metallstäbe, um die Kittung kühl zu halten. Auf die Glasplatte wurde eine gut aufgeschliffene Glasglocke mit ein wenig Fett

aufgesetzt. Die Glasglocke hatte eine Höhe von 20 cm und einen Durchmesser von 10 cm. In zwei Tubulaturen, oben und seitlich unten, waren starke Messingröhren von 6 cm Länge eingekittet, die weiter die angelöteten Schlauchansatzstücke trugen. Die Messingröhren wurden zum Schutz der Kittung mit feuchten Lappen umwickelt. Zum Schutz der oberen Kittung gegen das directe Aufströmen der heissen Bogendämpfe war über dem Bogen ein conisches Glimmerdach (sog. Blaaker) befestigt. Von den Schlauchansatzstücken führten Druckschlauchleitungen zum Gasometer, zur Quecksilberluftpumpe und zu einem offenen Manometer. Der Stromkreis, der von der städtischen Centrale (105—109 Volt Spannung) gespeist wurde, enthielt ausser dem Ampèremeter variirbare Widerstände, von denen die grössten durch Glühlampen gebildet wurden, die bis zur Zahl von 16 nebeneinander geschaltet werden konnten. Neben dem Bogen lag zur Spannungsmessung ein Voltmeter — Volt- und Ampèremeter waren aperiodisch. Zur Entflammung des Bogens dienten die Funken einer Leydenerflasche, die von einem Inductorium erregt wurden. Damit der Hauptstrom nicht durch die secundäre Rolle des Inductoriums verzweigt wurde, was namentlich bei Verlöschen des Bogens bedenklich werden konnte, war nur die eine Belegung der Flasche unmittelbar mit der einen Elektrode des Inductoriums verbunden, während sich zwischen der zweiten Elektrode und der anderen Flaschenbelegung eine kleine Funkenstrecke befand. Solange das Inductorium in Betrieb war, musste das Ampèremeter kurz geschlossen, das Voltmeter abgetrennt sein, um ein sonst ziemlich sicheres Durchschlagen ihrer Windungen zu vermeiden. Der Stickstoff wurde durch vorsichtiges Erwärmen einer concentrirten Lösung von $(NH_4)_2SO_4$ und $2\,NaNO_2$ gewonnen und im Gasometer über Wasser aufgefangen; der Wasserstoff wurde aus einer Elkan'schen Bombe nach Durchstreichen dreier Waschflaschen mit Pyrogallollösung in das Gasometer geleitet. Zwischen Gasometer und Versuchsgefäss wurden die Gase scharf getrocknet.

Die Versuche.

3. Mit Recht ist von Frau Ayrton, der gründlichen Untersucherin des Kohlenlichtbogens, betont worden, dass man,

um zu genauen Resultaten zu gelangen, bei jeder Messung völlig constante Verhältnisse abwarten müsse. Bei meinen Versuchen war das leider unerreichbar. Es wurde ein bestimmter, am Manometer abgelesener Druck im Versuchsgefäss hergestellt; aber vom Beginn des Stromes an bewegt sich das Manometer — es sind deshalb die Druckangaben nur als ungefähre zu betrachten. Vor allen Dingen aber verändern sich die Elektroden schnell, sie werden zum grössten Teil weich und würden zusammenschmelzen, wenn man nicht vorher den Versuch abbricht. Es dürfen deshalb auch die Angaben über die elektrischen Grössen nur als ungefähre Werte betrachtet werden. Es wurden mit allen Metallen Versuchsreihen bei aufsteigendem und abnehmendem Gasdruck angestellt, mit den meisten nur bei einem Abstand der Elektroden von ca. 1,4 mm; einige kamen nicht nur bei verschiedenen Abständen, sondern auch mit verschiedenem Durchmesser der Elektroden zur Untersuchung; stets wurde auf zuverlässige Dichtung des Apparates geachtet und diese nach Abschluss der Reihen controlirt; häufig wurden auch bei auffälligeren Vorgängen innerhalb der Versuchsreihen durch Zurückgehen Controlversuche ausgeführt. Trotz aller Vorsicht und Mühe bin ich aber nicht zu Messungsergebnissen gelangt, die ausführlich mitgeteilt zu werden verdienen.

Ergebnisse.

A. Metalllichtbogen in Stickstoff.

I. Qualitative Ergebnisse.

4. Es konnten Messungen an folgenden Metallen angestellt werden: Al, Cd, Cu, Fe, Mg, Messing, Pb, Pt und Zn. Zinn schmolz sofort. Höchst auffällig war das Verhalten des Silbers. Während Silber in Luft einen prächtigen Lichtbogen giebt — nach den Messungen v. Lang's[1]) erfordert Silber sogar von allen untersuchten Metallen die geringste elektromotorische Kraft zur Erzeugung des Bogens —, gelang es mir zwischen Ag-Elektroden in N überhaupt nicht einen dauernden Bogen zu erhalten. Bei niedrigen Drucken flammt ein Bogen nicht einmal während des Funkenspiels des Inductoriums

1) V. v. Lang, Wied. Ann. **31**. p. 389. 1887.

auf; ein solches Aufflackern des Bogens fand ich bei einem Abstand der Elektroden von 1,4 mm erst oberhalb 30 cm Druck. Bei geringerem Abstand der Elektroden (0,5 mm) entstand bei Atmosphärendruck ein Bogen (Stromstärke ca. 13 Amp., Spannung 25—30 Volt); aber auch dieser war nicht dauernd; häufig fanden kurz dauernde Ueberbrückungen durch Silbertröpfchen statt (Spannung 0 Volt); häufig verlöschte der Bogen; ja bisweilen sprang das Voltmeter von 0 auf 108 Volt — dem Sprengen des Kurzschlusses folgte keine Bogenentladung. Bei diesem Versuch betrug der äussere Widerstand ca. 6 Ohm; jede Vermehrung des äusseren Widerstandes machte selbst diesen Bogen unmöglich; unter 6 Ohm konnte ich bei meinen Apparaten nicht hinuntergehen.

Zur Erklärung dieses eigenartigen Verhaltens des Silbers kann man annehmen: 1. bei der Entstehung des Lichtbogens spielen chemische Vorgänge zwischen dem Elektrodenmaterial und dem umgebenden Gas eine Rolle[1]; 2. zwischen Silber und Stickstoff besteht nur eine sehr schwache chemische Verwandtschaft. Zu einem ähnlichen Schluss führen Beobachtungen von Kreusler[2]) über photoelektrische „Ermüdungserscheinungen“, die bei sämtlichen von ihm untersuchten Metallen einschliesslich des Platins auftraten, während sie beim Silber ausblieben[3]; gleichzeitig konnte bei allen Metallen, mit Ausnahme des Silbers, eine Oberflächenveränderung an den vom Licht getroffenen Stellen durch Anhauchen auch sichtbar gemacht werden. Eine Oxydation unter dem Einfluss der Lichtstrahlen ist ausgeschlossen, da diese beim Silber sicher stärker hätte sein müssen, als beim Platin.

5. Dass sich Metallnitride wirklich bilden, zeigt deutlich das Verhalten des Aluminium.[4] Die Aluminiumelektroden zeigten sich nach längerem Brennen des Bogens in der N-

---

1) J. J. Thomson (Beibl. **20.** p. 303ff. 1896) schliesst aus gewissen Erscheinungen bei Gasentladungen, „dass dem Uebergang der Elektricität von dem Gase zur (Metall-)Elektrode die Bildung einer chemischen Verbindung vorhergeht“.

2) H. Kreussler, Verhandl. d. physikal. Gesellsch. zu Berlin **17.** p. 88. 1898.

3) L. Arons, Naturw. Rundsch. **14.** p. 454. 1899.

4) l. c.

Atmosphäre mit einer ziemlich starken grauschwarzen Kruste bedeckt, die beim Eintragen in heisse Kalilauge leicht als Nitrid erkannt wird; die grauschwarze Färbung rührt vermutlich von der ausserordentlich feinen Verteilung her — von Mallet ist 1876 ein Aluminiumnitrid (Al_2N_2) beschrieben worden, das teils amorph von blassgelber Farbe, teils krystallisirt und honiggelb durchscheinend erhalten wurde —, doch ist es auch nicht ausgeschlossen, dass hier ein Nitrid von anderer Zusammensetzung vorliegt, — so sind vom Fe und Ti je zwei, vom Vd gar drei Nitride bekannt. Bemerkenswert ist es, dass nach dem Brennen des Aluminiumlichtbogens der Glimmerschirm und die Glasglocke mit äusserst fein verteiltem Aluminium bedeckt ist — dieser Beschlag bildet sich, indem graue oder bräunliche Rauchwolken vom Bogen ausgehen, namentlich bei höheren Drucken und Stromstärken. Seine ausserordentliche feine Verteilung und das ganz unmetallische Aussehen wie eine gleichmässige dichte graue, in zusammenhängenden Flocken abnehmbare Decke lassen vermuten, dass das Metall erst aus einer chemischen Verbindung (Nitrid) wieder abgeschieden ist. Man hätte anzunehmen, dass sich das Nitrid bei einer gewissen, ziemlich hoch liegenden Temperatur bildet und bei einer noch höheren zerfällt, — dass die Temperatur im Lichtbogen selbst bedeutend höher ist, als an den Elektroden, ist bei Metallelektroden eine bekannte Erscheinung.[1]) Auch hätte der chemische Vorgang nichts Auffälliges; so giebt Moissan[2]) an, dass sich bei der Reduction von Titansäure durch Kohle im elektrischen Ofen bei einem Strom von 350 Amp. und 50 Volt Titannitrid bildete, das erst bei 1000 Amp. und 70 Volt wieder zersetzt wurde; beide sehr hohe Temperaturen lassen sich nach Moissan's Angaben nicht in Graden angeben.

6. Ausser an Aluminiumelektroden liess sich Nitrid nach dem Uebergang des Bogens in der Stickstoffatmosphäre auf chemischem Wege nur noch bei Magnesium nachweisen; die ebenfalls grauschwarze Masse gab schon mit Wasser erhitzt

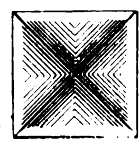
---

1) L. Arons, Wied. Ann. 58. p. 84. 1896.

2) H. Moissan, Der elektrische Ofen. Deutsch von Zettel, 1898. p. 25.

NH_3 aus. Bei den übrigen Metallen deuteten nur Färbungen, den Anlassfarben ähnlich, auf Nitridbildungen hin; aber bei allen findet sich auf dem Glimmerschirm, wie auf der Glasglocke, meist auch auf der Grundplatte eine Metallstaubdecke ähnlich der beim Aluminium beschriebenen. Namentlich bei geringeren Drucken zeigt sich zunächst fein zerstäubtes Metall als schwarzer Anflug auf der Kathode, wohl auch auf der Anode; ob diese schwarzen Pulver ausser beim Platin bekannt sind, weiss ich nicht[1]); Nernst[2]) macht gelegentlich die Bemerkung, dass alle metallisch leitenden Stoffe fein gepulvert schwarz sein müssen. Ich habe die Schwärzung ausser beim Pt beim Cu, Al, Fe, Pb, Cd, Zn und Mg beobachtet.[3])

7. Bevor ich zu den eigentlichen Messungsergebnissen übergehe, führe ich aus den zahlreichen Einzelbeobachtungen hier nur noch an, dass die Messingelektroden sich beim Brennen des Bogens kupfrig färben — der Bogen wird hauptsächlich vom Zn gespeist, sodass sich auch im Staub Cu nur spurenweise findet. Der Bogen zwischen Pt-Elektroden kommt erst bei N-Drucken über 50 cm zu Stande — und auch hier nur bei grossen Stromstärken (> 7 Amp.); er erlischt, sobald auch die Kathode zu glühen beginnt.



Die Kuppe der Anode[4]) ist dabei flüssig; nach dem Erstarren zeigt sie unter dem Mikroskop zahlreiche, sehr niedrige quadratische Pyramiden mit feiner Zeichnung (vgl. Figur), die in grosser Anzahl bei einander lagen, teilweise einander deckend. Das Cd zerstäubt wie die übrigen Metalle, doch kommt es offenbar auch zur Verdampfung; nur so erklärt es sich, dass nach den Versuchen mit Cd-Elektroden sich die Messingteilchen des kleinen Apparates zum Teil mit silberweisser Färbung legirt zeigten.

1) Die Bildung eines „schwarzen Niederschlages" bei den Lichtbogen zwischen einer Zinkspitze und einer Platinplatte im „Vacuum der Luftpumpe" erwähnt de la Rive in Pogg. Ann. 76. p. 278. 1849.

2) W. Nernst, Zeitschr. f. Elektrochemie 6. p. 41. 1899.

3) Bei Sn und Ag in Wasserstoff vgl. unten.

4) Als Elektroden dienten hier Pt-Stäbchen, die auf Messingstäbe aufgeschraubt waren und sich mit ihren Enden horizontal gegenüberstanden.

II. Quantitative Ergebnisse.

8. V. v. Lang hatte auf Grund seiner sorgfältigen Messung an Metalllichtbogen in atmosphärischer Luft (1887) mit aller Vorsicht die Vermutung ausgesprochen, dass die Spannung am Bogen mit der Schmelztemperatur des Metalles zunähme; die einzige Ausnahme bildete damals das Silber; inzwischen hat v. Lang (1897) eine weitere Ausnahme im Aluminium gefunden. Ich stelle die Resultate v. Lang's in atmosphärischer Luft mit den von mir in N bei Atmosphärendruck erhaltenen zusammen; indem ich die Gesamtspannung zu Grunde lege, die ich bei 1,4 mm Elektrodenabstand und 4 Amp. gemessen habe und die sich bei den v. Lang'schen Versuchen aus den Formeln berechnen lässt. Meine Versuche sind nicht genau genug, um Formeln aufzustellen, die den Einfluss des Elektrodenabstandes und der Stromintensität wiedergeben — übrigens ist auch v. Lang in späteren Arbeiten mit Recht von der Formel zurückgekommen, die er 1887 seinen Berechnungen zu Grunde gelegt hat (vgl. unten § 9).

Tabelle 1.

Für den Elektrodenabstand 1,4 mm und die Stromstärke 4 Amp.

Metall	Spannung in Volt		Bemerkungen
	In Luft (v. Lang)	In N (Arons)	
Ag	21	?	
Zn	23	21—22	Bei schwächerem Strom gemessen
Cd	25	21—22	Bei schwächerem Strom gemessen
Cu	27	29—32	
Fe	29	19—22	
Pt	36	29—31	Bei stärkerem Strom gemessen
Al	39	26—29	
Pb	—	18	Bei schwächerem Strom gemessen
Mg	—	21—23	

Die Tabelle zeigt deutlich den Einfluss des umgebenden Gases. Abgesehen von dem besonders charakteristischen Verhalten des Ag, das schon im vorigen Abschnitt besprochen, sehen wir auffällige Unterschiede beim Cu und Fe; während bei allen übrigen Metallen die Spannungen im N kleiner sind,

als in der Luft, ist es beim Cu umgekehrt, und das Fe, das in der Luft zu den Metallen mit höherer Spannung zählt, zeigt in N fast die niedrigste. Wir sind auf Grund dieser Zahlen zu der Annahme berechtigt, dass ganz allgemein bei dem Lichtbogen zwischen Metallen in Stickstoff die chemischen Beziehungen zwischen dem Metall und N eine erhebliche Rolle spielen. Dass beim Metalllichtbogen in Luft die Oxydationsvorgänge in erster Linie ins Auge zu fassen sind, hat zuerst de la Rive beobachtet, der bemerkte, dass sich in diesem Fall selbst beim Platin Oxydspuren nachweisen liessen. Eine weitere Einsicht in die Natur der Vorgänge wird man erst erhalten können, wenn die Verhältnisse der Bildung und Zersetzung der Oxyde und Nitride bei sehr hohen Temperaturen untersucht sein werden.

9. Wie schon oben bemerkt, nimmt bei gegebenem Abstand der Elektroden die Spannung an den Elektroden ab, wenn die Stromstärke steigt. Auch v. Lang ist von seiner für den Metalllichtbogen in der Atmosphäre gegebenen Formel von der Form $v = a + b\,i$ zurückgekommen (v Spannung, i Stromintensitäten, a und b Constanten — in b steckt der Abstand der Elektroden); wenigstens stellt er in einer späteren Arbeit[1]) über die Aluminiumlichtbogen seine Rechnung mit Formeln an von der Form $v = a + b / i$. Bei meinen Versuchen zeigte sich diese Abnahme der Spannung mit steigender Stromstärke bei allen Drucken. So fand ich z. B. für Zn in N (Elektrodenabstand 1,4 mm)

Stromstärke	0,7	1	1,7	2,3 Amp.
120 mm Druck	23—24	20—21	18—19	16—17 Volt
720 „ „	27—29	25—26	22—23	21—22

und für Mg bei 400 mm Druck

0,6	1,1	2	3	4,8 Amp.
32	25	22	18	17 Volt

1) V. v. Lang, Wied. Ann. **63.** p. 192. 1897.

10. Eine zweite Beziehung gilt ebenfalls für alle untersuchten Metalle; überall wächst die Spannung bei gleicher Stromstärke und Abstand mit dem Druck. Als Beispiel führe ich an:

a) Cd, Abstand 1,4 mm, Stromintensität 1,6 Amp.

Druck in mm	10	60	100	220	380	600	750
Spannung in Volt	(12)	16	17	21	22	23	23

b) Pb, Abstand 1,4 mm, Stromstärke 1,8 Amp.

Druck in mm	8	30	90	190	250	370	490	620	730
Spannung in Volt	(18)	(10—20)	(13—18)	15	16	17	17	18	18

c) Zn, Abstand 1,4 mm, Stromintensität 2,4 Amp.

Druck in mm	< 1 mm	11	20	40	60	90	210	330	470	600	710
Spannung in Volt	11	12	13	14	15	16	18	19	20	21	22

d) Mg, Abstand 1,5 mm, Stromstärke 4,5 Amp.

Druck in mm	< 1 mm	90	220	360	490	660
Spannung in Volt	(14)	17	17	20	20	22

Bei niedrigen Drucken (< 40 mm) finde ich einige eingeklammerte Zahlen in den Tabellen — auf diese komme ich zurück (vgl. unten § 13).

11. Ein sehr verschiedenes Verhalten zeigen die Metalle, wenn man die geringste Stromstärke betrachtet, mit der man den Bogen zwischen ihnen in N betreiben kann.

Bereits oben war erwähnt, dass der Bogen zwischen Ag-Elektroden erst bei Atmosphärendruck mit einer Stromstärke von ca. 13 Amp. zu erhalten war [auch bei nur sehr kleinem Abstand (0,5 mm) der Elektroden und unter grossen Schwierigkeiten (vgl. oben p. 702)]; auch bei Pt war (vgl. oben p. 705) ziemlich hoher Gasdruck und grosse Stromintensität nötig, wenn der Bogen brennen sollte.

Schwächste Ströme, die unter den gegebenen Verhältnissen bei Atmosphärendruck in N erhalten werden konnten (Abstand 1,4 mm).

Metall	Stromint. (Amp.)	Spannung (Volt)	Metall	Stromint. (Amp.)	Spannung (Volt)
Pb	0,6	24	Fe	1,1	31
Zn	0,6	28	Cu	3	33
Mg	0,6	31	Al	4	29
Cd	0,9	28	Pt	7	30

Würden wir einen anderen als Atmosphärendruck wählen, so könnte die Reihenfolge eine ganz andere werden. Für einzelne Metalle giebt es nämlich Druckgebiete, innerhalb deren sich schwächere Ströme herstellen liessen, als bei Atmosphärendruck. In diesem Sinne haben folgende Metalle ein ausgesprochenes Optimum.

Metall	Druckgebiet des schwächsten Stromes	Stromintensität (Amp.)	Spannung (Volt)
Zn	300—400 mm	0,3	32
Cd	100—250	0,3	ca. 25
Al	100—500	2,4	29

12. Bei sehr geringen Drucken (< 1 mm) konnte im allgemeinen nicht beobachtet werden, da die einleitende Entladung des Inductoriums und der Leydener Flasche nicht zwischen den nahestehenden Elektroden überging, sondern einen Weg zwischen entfernteren Metallteilen suchte. Während des Brennens des Bogens zu diesen niedrigen Drucken zu gelangen, war wegen der erheblichen Zeitdauer nicht möglich. Nur bei Zn und Mg konnte auch bei den geringsten Drucken gemessen werden, da der Bogen im allgemeinen eine sehr feine Brücke von hohem Widerstand zurückliess, die aber das Angeben des Bogens ohne einleitende Entladung höherer Spannung ermöglichte. Diese Brücke hatte beim Zn stets das Aussehen eines feinen kohlschwarzen Fadens, beim Mg war sie nicht so fein und von grauschwarzer Färbung.

Beim Zn beobachtete man bei einem Druck < 1 mm z. B. (Abstand 1,4 mm) 11 Volt Spannung bei einer Stromstärke von 2,4 Amp. Der Bogen bestand aus einer grossen, kugeligen, beweglichen Flamme; sie hatte eine pfirsichblütenartige Farbe, im Innern einen kleinen blauen Kern; bei höheren Drucken

blieb bloss dieser blaue Kern bestehen. Auch sonst zeigten sich bei den niedrigsten Drucken besondere Erscheinungen — so überzieht sich die Anode bisweilen auf ihrer ganzen Länge mit einer mattgelben Glimmlichthaut, bisweilen setzt die Entladung an der Anode mit einem blutroten Fleck an. Von grösserer Bedeutung sind die quantitativen Aenderungen, die bei dem *Magnesium*lichtbogen mit der Aenderung des Aussehens verbunden sind.

So zeigte sich bei einem Druck < 1 mm und einem Elektrodenabstand von 3 mm neben einer ziemlich gleichmässig grünen Entladung (charakteristische Färbung des Mg-Bogens) ein blassblauer Bogen, der an der Anode in rosa überging; für den engen grünen Bogen las man bei einer Stromstärke von 4,8 Amp. die Spannung 14 Volt ab, dem grösseren blassblauen entsprach bei 4,3 Amp. die Spannung von 28 Volt — der äussere Widerstand im Stromkreis war nicht geändert —, die Entladungen wechselten ziemlich schnell miteinander ab, die Ablesungen sind infolge dessen nicht sehr genau.

13. Dieser Wechsel zwischen zwei Entladungsformen beim Magnesium zeigt sich auch noch in höheren Drucken bei geringeren Stromintensitäten. So waren bei 8 mm Druck die grünen Bogenströme oberhalb 4 Amp. stabil, dagegen erhielt man bei etwas grösserem Widerstand den grünen Bogen (3,1 Amp. 18—20 Volt) abwechselnd mit dem blassblauen (3,0 Amp. 24—26 Volt); ja selbst bei 200 mm zeigt der Bogen mit möglichst geringer Stromstärke (ca. 1 Amp.) beide Entladungsformen, das Voltmeter schwankt zwischen 28 und 40 Volt. Auch bei den meisten anderen Metallen zeigten sich ähnliche Erscheinungen. Beim Cu ist der Bogen bei niedrigen Drucken (wenige Millimeter) bisweilen gelblich-rosa, statt grün; beim Aluminium halb blau, halb hellrosa; beim Eisen zeigt sich statt des charakteristischen tiefblauen Bogens bisweilen ein halb rosa, halb hellblauer, und zwar bei Drucken bis zu 100 mm, wenn die Stromstärke genügend klein (der Vorschaltwiderstand genügend gross) ist etc. Auf diesem Wechsel der Entladungsart beruht die Unsicherheit der eingeklammerten Zahlen der Tab. a), b) und d) des § 10.

14. Es scheint, als ob man bei Anwendung grösserer elektromotorischer Betriebskräfte zu noch ausgesprocheneren Erscheinungen gleicher Art gelangen kann. Ich habe vor

einigen Jahren eine grosse Reihe diesbezüglicher Versuche ausgeführt, von denen ich einige charakteristische hier erwähnen möchte. Als Stromquelle diente ein Gleichstromtransformator (elektromotorische Kraft 680 Volt); die Anode war ein Eisenstab von etwa 6 mm Durchmesser, als Kathode diente eine Quecksilberkuppe von ca. 20 mm Durchmesser; das Gas war atmosphärische Luft, deren Druck mittels Luftpumpe beliebig variirt werden konnte; der Bogen kam nämlich in einem Glasrohr zu Stande, in dessen oberes geschlossenes Ende der Eisenstab eingekittet war, während die Quecksilberkuppe durch Heben und Senken eines grösseren, mit dem unteren Rohrende durch Schlauch verbundenen Gefässes voll Quecksilber eingestellt werden konnte. Der abgeschlossene Raum stand durch ein Ansatzrohr mit der Luftpumpe in Verbindung. Bei niedrigen Drucken und gewissen äusseren Widerständen, die im Verhältnis 1 : 2 : 4 gesteigert werden konnten, ergaben sich zwei verschiedene Entladungsarten, von denen die mit grösserer Stromstärke dem Lichtbogen glichen, die mit schwächerer der Glimmentladung ähnelten, der Elektrodenabstand betrug 2,5 cm.

ck	Widerstand (in willkürl. Maass)	Stromstärke (Amp.)	Spannung (Volt)	Durchschnittliche Dauer des Vorgangs	Bemerkungen
nm	1	0,47	88	20 sec	20 sec Mittel aus 27, 10, 35; 10, 20, 20
		0,18	440	6,5	6,5 sec Mittel aus 13, 10, 1; 5, 5, 5
	2	0,23	105	7	7 sec Mittel aus 1, 15, 7, 3, 14, 2
		0,10	410	23	23 sec Mittel aus 4, 33, 35, 20, 26
	4	—	—	—	
		0,047	400	dauernd	
ım	1	0,32	250	—	Welche Entladungsart eintritt, hängt davon ab, ob zur Einleitung das Hg mit dem Fe zur Berührung gebracht, oder ihm nur genähert wird. Der Bogen schlägt leicht in die andere Entladung über.
		0,12	510	—	
	2	0,12	330	—	
		0,058	530	—	

Von besonderem Interesse erscheinen mir die Zahlen bei 10 mm Druck. Zwei verschiedene, ziemlich stabile Zustände springen in verhältnismässig regelmässigem Rhythmus in einander über; je nach der Grösse des äusseren Widerstandes dauert jedesmal der eine oder der andere länger an.[1])

B. Metalllichtbogen in Wasserstoffatmosphären.

15. In Wasserstoff waren die Messungen noch schwieriger auszuführen als in Stickstoff. Diese Erfahrung ist nicht neu, so schreibt Graham[2]), der die Glimmentladung auch in H-Röhren mittels einer grossen constanten Batterie untersuchte, dass mit derselben Batterie zwar Ströme bis zu erheblich höheren Drucken durch H geleitet werden konnten, als durch N — aber „mit H konnten wegen der Unstetigkeit des Stromes nur sehr dürftige Messungen gemacht werden". Das bezieht sich auf Graham's Versuche unter Benutzung von Pt-Elektroden, mit Al-Elektroden war der Strom noch viel schwankender. Frühere Versuche, Metalllichtbogen in H-Atmosphären zu erhalten, sind fehlgeschlagen; so führt Herwig[3]) aus: „Bei der von mir verwandten Batterie von 50 Grove'schen Elementen der gewöhnlichen Grösse werden überhaupt nur sehr unvollkommene Lichtbogen in Wasserstoff erzielt und kam ich dabei zu keinen scharfen Resultaten." Auch Grove vermochte keine Metalllichtbogen in H zu erzielen. Die von Herwig benutzte Spannung (50 Grove = 95 Volt) war nicht erheblich geringer, als die von mir angewendete (ca. 106 Volt). So ergab sich denn auch bei meinen Versuchen, dass bei manchen Metallen überhaupt kein Lichtbogen in H erzielt werden konnte, bei anderen nur unter ganz bestimmten Umständen, bei keinem in H-Atmosphären von mehr als 400 mm Druck. Die wichtigsten Ergebnisse führe ich bei den einzelnen Metallen an. Allgemein ist zu bemerken, dass bei allen Metallen, die überhaupt den Bogen zeigten, die zerstäubte

1) Ueber das Umschlagen zweier Entladungsformen ineinander vgl. O. Lehmann, Wied. Ann. 55. p. 370. 1895; ferner L. Arons, Wied. Ann. 58 p. 89. 1896. Ueber die Möglichkeit zweier stabiler Zustände einer Gasentladung bei gleichen äusseren Bedingungen vgl. W. Kaufmann, Göttinger Nachr. 1899. p. 246 f.

2) P. Graham, Wied. Ann. 64. p. 59. 1898.

3) H. Herwig, Wied. Ann. 29. p. 523. 1873.

Menge sich zum grossen Teil als feinster schwarzer Staub völlig analog dem Platinschwarz zeigte; namentlich fand sich dieses Metallschwarz stets auf der Kathode abgesetzt.

16. *Kupfer in* H. Selbst bei einem Abstand von nur 0,1 mm und einem äusseren Widerstand von nur 6 Ohm kommt kein dauernder Bogen zu stande. Der während des Spielens des Inductoriums aufflackernde Bogen zeigte meist eine rosaviolette Färbung; das für Kupfer charakteristische Grün tritt nur selten hervor.

17. *Eisen in* H. Nur sehr starke Ströme können den Bogen erzeugen. Von niedrigen Drucken ausgehend erhielt ich erst bei 65 mm einen Strom von ca. 12—13 Amp., der mit 28—30 Volt einsetzte; bei starkem Funkensprühen geriet auch die Kathode ins Glühen, die Spannung stieg auf 38 Volt, dann schmolzen die Elektroden zusammen, die Anode war flüssig geworden.

18. *Silber in* H. Erst Ströme von 12—13 Amp. liefern gelegentlich einen Bogen; so erhielt ich z. B.

bei 15 mm	23—29 Volt
„ 65	35—39
„ 350	29—30

häufig verlöscht der Bogen; anderenfalls muss er bald unterbrochen werden, da die Anode sehr rasch zu schmelzen beginnt; sicher ist das Eintreten des Bogens nicht. Oberhalb 400 mm trat er nie ein.

19. *Platin in* H. Die Druckgrenzen, innerhalb deren ein Bogen zu stande kommen konnte, waren 15 und 140 mm; die geringste Stromstärke war 9,5 Amp. Beide Elektroden glühen; häufig verlöscht der Bogen von selbst; anderenfalls muss der Strom unterbrochen werden, weil die Anode weich wird. Die Zerstäubung ist sehr beträchtlich und besteht ausschliesslich in Platinschwarz. Bei 1,4 mm Abstand der Elektroden und einer Stromintensität von etwa 11 Amp. ergab sich

bei einem Druck von	19	25	30	50	70	90	130 mm
eine Elektrodenspannung von	29	28	28	32	36	40	42 Volt

und ähnlich für ca. 9,6 Amp.

bei einem Druck von	25	30	50
eine Elektrodenspannung von	31	29	38

20. *Zinn in* H ergab nie einen Bogen, ausser während des Laufes des Inductoriums. Schon dabei trat Schmelzung ein. Es zerstäubte grauschwarz; an der Kathode fand sich ein höchst feines „Zinnschwarz“.

21. *Blei in* H. Bei 4 mm Druck gelang es bei den Stromstärken von ca. 1,6 bez. 1,8 Amp. Spannungen von 27—22 und 30—20 Volt zu messen. Der Bogen war blau, an der Anode rosa-gelblich. Bei höheren Drucken trat der Bogen nur ein, während das Inductorium spielte. Die Anode schmolz bei 100 mm.

22. *Aluminium in* H. Bei 1,4 mm Entfernung konnte selbst bei niedrigstem äusseren Widerstand (6 Ohm) kein Bogen erhalten werden. Bei 0,1 mm Abstand und 100 mm Druck konnte einmal ein Bogen von ca. 28 Volt Spannung bei 3 Amp. gemessen werden. Bei diesem schwächsten, überhaupt möglichen Strom schmolzen die Elektroden sofort zusammen, sodass weitere Versuche aussichtslos erschienen. Bemerkenswert scheint es, dass der Aluminiumbogen hier, wie bei den Versuchen in N, stets das Bandenspectrum des Aluminiums zeigte, auf dem mehr oder weniger deutlich einige Aluminiumlinien erschienen. Sauerstoffanwesenheit halte ich für ausgeschlossen; es zeigte sich nirgends eine Spur von Aluminiumoxyd und in dem Staub waren mikroskopisch kleine, silberblanke Aluminiumkügelchen zerstreut; an der Kathode war ein Absatz von „Aluminiumschwarz“ sichtbar.

Kayser[1]) meint (1883), dass Lockyer das Bandenspectrum des Aluminiums wohl mit Recht für das Spectrum des Oxydes hält, obgleich er die Versuche von Ciamician in Wasserstoffatmosphären anführt. Noch in letzter Zeit bemerkt Hemsalech[2]): „J'ai seulement observé que la présence de l'oxygène est favorable, sinon essentielle, pour l'obtention

1) H. Kayser, Spectralanalyse, 1883. p. 232.
2) G. A. Hemsalech, Journ. d. Phys. (III) 8. p. 655. 1899.

de ce spectre de bandes." Ich glaube, dass man das Bandenspectrum unbedingt dem Aluminium selbst zuschreiben muss. Auch bei den Versuchen mit Cadmium erhielt ich häufig, sowohl in N wie in H, neben den hauptsächlichsten Cd-Linien ein Bandenspectrum im Violett.

23. *Cadmium in* H. Auch mit Cadmium war ein Bogen oberhalb 150 mm nicht zu erhalten, wobei allerdings zu bemerken ist, dass Ströme über 4 Amp. — bei höheren Drucken (grössere Spannung!) über 3,2 Amp. nicht angewendet werden konnten. Ströme unter 1 Amp. konnten nur bei Drucken zwischen 14 und 50 mm erhalten werden. So erhielt ich bei 14 mm Druck (Elektrodenabstand 1,4 mm) 0,9 Amp. und 30 Volt; bei 36 mm Druck

Amp.	0,3	0,5	0,8	1,3
Volt	45—50	35—45	35—40	30

Bei 36 mm entsprachen den Stromstärken unterhalb 1 Amp. wieder zwei Entladungsformen; während der Cd-Bogen im allgemeinen tiefblau ist, war die Entladung bei höherer Spannung an der Anode rosa, sonst blassblau. Bisweilen bemerkte man an der Anode eine mattrosa Glimmhaut und einen höchst fein geschichteten, rosafarbenen positiven Teil der Entladung, während die Entladung an der Kathode blau blieb.

Bei stärkeren Strömen wuchs die Spannung mit dem Druck erheblich; so erhielt ich bei

10 mm Druck	2,8 Amp.	20 Volt
	3,9 „	17 „

dagegen bei

140 mm Druck	2,3 „	38 „
	3,2 „	35 „

Bei 140 mm Druck verlöschte der Bogen mit 2,3 Amp. sehr bald.

24. *Zink in* H. Oberhalb 300 mm Druck ist der Bogen nicht zu erhalten; vermutlich liegt die Grenze noch erheblich tiefer. Bei einem Abstand von 1,4 mm und einer Stromstärke von 2,3 bis 2,7 Amp. erhielt ich

Druck	Amp.	Volt
30 mm	2,4	28
60	2,7	31
90	2,5	37
135	2,3	43

Doch sind die Zahlen hier besonders unsicher; es scheint als ob gelegentlich der entwickelte Zn-Dampf den H ganz aus der Bogennähe verdrängen kann, sodass der Bogen in einer Zn-Dampfatmosphäre brennt. Die Spannung sinkt dann erheblich. So machte ich bei einem länger fortgesetzten Versuch (Abstand der Elektroden 1,4 mm, Druck 135 mm) folgende Ablesungen:

Amp.	2		1,9		2		2,2	
Volt		43—45		47—43		50—41		27

25. *Magnesium in* H. Bei 350 mm Druck war der schwächste Strom, der den Bogen gab, ca. 5 Amp. bei etwa 40 Volt; doch trat hierbei sofort Zusammenschmelzen der Elektroden ein. Oberhalb dieses Druckes war ein Bogen nicht zu erhalten. Bei sehr niedrigen Drucken aber (2—30 mm) wurden wieder zwei Entladungsarten beobachtet. So bestand die Erscheinung bei 2,5 mm Druck (Elektrodenabstand 1,4 mm) gelegentlich aus zwei getrennten Lichtkugeln an der Spitze der Anode und der Kathode; die Farbe war an der Anode rosa, an der Kathode grün. Der eigentliche Bogen ist ganz grün. Bei 1,1 Amp. betrug die Spannung hier 50—60 Volt. Bei 30 mm gelang es, Ströme unter 1 Amp. wenigstens für kurze Zeit zu erhalten. So entstand ein Bogen mit 0,7 Amp. und 50—60 Volt; der Strom stieg auf 0,9 Amp., die Spannung sank auf 30—40 Volt — dann verlöschte aber der Bogen von selbst. Bei höherem Druck steigt die Spannung, wie gewöhnlich, mit diesem. So erhielt ich bei ca. 2 Amp.

Druck	75	150	260 mm
Volt	36	41	47

26. *Messing in* H. Die Versuche mit Messing wurden angestellt, weil hier durch das Zn ein Bogen zu Stande kommt, während die Elektroden dauerhafter sind als reine Zn-Elektroden. So konnte man hier den Bogen brennen lassen, während durch Zuströmen von H der Druck wuchs, und so die Grenze bestimmen, oberhalb deren der Bogen sich nicht mehr hält. Es ergab sich bei einem Abstand von 1,4 mm

a)

Druck	Amp.	Volt
103 mm	1,7	56
—	—	58
140	—	60
—	—	62
155	1,4	65 (verlöscht)

b)

Druck	Amp.	Volt
105 mm	2,6	49
140	—	47
170	—	55—42
200	2	63 (verlöscht)

In der Tab. b) macht sich die bei den Versuchen mit Zn-Elektroden erwähnte Spannungsabnahme durch längeres Brennen bemerkbar (Verdrängung des H durch Zn-Dampf § 24).

Nach den Versuchen zeigte sich die Messinganode innen völlig kupferrot; unter dem Mikroskop sah man viele Schmelzkügelchen aus Cu. Die Kathode hatte, wie bei den meisten Metallen, eine gerauhte Oberfläche bekommen; ausserhalb des Streifens, der der Anode unmittelbar gegenübergestanden, hatte sie alle möglichen Färbungen von rot bis blau angenommen; an einzelnen Stellen fanden sich kleine schwarze Ablagerungen, offenbar von Zn aus der Anode.

27. In grossen Zügen lassen sich die Metalle bezüglich des Lichtbogens in H folgendermaassen ordnen:

Kupfer und Aluminium, die in N sehr schöne Bogen lieferten, versagen in H so gut wie vollständig. Platin und Silber erfordern sehr hohe Stromstärken, die sofort die Elektroden gefährden, sodass namentlich das Silber für Messungen fast ungeeignet ist. Dasselbe gilt für das Eisen und namentlich wegen des niedrigen Schmelzpunktes für Blei — das Zinn ist überhaupt ungeeignet. Am günstigsten verhalten sich Cadmium, Zink und Magnesium. Inwieweit dieses Verhalten der Metalle in H-Atmosphären mit den chemischen Beziehungen zwischen ihnen und dem Gas zusammenhängt, dürfte bei der geringen Kenntnis von den Hydrüren, die zum Teil überhaupt

noch nicht dargestellt, und soweit sie dargestellt, zum Teil noch bestritten sind, noch nicht zu entscheiden sein.

Zum Schluss betone ich noch einmal, dass, abgesehen von der durch die Natur der Versuche bedingten Unsicherheiten, die vorgelegten Resultate nur Geltung haben für das Bereich von Stromstärken und Spannungen, das mir zur Verfügung stand. Dass man die Stromstärken noch erheblich steigern kann, erscheint mir zweifelhaft; immerhin ist es nicht ganz ausgeschlossen, wenn man massivere Elektrodenformen wählt. Dagegen glaube ich, dass man mit höheren Spannungen noch zu interessanten Ergebnissen gelangen kann — die Versuche werden sogar einfacher auszuführen sein, da man voraussichtlich mit geringeren Stromstärken wird arbeiten können. Versuche in dieser Richtung (vgl. § 14) habe ich vorbereitet — hoffentlich findet sich bald die Gelegenheit zu ihrer Ausführung!

Berlin, März 1900.

(Eingegangen 21. März 1900.)

. Entropie und Temperatur strahlender Wärme; von Max Planck.

§ 1. Einleitung und Inhaltsübersicht.

In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit[1]) über irreversible trahlungsvorgänge habe ich einen Ausdruck für die Entropie er strahlenden Wärme aufgestellt, welcher allen Anforderungen, ie einerseits von der Thermodynamik, andererseits von der lektromagnetischen Lichttheorie an die Eigenschaften dieser rösse gestellt werden, Genüge leistet. Auf den Zustand der tationären Wärmestrahlung im freien Vacuum angewendet efert dieser Ausdruck gerade diejenigen Beziehungen zwischen en auf die einzelnen Wärmefarben entfallenden Strahlungs-ntensitäten, welche durch das Wien'sche sogenannte Energie-erteilungsgesetz angegeben werden. Weiter von mir unter-ommene Versuche, den Ausdruck der Strahlungsentropie so bzuändern bez. zu verallgemeinern, dass er immer noch allen heoretisch wohlbegründeten thermodynamischen und elektro-nagnetischen Sätzen Genüge leistet, führten mich durch ihren egativen Erfolg zu der Ansicht, dass der aufgestellte Aus-ruck, und daher auch das Wien'sche Energieverteilungsgesetz, ine notwendige Folge der Anwendung des Principes der Ver-nehrung der Entropie auf die elektromagnetische Strahlungs-heorie ist.

Während nun das Wien'sche Gesetz durch die neuesten Beobachtungen von F. Paschen[2]) wieder im wesentlichen be-tätigt worden ist, haben O. Lummer und E. Pringsheim[3]) bei ihren auf grössere Wellenlängen ausgedehnten Messungen Divergenzen von so erheblicher Natur gefunden, dass M. Thiesen[4])

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 69. 1900.

2) F. Paschen, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 959. 1899.

3) O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 1. p. 215. 1899.

4) M. Thiesen, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. 2. p. 37. 1900.

dadurch veranlasst wurde, die Wien'sche Formel für die Strahlungsintensität einer bestimmten Wellenlänge durch eine andere Formel zu ersetzen, welche einerseits sowohl dem Stefan-Boltzmann'schen Gesetz der Gesamtstrahlung als auch dem von Wien thermodynamisch begründeten sogenannten Verschiebungsgesetz Genüge leistet, andererseits aber die von Lummer und Pringsheim gemessenen Zahlenwerte mit merklich besserer Annäherung darstellt.

Obschon nun ein Conflict zwischen Beobachtung und Theorie wohl erst dann als zweifellos constatirt gelten kann, wenn die Zahlen der verschiedenen Beobachter miteinander hinreichend übereinstimmen, so bildete die zwischen den Beobachtern schwebende Frage doch auch für mich eine Anregung, die theoretischen Voraussetzungen, welche zu dem oben erwähnten Ausdruck der Strahlungsentropie führen, und an denen also jedenfalls etwas geändert werden müsste, wenn das Wien'sche Energieverteilungsgesetz sich nicht als allgemein gültig erweisen sollte, übersichtlich zusammenzustellen und einer geschärften Kritik zu unterziehen. Das Wesentliche davon möchte ich hier in Kürze mitteilen, namentlich auch einen bei dieser Gelegenheit gefundenen Weg zur directen Berechnung der Strahlungsentropie, deren Wert ich in meiner vorigen Arbeit ohne weitere Vermittelung einfach durch Definition eingeführt hatte. Da sich durch diese Berechnung wieder gerade der nämliche Ausdruck der Entropie ergiebt, so ist meine Ansicht über die Bedeutung desselben noch mehr befestigt worden, wenn sich auch die Gründe, welche dieselbe stützen, zum Teil etwas verschoben haben.

Schliesslich folgt noch als eine specielle Anwendung des Wien'schen Gesetzes, das ja für Wellenlängen bis zu etwa 5 μ hinauf von sämtlichen genaueren Messungen bestätigt wird, die Formel zur numerischen Berechnung der Temperatur einer monochromatischen, aus homocentrischen Bündeln bestehenden Strahlung, welche von einer kleinen Fläche emittirt und dann durch ein System centrirter brechender Kugelflächen (Spiegelung inbegriffen) nahe der Axe hindurchgegangen ist. Die Temperatur der hinter der letzten brechenden Fläche auftretenden Strahlung ist nach ihrer elektromagnetischen Definition vollständig und ausschliesslich bestimmt durch die natürliche

„Helligkeit“[1]) des von ihr entworfenen Bildes, und diese Grösse lässt sich ihrerseits berechnen aus der Gesamtintensität der Strahlung, der Grösse der Bildfläche, und dem räumlichen Oeffnungswinkel (Maximaldivergenz), mit welchem sich die Strahlen eines jeden homocentrischen Bündels in dem zugehörigen Bildpunkte treffen. Nicht nötig dabei ist aber die Messung der Temperatur des Körpers, aus welchem die Strahlung ursprünglich herstammt, und ebensowenig die Berücksichtigung der Energieverluste, welche die Strahlung auf ihrem Wege durch Reflexion an den verschiedenen brechenden Flächen, Absorption etc. etwa erlitten hat.

Soviel ich weiss, giebt es immer noch Physiker, welche die Ansicht vertreten, dass man nicht von der Temperatur eines Wärmestrahles an sich sprechen darf, sondern nur von der Temperatur des Körpers, welcher den Strahl emittirt. Nach dieser Ansicht könnte man in dem vorliegenden Falle die aus dem Linsensystem austretende Strahlung überhaupt nicht thermisch charakterisiren, ohne sowohl auf ihre Entstehung, als auch auf die ganze Geschichte ihrer Fortpflanzung durch alle brechenden Flächen Rücksicht zu nehmen. Das wäre im allgemeinen ein sehr umständliches und überflüssiges Verfahren. Denn es kommt schliesslich doch nur darauf an, welche Eigenschaften die Strahlung besitzt an dem Orte, wo sie ihre Wirkungen äussert, und nicht darauf, welche Eigenschaften sie früher einmal besessen und nachträglich vielleicht teilweise wieder verloren hat. Uebrigens hat sich das Bedürfnis, der Strahlung eine selbständige Temperatur beizulegen, in bestimmten Fällen schon deutlich fühlbar gemacht, so z. B. dadurch, dass man es vorteilhaft findet, von einer „scheinbaren“ oder „Effectiv“-Temperatur der Sonne zu sprechen, d. h. von der Temperatur, welche die Sonne haben müsste,

1) Die Beziehungen der Helligkeit zum zweiten Hauptsatz der Wärmetheorie (und somit auch zur Temperatur) sind von H. v. Helmholtz erörtert worden in den Vorlesungen über die elektromagnetische Theorie des Lichtes, herausgegeben von A. König u. C. Runge, p. 296. 1897 (Leop. Voss), eingehender noch in den demnächst zu veröffentlichenden Vorlesungen über die Theorie der Wärme, in deren Manuscript ich durch ein freundliches Anerbieten des Herausgebers, Hrn. F. Richarz, Einblick erhielt.

um der Erde die thatsächlich zu beobachtende Gesamtstrahlung zuzusenden, wenn sie 1. strahlte wie eine schwarze Fläche von gleicher Grösse, und wenn 2. unterwegs keine Strahlungsenergie verloren ginge. Die Effectivtemperatur der Sonne ist nichts anderes als die wirkliche Temperatur der Sonnenstrahlen, und demgemäss wäre es wohl noch rationeller, diese Bezeichnung auch direct anzuwenden, statt von einer doch bloss fingirten Temperatur der Sonne zu reden. Hierzu kommt noch, dass die Sonnenstrahlen verschiedener Farbe gar nicht dieselbe, sondern verschiedene Temperaturen besitzen, da die Energieverteilung im Sonnenspectrum von der des schwarzen Körpers abweicht. Es muss daher jedem monochromatischen Sonnenstrahl eine besondere Temperatur zugeschrieben werden, die aus der angegebenen Formel berechnet werden kann.[1])

§ 2. Physikalische Grundlagen der Theorie.

Die ganze hier behandelte Theorie gründet sich auf den Kirchhoff'schen Satz, dass ein rings durch spiegelnde Wände abgeschlossenes Vacuum, in welchem beliebige ponderable Körper in beliebiger Anordnung verstreut sind, im Laufe der Zeit einen stationären Zustand der Wärmestrahlung annimmt, der vollständig bestimmt ist durch einen einzigen Parameter: die Temperatur, und insbesondere nicht abhängt von der Anzahl, der Beschaffenheit und der Anordnung der ponderabeln Körper. Es ist also zur Untersuchung der Eigenschaften des stationären Strahlungszustandes ganz gleichgültig, welcher Art die Körper sind, welche man im Vacuum befindlich voraussetzt, ja es kommt nicht einmal darauf an, ob solche Körper in der Natur wirklich irgendwo vorkommen, sondern nur darauf, ob ihre Existenz und ihre Eigenschaften in der Natur überhaupt möglich sind. Sobald es nur gelingt, für irgend eine beliebig herausgegriffene specielle Art und Anordnung emittirender und absorbirender Körper einen stationären Strahlungszustand nachzuweisen, kann dieser Zustand kein anderer sein als der durch den Kirchhoff'schen Satz geforderte.

---

1) Bezüglich der Temperaturbestimmung durch Messung der Energiestrahlung vgl. O. Lummer u. E. Pringsheim, Verhandl. d. Deutsch. Physikal. Gesellsch. **1.** p. 230. 1899; ferner H. Wanner, Physikal. Zeitschr. **1.** p. 226. 1900.

Nun lässt sich in der That für eine specielle Anordnung gewisser, besonders einfach gewählter Körper, nämlich ruhender linearer Resonatoren mit kleiner Dämpfung und grosser Wellenlänge, die sich in hinreichend grossen Abständen[1]) voneinander befinden, ein stationärer Strahlungszustand nachweisen, allerdings nur mit Einführung einer besonderen Annahme: der Hypothese der „natürlichen Strahlung", die sich aber fast von selbst darbietet und wohl als ein unumgängliches Postulat des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie zu betrachten ist. Wenn man also von der Voraussetzung ausgeht, dass die Gesetze der Wärmestrahlung sich überhaupt rein elektromagnetisch begreifen lassen, so bleibt nichts übrig, als auf Grund des Kirchhoff'schen Satzes den gefundenen stationären Zustand mit dem der Wärmestrahlung vollständig zu identificiren.

Die Zulässigkeit der Annahme *ruhender* Resonatoren könnte vom Standpunkt der mechanischen Wärmetheorie aus zweifelhaft erscheinen, da doch mit einer endlichen Temperatur notwendig auch eine endliche Geschwindigkeit der kleinsten ponderabeln Teilchen verknüpft ist. Indessen zeigt sich doch bei näherer Ueberlegung, dass der Zusammenhang, in welchem die aus der Gastheorie folgende Geschwindigkeit der ponderabeln Molecüle durch ihre Abhängigkeit von der Temperatur zur Wärmestrahlung steht, nur ein indirecter sein kann. Denn die Temperatur bestimmt bekanntlich nicht die mittlere Geschwindigkeit, sondern vielmehr die mittlere lebendige Kraft der Molecüle; man kann es daher durch entsprechende Wahl der Molecülmassen immer einrichten, dass einer gegebenen Temperatur eine ganz beliebige mittlere Geschwindigkeit der Molecüle, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, entspricht,

1) Nimmt man die Abstände der Resonatoren klein gegen die Wellenlänge ihrer Eigenschwingung, so erhält man für die Fortpflanzung der Strahlung total andere Gesetze, nämlich die der normalen und anomalen Dispersion, und zwar, wie ich mich besonders überzeugt habe, wesentlich in der einfachen Form, die ihnen zuerst von P. Drude (Wied. Ann. 48. p. 542. 1893) gegeben wurde, nur dass die dabei auftretenden Constanten bestimmte, durch die Dämpfung und die Abstände der Resonatoren bedingte Werte besitzen. Auch scheint mir dieser Weg bei weiterer Verfolgung zu einer Vereinigung der magneto-optischen Theorien von H. A. Lorentz und von W. Voigt zu führen (vgl. Physikal. Zeitschr. 1. p. 39. 1899).

während dagegen die Strahlungsintensität einzig und allein von der Temperatur abhängt.

Ein weiteres Bedenken gegen die vorliegende Theorie könnte man aus dem Umstand herleiten, dass dieselbe die Irreversibilität der Strahlungsvorgänge und den Begriff der Strahlungsentropie aus der Betrachtung einzelner, ja sogar eines einzigen Resonators ableitet, während man doch von der Gastheorie her anzunehmen gewohnt ist, dass erst eine sehr grosse Anzahl Molecüle das Zustandekommen der Irreversibilität und die Definition der Entropie ermöglicht.[1] Dieses Bedenken lässt sich indessen leicht entkräften. Denn das Princip der Unordnung, auf welchem jede Art Irreversibilität zu beruhen scheint, liegt bei der Gastheorie in einem ganz anderen Moment als bei der Wärmestrahlung. In den Gasen sind es die zahlreichen ponderablen Molecüle, welche durch die Unregelmässigkeit ihrer Lage und ihrer Geschwindigkeit die Unordnung bedingen; im durchstrahlten Vacuum dagegen sind es die zahlreichen Strahlenbündel, welche durch ihre unregelmässig wechselnde Schwingungszahl und Intensität zur Bildung der Entropie Veranlassung geben. Bei den Schwingungen eines einzelnen Resonators kommt diese Unregelmässigkeit ebensogut zum Ausdruck wie bei der Strahlung im freien Raum. Denn während in der Gastheorie die lebendige Kraft eines einzelnen Molecüls nur einen verschwindend kleinen Bruchteil der kinetischen Energie selbst des kleinsten Gasquantums bildet und isolirt gar keine selbständige Bedeutung hat, ist in der Strahlungstheorie die Energie eines einzelnen Resonators von derselben Grössenordnung wie die der freien Strahlung in einem gegen die Dimensionen des Resonators sehr grossen Raum. Dementsprechend repräsentirt die stationäre Schwingung eines in einem stationären Strahlungsfelde befindlichen Reso-

---

1) In diesem Punkte liegt der hauptsächlichste Gegensatz zwischen dieser Theorie und derjenigen von W. Wien (Wied. Ann. **58.** p. 662. 1896) und ebenso derjenigen von J. D. van der Waals jr. (Akad. van Wetensch. Amsterdam, 10. Januar 1900), wo von vornherein eine *grosse* Anzahl von Strahlungscentren als wesentlich für das Zustandekommen der Strahlungsgesetze betrachtet wird, während hier die Anzahl der Resonatoren für die Eigenschaften des stationären Strahlungszustandes ganz gleichgültig ist.

nators mit bestimmter Eigenperiode nicht etwa einen einheitlichen Elementarvorgang, d. h. eine einfache Sinusschwingung mit constanter Amplitude und Phase — dann müsste allerdings die Schwingungsenergie frei in Arbeit verwandelbar sein und man könnte keine Entropie definiren, — sondern sie besteht in einer Uebereinanderlagerung sehr vieler kleiner Einzelschwingungen mit nahezu gleichen Perioden und constanten Amplituden und Phasen [1]), oder auch, was mathematisch genau auf das Nämliche hinauskommt, in einer einzigen Schwingung mit constanter endlicher Amplitude, aber unregelmässig veränderlicher Phase. In jedem Falle kann man von einer Unordnung, also auch von einer Entropie und einer Temperatur des Resonators sprechen.

Aus diesen Ueberlegungen geht auch hervor, was mir besonders bemerkenswert scheint, dass der Hauptunterschied zwischen den kürzesten herstellbaren Hertz'schen elektrischen Wellen und den längsten herstellbaren Wärmewellen des ultraroten Gebietes nicht in der Wellenlänge liegt, sondern vielmehr in der Homogenität; denn der erstere Unterschied ist nur quantitativ, der letztere aber qualitativ. Hertz'sche Wellen sind, bei aller möglichen Complicirtheit, stets geordnete Vorgänge, auf sie ist daher die Hypothese der natürlichen Strahlung nicht anwendbar, und demgemäss lässt sich auch bei ihnen keine Entropie und keine Temperatur definiren, während dagegen selbst der homogenste Wärmestrahl einen ungeordneten Vorgang darstellt. Hierauf beruht auch die Erklärung des scheinbaren Paradoxons, welches in dem Umstande liegt, dass nach dem Wien'schen Energieverteilungsgesetz die Strahlungsintensität einer bestimmten Farbe mit unbegrenzt wachsender Temperatur nicht ebenfalls ohne Ende wächst, sondern sich einem endlichen Grenzwert asymptotisch nähert, und dass es daher unmöglich ist, die Intensität der Wärmestrahlung einer bestimmten Farbe über eine bestimmte Grenze hinaus zu steigern, während doch andererseits die Intensität Hertz'scher Wellen bestimmter Schwingungsdauer principiell an keinerlei Schranke gebunden erscheint.

1) Gleichung (13) meiner vorigen Arbeit.

§ 3. Vermehrung der Entropie durch einen im Strahlungsfeld befindlichen Resonator.

In meiner vorigen Arbeit habe ich die Ausdrücke, welche die Entropie eines Resonators und die Entropie der freien Strahlung als Funktionen der Energie und der Schwingungszahl angeben, unvermittelt durch Definition eingeführt und dann hinterher nachgewiesen, dass diese Ausdrücke wirklich dem Gesetz der Vermehrung der Entropie Folge leisten. Hier soll ein allgemeinerer Weg beschritten werden. Zunächst werden die Ausdrücke für die Erhaltung der Energie und die Vermehrung der Entropie aufgestellt, ohne von einer speciellen Annahme über die Grösse der Entropie Gebrauch zu machen. und dann wird untersucht, welcher Wert der Strahlungsentropie beizulegen ist, damit sie alle physikalischen Eigenschaften der aus der Thermodynamik abzuleitenden Function gleichen Namens besitzt. Es wird sich dabei eine ganz bestimmte Grösse für die Entropie ergeben: die nämliche, welche ich früher von vornherein benutzt habe.

Im Folgenden werden genau die Voraussetzungen und Bezeichnungen meiner früheren Arbeit angewendet, nur mit dem Unterschiede, dass die Definitionsgleichung für die Entropie als Function der Energie hier fortfällt. Demgemäss lautet das Gesetz der Erhaltung der Energie für einen Resonator von der Schwingungszahl ν nach der damaligen Gleichung (40):

$$\frac{d\,U}{d\,t} + \frac{3\,c^2\,\sigma}{4\,\pi\,\nu}\int d\,\Omega\,(\mathfrak{K}'' + \mathfrak{K}''' - \mathfrak{K} - \mathfrak{K}') = 0\,. \tag{1}$$

Hier bedeutet U die Energie des Resonators, t die Zeit, c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im Vacuum, σ das (kleine) logarithmische Decrement der Schwingungsamplituden des Resonators, $d\,\Omega$ den unendlich kleinen Oeffnungswinkel eines Kegels, dessen Spitze im Resonator liegt, endlich $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ die Intensitäten der beiden, senkrecht aufeinander polarisirten, innerhalb dieses Kegels von einer Seite auf den Resonator fallenden Strahlenbündel von der Schwingungszahl ν, $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'''$ die in der nämlichen Richtung, also auf der anderen Seite, vom Resonator ausgehenden Strahlungsintensitäten. $\mathfrak{K}''$ und $\mathfrak{K}'''$ sind nach Gleichung (38) und (39) bestimmt durch die Gleichungen:

$$
(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{K}'' = \mathfrak{K} \cos^2 \omega + \mathfrak{K}' \sin^2 \omega \\ \mathfrak{K}''' = (\mathfrak{K} \sin^2 \omega + \mathfrak{K}' \cos^2 \omega) \cos^2 \vartheta + \frac{\nu^2 U}{c^2} \sin^2 \vartheta , \end{cases}
$$

wobei ϑ den Winkel zwischen der Richtung des Strahles und der Axe des Resonators, ω den Winkel zwischen der Polarisationsebene von $\mathfrak{K}$ und der durch den Strahl und die Resonatoraxe gehenden Ebene bedeutet. Die Polarisationsebene von $\mathfrak{K}''$ geht durch die Axe des Resonators, die von $\mathfrak{K}'''$ ist senkrecht darauf.

Nennen wir nun weiter S die Entropie des Resonators, und $\mathfrak{L}$ die Intensität der Entropiestrahlung von der Schwingungszahl ν in irgend einer Richtung zu irgend einer Zeit, so ist S eine gewisse Function von U und ν, und $\mathfrak{L}$ eine gewisse Function von $\mathfrak{K}$ und ν. Dann beträgt die in der Zeit dt eintretende Entropieänderung des den betrachteten Resonator umgebenden Feldes nach Gleichung (46) bei entsprechender Bezeichnung:

$$
d t \cdot \frac{3 c^2 \sigma}{4 \pi \nu} \cdot \int d \Omega (\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}''' - \mathfrak{L} - \mathfrak{L}') .
$$

Nimmt man dazu die in derselben Zeit erfolgende Entropieänderung des Resonators dS, so ergiebt sich als die durch die Vorgänge im Resonator hervorgerufene Aenderung der totalen Entropie S_t des Systems:

$$
(3) \qquad d S_t = d S + \frac{3 c^2 \sigma}{4 \pi \nu} d t . \int d \Omega (\mathfrak{L}'' + \mathfrak{L}''' - \mathfrak{L} - \mathfrak{L}') ,
$$

ein Ausdruck, der ganz analog mit (1) gebaut ist.

§ 4. Specieller Fall.

Wir wollen nun gleich zur Betrachtung des speciellen Falles übergehen, dass das Feld, in welchem der Resonator liegt, sich fortwährend in einem Zustand stationärer Strahlung befindet. Die Bedingung hierfür ist, dass die auf den Resonator fallende Strahlung unpolarisirt und nach allen Richtungen constant ist, d. h.

$$
\mathfrak{K} = \mathfrak{K}' = \mathfrak{K}_0
$$

unabhängig von der Zeit und von der Richtung der Strahlung. Dann folgt aus (2):

$$\mathfrak{K}'' = \mathfrak{K}_0$$

$$(3a) \qquad \mathfrak{K}''' = \mathfrak{K}_0 \cos^2 \vartheta + \frac{\nu^2 U}{c^2} \sin^2 \vartheta .$$

Ferner aus (1), da

$$\int \sin^2 \vartheta \, d\,\Omega = \frac{8\pi}{3},$$

$$(4) \qquad \frac{d\,U}{d\,t} + 2\,\sigma\,\nu\,U - \frac{2\,c^2\,\sigma}{\nu}\,\mathfrak{K}_0 = 0,$$

endlich für die totale Entropieänderung aus (3), da:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}' = \mathfrak{L}'' = \mathfrak{L}_0,$$

$$(5) \qquad d\,S_t = d\,S + \frac{3\,c^2\,\sigma}{4\,\pi\,\nu}\,d\,t \,.\int d\,\Omega\,(\mathfrak{L}''' - \mathfrak{L}_0).$$

Wenn nicht nur das den Resonator umgebende Feld, sondern das ganze System sich im Zustand stationärer Strahlung befände, so wäre auch $\mathfrak{K}''' = \mathfrak{K}_0$, und die Energie U des Resonators würde speciell:

$$(6) \qquad U_0 = \frac{c^2}{\nu^2}\,\mathfrak{K}_0 .$$

Dann wäre Energie und Entropie in allen Teilen des Systems von der Zeit unabhängig. Wir wollen daher U_0 den „stationären" Wert der Energie des Resonators nennen; ihm nähert sich U nach (4) für wachsende Zeiten asymptotisch an.

Nun besitze die Energie des Resonators einen Wert, der nur noch wenig von dem stationären Wert U_0 abweicht, d. h.

$$(7) \qquad U = U_0 + \varDelta\,U.$$

Die kleine Grösse $\varDelta\,U$ können wir den (positiven oder negativen) Ueberschuss der Resonatorenergie über ihren stationären Wert nennen, sie liefert offenbar ein Maass für die Grösse und die Richtung der Abweichung des Resonators von seinem stationären Zustande. Dann wird aus (4):

$$(8) \qquad \frac{d\,U}{d\,t} + 2\,\sigma\,\nu\,\varDelta\,U = 0$$

und aus (3a):

$$(9) \qquad \mathfrak{K}''' = \mathfrak{K}_0 + \frac{\nu^2}{c^2} \sin^2 \vartheta \,.\, \varDelta\,U,$$

folglich, durch Entwickelung in eine Taylor'sche Reihe, und mit Vernachlässigung höherer Potenzen von $\varDelta U$:

$$\mathfrak{L}''' = \mathfrak{L}_0 + \left(\frac{d\,\mathfrak{L}}{d\,\mathfrak{K}}\right)_0 \frac{\nu^2}{c^2} \sin^2\vartheta\,\varDelta U + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\mathfrak{L}}{d\,\mathfrak{K}^2}\right)_0 \frac{\nu^4}{c^4} \sin^4\vartheta\,(\varDelta U)^2 .$$

Führt man dies in (5) ein, so ergiebt sich, da:

$$\int \sin^4\vartheta\, d\,\Omega = \frac{32\,\pi}{15},$$

$$d\,S_t = d\,S + 2\,\sigma\,\nu\,d\,t \,.\left(\frac{d\,\mathfrak{L}}{d\,\mathfrak{K}}\right)_0 \varDelta U + \frac{4\,\sigma\,\nu^3}{5\,c^2}\,d\,t\,.\left(\frac{d^2\,\mathfrak{L}}{d\,\mathfrak{K}^2}\right)_0 (\varDelta U)^2$$

oder nach (8):

$$d\,S_t = d\,S - d\,U\left\{\left(\frac{d\,\mathfrak{L}}{d\,\mathfrak{K}}\right)_0 + \frac{2\,\nu^2}{5\,c^2}\left(\frac{d^2\,\mathfrak{L}}{d\,\mathfrak{K}^2}\right)_0 \varDelta U\right\}.$$

Nun ist:

$$d\,S = \frac{d\,S}{d\,U}\cdot d\,U$$

und nach (7):

$$\frac{d\,S}{d\,U} = \left(\frac{d\,S}{d\,U}\right)_0 + \left(\frac{d^2\,S}{d\,U^2}\right)_0 \varDelta U + \ldots$$

Folglich durch Substitution die Entropieänderung des ganzen Systems, unter Vernachlässigung höherer Potenzen von $\varDelta U$:

$$d\,S_t = d\,U\left[\left(\frac{d\,S}{d\,U}\right)_0 - \left(\frac{d\,\mathfrak{L}}{d\,\mathfrak{K}}\right)_0 + \left\{\left(\frac{d^2\,S}{d\,U^2}\right)_0 - \frac{2\,\nu^2}{5\,c^2}\left(\frac{d^2\,\mathfrak{L}}{d\,\mathfrak{K}^2}\right)_0\right\}\varDelta U\right].$$

§ 5. Notwendige Eigenschaften der Entropie.

Wenn der letzte Ausdruck immer positiv sein soll, wie es der zweite Hauptsatz der Thermodynamik verlangt, so muss, da $d\,U$ positiv oder negativ, $\varDelta U$ aber beliebig klein sein kann, allgemein die Beziehung gelten:

$$(9\text{a}) \qquad \left(\frac{d\,\mathfrak{L}}{d\,\mathfrak{K}}\right)_0 = \left(\frac{d\,S}{d\,U}\right)_0$$

oder durch Integration, mit Rücksicht auf (6):

$$(10) \qquad \mathfrak{L}_0 = \frac{\nu^2}{c^2}\,S_0\,,$$

wobei über die Integrationsconstante verfügt ist, da sie keine physikalische Bedeutung besitzt. Ebenso durch Differentiation:

$$(11) \qquad \left(\frac{d^2\,\mathfrak{L}}{d\,\mathfrak{K}^2}\right)_0 = \frac{c^2}{\nu^2}\left(\frac{d^2\,S}{d\,U^2}\right)_0 .$$

Mit Benutzung dieser Beziehung ergiebt sich:

$$d S_t = d U . \Delta U . \tfrac{3}{5} \frac{d^2 S}{d U^2}$$

indem der Index 0 jetzt als überflüssig fortgelassen ist.

Dieser Ausdruck stellt also die Entropievermehrung dar, welche in der Natur eintritt, wenn ein in einem stationären Strahlungsfelde befindlicher Resonator, dessen Energie U einen kleinen Ueberschuss ΔU über ihren stationären Wert enthält, die Energieänderung $d U$ erleidet. Die Entropievermehrung hängt also nur ab von $d U$, ΔU und U, und ist überdies, wie auch von vornherein einleuchtet, den Werten von $d U$ und von ΔU proportional. Soll sie stets positiv sein, so muss, da $d U$ und ΔU nach (8) immer entgegengesetzte Vorzeichen haben, der letzte Factor negativ sein. Setzen wir also:

$$\frac{3}{5} \frac{d^2 S}{d U^2} = - f(U), \tag{12}$$

so ist f eine positive Function von U, und die Entropievermehrung wird:

$$d S_t = - d U . \Delta U . f(U); \tag{13}$$

$f(U)$ kann noch von der Schwingungszahl ν des Resonators abhängen, dagegen nicht von seiner Dämpfung σ, wie man aus der Gleichung (11) erkennt, deren linke Seite σ jedenfalls nicht enthält.

Weitere Schlüsse auf den Wert der Entropie lassen sich aus dem Satze der Entropievermehrung allein nicht ziehen, weder in dem hier betrachteten speciellen, noch in dem allgemeineren Falle, dass sich der Resonator in einem beliebigen Strahlungsfelde befindet. Ja, es lässt sich sogar direct der Nachweis liefern, dass, wenn man der Function $f(U)$ irgend eine beliebige positive Form beilegt, und daraus nach (12) und (10) die Ausdrücke von S als Function von U, und von $\mathfrak{L}$ als Function von $\mathfrak{K}$ berechnet, der in (3) gegebene allgemeinste Wert von $d S_t$ immer positiv ausfällt.[1]) Doch würde die Durchführung dieses Nachweises hier zu viel Raum in Anspruch nehmen. Jedenfalls folgt daraus so viel, dass der Satz der

1) **Dieser Bedingung genügt auch die im § 1 erwähnte Formel von M. Thiesen.**

Entropievermehrung an sich nicht hinreicht, um den Ausdruck der Entropie als Function der Energie zu berechnen, sondern dass zu diesem Zweck ein näheres Eingehen auf die physikalische Bedeutung der Entropiefunction notwendig ist. Insofern bedarf also die im vorletzten Absatz des § 23 meiner vorigen Arbeit gemachte Bemerkung einer Berichtigung.

§ 6. Vollständige Berechnung der Entropiefunction.

Denken wir uns nun, dass in dem betrachteten stationären Strahlungsfeld statt eines einzigen Resonators eine beliebig grosse Zahl n, mit dem bisher betrachteten ganz gleichbeschaffene, Resonatoren vorhanden sind, in denen sich während des Zeitelementes dt, unabhängig voneinander, genau die nämlichen Vorgänge abspielen. Dann ist die Energie aller Resonatoren, als Summe der Einzelenergien, $n\,U = U_n$, ihr Ueberschuss über ihren stationären Wert, der die Abweichung vom stationären Zustand angiebt: $n\,.\,\Delta\,U = \Delta\,U_n$, ihre Aenderung im Zeitelement dt: $n\,.\,d\,U = d\,U_n$, endlich ihre Entropie, als Summe aller Einzelentropien: $n\,S = S_n$.

Man könnte nun einen Augenblick zu der Vermutung neigen, dass S_n in derselben Weise von U_n abhänge, wie S von U; dann würde man den Wert von S_n auch dadurch erhalten können, dass man in den Ausdruck von S, als Function von U gedacht, U_n statt U einsetzt. Indes könnte diese Vermutung durch keinerlei Ueberlegung physikalischer Art begründet werden, da der Grösse der Entropie an sich gar keine physikalische Bedeutung zukommt, ebensowenig wie dies etwa bei der absoluten Grösse eines Kräftepotentiales der Fall ist. Eine bestimmte physikalische Bedeutung besitzt vielmehr nur die im Zeitelement dt eintretende Entropie*vermehrung* des ganzen Systems, da dieselbe das numerische Maass bildet für die Irreversibilität des Processes oder für die incompensirte Verwandlung von Arbeit in Wärme, und auf diese Grösse lässt sich in der That eine entsprechende Schlussfolgerung mit Erfolg anwenden und durchführen. Denn der notwendige physikalische Zusammenhang zwischen Energieänderung und Entropievermehrung würde wohl kaum begreiflich erscheinen, wenn man nicht annehmen wollte, dass die Entropievermehrung bei

der betrachteten Strahlung der n Resonatoren vollständig bestimmt ist durch ihre Energie U_n, deren Abweichung ΔU_n vom stationären Wert, und die in der Zeit dt erfolgende Energieänderung dU_n, und dass infolge dessen die Grösse der Entropievermehrung auch dann erhalten wird, wenn man in den Ausdruck (13) überall U_n statt U setzt.

Andererseits ist aber diese Entropievermehrung jedenfalls gleich dem $n$fachen desselben Ausdruckes (13), da sich n einander ganz gleiche Vorgänge gleichzeitig und unabhängig voneinander abspielen. Wir haben daher in leicht verständlicher Bezeichnung:

$$[-dU.\Delta U.f(U)]_{U_n} = -n.dU.\Delta U.f(U)$$

oder:

$$dU_n.\Delta U_n.f(U_n) = n.dU.\Delta U.f(U).$$

Setzt man hierin überall für U_n seinen Wert nU, so ergiebt sich:

$$f(nU) = \frac{1}{n} f(U)$$

und die Lösung dieser Functionalgleichung ist:[1]

$$f(U) = \frac{\text{const.}}{U}$$

oder nach (12):

$$\frac{d^2 S}{d U^2} = -\frac{\alpha}{U},$$

wobei die positive Constante α nur noch von der Schwingungszahl ν abhängen kann.

Hieraus folgt durch zweimalige Integration:

$$S = -\alpha U \log(\beta U), \tag{14}$$

wobei β eine zweite von ν abhängige positive Constante darstellt. Eine weitere additive Integrationsconstante ist unterdrückt, da sie keine physikalische Bedeutung hat.

Endlich folgt aus (10):

$$\mathfrak{L}_0 = -\frac{\nu^2}{c^2} \alpha U_0 \log(\beta U_0)$$

oder, mit Berücksichtigung von (6) und Weglassung des Index 0:

$$\mathfrak{L} = -\alpha \mathfrak{K} \log\left(\frac{\beta c^2}{\nu^2} \mathfrak{K}\right). \tag{15}$$

---

1) Der Umstand, dass n als ganze Zahl vorausgesetzt ist, kann die Allgemeinheit dieses Schlusses nicht beeinträchtigen.

Nimmt man nun noch die Definition der Temperatur ϑ des Resonators hinzu:

$$d S = \frac{d U}{\vartheta} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\vartheta} = \frac{d S}{d U}$$

und nach (9a) die Temperatur der Strahlungsintensität $\mathfrak{K}$:

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{d \mathfrak{L}}{d \mathfrak{K}},$$

so erhält man:

$$\frac{1}{\vartheta} = - \alpha \log (\beta e U)$$

und

$$\frac{1}{\vartheta} = - \alpha \log \left(\frac{\beta e c^2}{\nu^2} \mathfrak{K}\right), \tag{16}$$

oder:

$$\mathfrak{K} = \frac{\nu^2}{\beta e c^2} e^{-\frac{1}{\alpha \vartheta}}$$

und diese Gleichung geht durch die Substitution:

$$\frac{1}{\alpha} = f(\nu), \quad \frac{1}{\beta} = \varphi(\nu)$$

in die Gleichung (56) meiner vorigen Arbeit über, die nach den thermodynamischen Untersuchungen von W. Wien[1]) notwendig zu der Folgerung führt, dass $f(\nu)$ und $\varphi(\nu)$ beide proportional ν sind.

Wir können daher setzen:

$$\frac{1}{\alpha} = a \nu, \quad \frac{1}{\beta} = e b \nu,$$

wobei a und b universelle positive Constante sind, und damit stellen die Gleichungen (14) und (15) genau die von mir früher unvermittelt eingeführten Definitionen der Resonatorentropie S und der strahlenden Entropie $\mathfrak{L}$ vor.

Aus (16) ergiebt sich dann:

$$\frac{1}{\vartheta} = \frac{1}{a \nu} \log \frac{b \nu^3}{c^2 \mathfrak{K}}. \tag{17}$$

Die nach den Messungen von F. Kurlbaum und denen von F. Paschen von mir berechneten Zahlenwerte von a und b sind:

$$a = 0{,}4818 \, . \, 10^{-10} [\text{sec} \times \text{Celsiusgrad}],$$

$$b = 6{,}885 \, . \, 10^{-27} [\text{erg} \times \text{sec}].$$

1) W. Wien, Wied. Ann. 58. p. 662. 1896.

§ 7. Temperatur homocentrischer Strahlen.

Zum Schlusse soll noch, als eine specielle Anwendung des Wien'schen Gesetzes, die Temperatur einer monochromatischen unpolarisirten Strahlung berechnet werden, die von einer kleinen Fläche (Spalt) in senkrechter Richtung emittirt und durch ein beliebiges System centrirter brechender Kugelflächen nahe der Axe hindurchgegangen ist. Eine solche Strahlung besteht aus homocentrischen Bündeln und entwirft daher hinter jeder brechenden (oder spiegelnden) Fläche ein reelles oder virtuelles Bild der ersten emittirenden Fläche, wiederum senkrecht zur Axe.

Das letzte Medium nehmen wir zunächst, wie das erste, als reines Vacuum an. Dann handelt es sich zur Bestimmung der Temperatur nach Gleichung (17) nur um die Berechnung der Strahlungsintensität $\mathfrak{K}$ (oder deutlicher $\mathfrak{K}_\nu$) im letzten Medium, und hierzu genügt, wie leicht zu zeigen, die Gesamtintensität der monochromatischen Strahlung J_ν, die Grösse der Bildfläche F, und der räumliche Oeffnungswinkel ω des in einem Punkt des Bildes zusammentreffenden bez. von ihm ausgehenden Strahlenkegels.

Die Strahlungsintensität $\mathfrak{K}_\nu$ von der Schwingungszahl ν ist für unpolarisirte Strahlung nach § 11 meiner vorigen Arbeit dadurch definirt, dass von einem Flächenelement $d\sigma$ einem anderen, in der Entfernung r ihm gerade gegenüberliegenden Flächenelement $d\sigma'$ in der Zeit dt die dem Schwingungszahlenintervall von ν bis $\nu + d\nu$ entsprechende Energiemenge:

$$2\,\mathfrak{K}_\nu \frac{d\sigma \, . \, d\sigma'}{r^2} d\nu \, . \, dt$$

zugestrahlt wird. Hier ist $2\,\mathfrak{K}_\nu$ die „Helligkeit" der unpolarisirten monochromatischen Strahlung.

Bezeichnet nun $d\sigma$ ein Element der Bildfläche im letzten Medium, so ist die gesamte auf das Bild fallende monochromatische Strahlung:

$$J_\nu = 2\,\mathfrak{K}_\nu \int d\sigma \, . \int \frac{d\sigma'}{r^2} \, .$$

J_ν ist, wie der vorhergehende Ausdruck, von der Dimension einer Energiemenge, da das Product $d\nu . dt$ eine reine Zahl ist.

Das zweite Integral ist nichts anderes als der Oeffnungswinkel des von einem Flächenelement $d\sigma$ ausgehenden Strahlenkegels:

$$\omega = \int \frac{d\sigma'}{r^2}.$$

Stellt noch F die ganze Fläche des Bildes vor, so erhält man:

$$J_\nu = 2\,\mathfrak{K}_\nu F\omega \tag{18}$$

und daraus mit Benutzung von (17) als Temperatur der Strahlung:

$$\vartheta = \frac{a\nu}{\log \frac{2b\nu^3\omega F}{c^2 J_\nu}}. \tag{19}$$

Wenn das betrachtete diathermane Medium nicht das Vacuum ist, sondern den absoluten Brechungsexponenten n besitzt, so muss nach dem bekannten Kirchhoff-Clausius'schen Gesetze in der Gleichung (17) die Grösse $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{K}/n^2$, und daher auch in (18) J durch J/n^2 ersetzt werden, und die Formel verallgemeinert sich zu:

$$\vartheta = \frac{a\nu}{\log \frac{2b\nu^3 n^2 \omega F}{c^2 J_\nu}}$$

oder, mit Benutzung der Zahlenwerte von a, b und c:

$$\vartheta = \frac{0{,}482\,.\,10^{-10}\,.\,\nu}{\log \frac{\nu^3 n^2 F\omega}{J_\nu} - 107{,}8} \text{ Grad Celsius abs.}$$

Hierbei ist J_ν in Erg, ν in reciproken Secunden, F in Quadratcentimetern auszudrücken.

Die so berechnete Temperatur bleibt der betrachteten Strahlung so lange erhalten, als sie sich in dem diathermanen Medium ungestört fortpflanzt, auch wenn sie sich bis in beliebige Entfernungen und in beliebig grosse Räume ausbreitet. Denn wenn auch in grösseren Entfernungen eine immer kleinere Energiemenge durch ein Flächenelement hindurchstrahlt, so verteilt sich dieselbe dafür auf einen um so schmaleren, von dem Elemente ausgehenden Strahlenkegel, sodass der Wert von $\mathfrak{K}$ ganz ungeändert bleibt. Daher ist die freie Ausbreitung

der Strahlung ein vollkommen reversibler Vorgang.[1]) Die Umkehrung desselben lässt sich etwa mit Hülfe eines passenden Hohlspiegels oder einer Sammellinse realisiren.

Fragen wir nun weiter nach der Temperatur der Strahlung in den übrigen Medien, die hinter den einzelnen brechenden Kugelflächen liegen. In jedem dieser Medien besitzt die Strahlung eine bestimmte Temperatur, die durch die letzte Formel gegeben ist, wenn man sie auf das von der Strahlung in diesem Medium erzeugte reelle oder virtuelle Bild bezieht.

Die Schwingungszahl ν der monochromatischen Strahlung ist selbstverständlich in allen Medien dieselbe; ferner ist nach den Gesetzen der geometrischen Optik das Product $n^2 F \omega$ in allen Medien gleich. Wenn daher auch noch die Gesamtintensität der Strahlung J_ν bei der Brechung (oder Reflexion) an einer Fläche constant bleibt, so bleibt auch ϑ constant, oder mit anderen Worten: Die Temperatur eines homocentrischen Strahlenbündels wird durch regelmässige Brechung oder Reflexion nicht geändert, falls dabei kein Energieverlust der Strahlung eintritt. In diesem Falle ist also die Brechung oder Reflexion, ebenso wie die freie Ausbreitung der Strahlung, vollkommen reversibel. Jede Schwächung der Gesamtintensität J_ν aber, durch Spaltung der Strahlung, sei es in zwei oder in viele verschiedene Richtungen, wie bei der diffusen Reflexion, führt zu einer Erniedrigung der Temperatur ϑ des Strahlenbündels. Thatsächlich findet ja im allgemeinen bei jeder Brechung oder Reflexion ein bestimmter Energieverlust durch Reflexion oder Brechung, und mithin auch eine Temperaturerniedrigung statt. Hier kommt also der principielle Unterschied scharf zur Geltung, den es macht, ob eine Strahlung lediglich durch freie Ausbreitung, oder ob sie durch Spaltung bez. Absorption geschwächt wird. Im ersten Fall bleibt die Temperatur constant, im zweiten wird sie erniedrigt.

---

1) Dieser Satz differirt einigermaassen von einer Folgerung, zu der W. Wien (Wied. Ann. 52. p. 162. 1894) gelangt: „dass alle die Veränderungen der Strahlung nicht umkehrbar sind, bei denen Strahlung ohne Arbeitsleistung ihr Volumen vergrössert.“ Nach der hier entwickelten Theorie kann dies nur dann zutreffen, wenn die Veränderungen mit Emission oder mit diffuser Reflexion oder mit einem anderen irreversibeln Vorgang verbunden sind, nicht aber, wenn es sich um die einfache geradlinige Ausbreitung schon vorhandener Strahlung handelt.

Für astigmatische Strahlenbündel lassen sich wahrscheinlich bis zu einem gewissen Grad analoge Gesetzmässigkeiten aussprechen, nur wird die Berechnung der Temperatur eines astigmatischen Strahlenbündels zu complicirteren Formeln führen. Dagegen dürfte jede Art Beugung mit einer Temperaturerniedrigung bez. einer Entropievermehrung verbunden sein, sodass das Phänomen der Beugung natürlicher Strahlung ganz allgemein den irreversibeln Vorgängen zuzurechnen wäre.

Berlin, März 1900.

(Eingegangen 22. März 1900.)

---

10. *Ueber die elektrostatische und elektrolytische Aufzeichnung elektrischer Ströme; von P. Grützner.*

Vor kurzem hat Hr. W. König[1]) mehrere zum Teil elegante Methoden veröffentlicht, durch die es verhältnismässig leicht und sicher gelingt, langsame elektrische Schwingungen wie z. B. diejenigen einer sich entladenden Leydener Flasche. nachzuweisen und zu zählen. Namentlich ist es das Princip der Lichtenberg'schen Figuren, welches, in zweckmässiger Weise verwendet, jene genauen Messungen gestattet. Wird hiernach der eine Beleg einer Leydener Flasche (wenn beide Belege mit den Polen einer Secundärspule in Verbindung stehen) mit der Metallunterlage eines grösseren Harzkuchens verbunden, während der andere Beleg in eine Metallspitze endet, welche auf dem Harzkuchen aufruht, so erzeugt ein Funke, der auf die Harzplatte springt, nach ihrer Bestäubung mit einem Schwefel-Mennigegemisch die bekannte positive oder negative Lichtenberg'sche Figur. Wird aber der Harzteller schnell gedreht, so gewahrt man aufs schönste die oscillatorischen Entladungen der Flasche, indem positive und negative Figuren, natürlich immer schwächer werdend, miteinander abwechseln.[2]) Kennt man die Geschwindigkeit der sich drehenden Scheibe, so kann man natürlich die Dauer der einzelnen Perioden ohne weiteres ablesen. Noch besser aber gelingt dies, wenn man die auf dem Harzteller sitzende Elektrode mit einer schwingenden Stimmgabel von bekannter Schwingungszahl verbindet. Nach der Bestäubung sieht man die Wellenlinie der Stimmgabel und kann unmittelbar abzählen, wie viel Stimmgabelschwingungen auf eine elektrische Schwingung fallen.

Auch anderweitige oscillatorische elektrische Vorgänge, wie z. B. die gewöhnlichen Wechselströme, kann man auf diese

1) W. König, Wied. Ann. 67. p. 535. 1899.
2) Vgl. W. König, l. c. Figg. 5 u. 6, p. 544.

Art sichtbar machen und ihre Periodendauer messen. So beschreibt sie W. König[1]) als „eine einfache Methode zur Messung der Periodendauer von Wechselströmen“ im wesentlichen folgendermaassen.

Eine ebene Metallplatte wird auf der einen Seite mit einer dünnen Schicht Asphaltlack überzogen, sie selbst mit dem einen Poldraht der Wechselstrommaschine in leitende Verbindung gebracht und der andere Poldraht, welcher entweder in einem dünnen Draht oder in einem angefeuchteten Strohhalm endet, leise auf die Asphaltschicht gesetzt Fährt man nun mit dieser Elektrode ausreichend schnell über die Asphaltschicht, so wird dieselbe bald positiv, bald negativ geladen und das aufgestreute Schwefel-Mennigegemisch haftet nach dem Abklopfen der Platte derart auf ihr, dass der Schwefel an den positiven, die Mennige aber an den negativen Stellen der Platte festsitzt. Wird schliesslich der zeichnende Stift mit der schwingenden Zinke einer Stimmgabel verbunden, so kann man — wie oben erwähnt — unmittelbar die Zahl und Dauer der einzelnen Wechselströme ablesen.

König empfiehlt diese *elektrostatische* Methode, welche in der That sehr zierliche Bilder liefert, als ausserordentlich zweckmässig für obigen Zweck und zieht sie namentlich meiner Methode vor, welche auf *elektrochemischem* Wege ebenfalls über die Zahl und Art schnell oder langsam aufeinanderfolgender Ströme, namentlich Wechselströme, unmittelbaren Aufschluss giebt.

Meine Methode, welche ich, soweit sie physiologisches Interesse hatte, ganz kurz in medicinischen Zeitschriften[2]) und dann ausführlicher in der elektrochemischen Zeitschrift[3]) veröffentlichte, besteht darin, dass man den Strom zwei, einige Millimeter voneinander entfernten, federnden Platinelektroden zuführt, welche man auf feuchtes Jodkaliumkleisterpapier[4])

1) W. König, Elektrotechn. Zeitschr. **20.** p. 415. 1899.

2) P. Grützner, Breslauer ärztl. Zeitschr. Nr. 23. 1885 und Pflüger's Archiv **41.** p. 256. 1887; **77.** p. 586. 1899.

3) P. Grützner, Elektrochem. Zeitschr. **18.** p. 97. 1897.

4) Gewöhnliches, möglichst glattes Filtrirpapier wird mit einem 4 procentigen Stärkekleister von Weizenstärke, in welchem 4—5 Proc. Jodkalium aufgelöst sind, gleichmässig von beiden Seiten her durchtränkt,

setzt. Werden nun die Elektroden über das auf einer Glas- oder Metallplatte fest aufgelegte Papier hinübergeführt oder, was in den meisten Fällen zweckmässiger ist, dieses auf einen mit gleichmässiger Geschwindigkeit rotirenden Metallcylinder aufgespannt und unter den sorgfältig angelegten, feststehenden Elektroden fortbewegt, so ist es klar, dass zunächst je nach der Richtung des Stromes bald die eine, bald die andere Elektrode zeichnet, indem immer unter der jeweiligen Anode Jod frei wird. Und zwar ist — natürlich bis zu einer gewissen Grenze — die Menge des in der Zeiteinheit abgeschiedenen Jodes, die man ohne weiteres an der Dunkelheit des Fleckes oder Striches erkennt, um so bedeutender, je grösser die Stromstärke ist. Nehme ich also einen nach einem bestimmten Gesetz, sagen wir nach dem Sinusgesetz, anwachsenden Strom an, so werden — gleichmässige Geschwindigkeit vorausgesetzt — die in sehr kleinen, gleichen Zeitteilchen gebildeten Jodmengen nach dem gleichen Gesetz zunehmen, wie der Strom selber. Ich kann also aus der Schnelligkeit und Art, wie die „Schattirung" der dunklen Striche sich ändert, auch ohne weiteres einen ungefähren Schluss ziehen auf die Art, wie der Strom auf und nieder schwankt.

König behauptet nun, dass meine Methode für „genauere Messungen nicht allzu geeignet sein dürfte", da feuchtes Fliesspapier genaue Zeichnungen nicht zu stande kommen lasse. Zudem müsse man, um die Periodenzahl der Ströme festzustellen, stets noch Zeitmarken neben den elektrolytischen Zeichnungen der untersuchten Ströme anbringen.

Es wird sich daher empfehlen, wenn ich im Anschluss an jene Behauptungen einmal meine und König's Methode in ihren Leistungen miteinander vergleiche und dadurch den Leser in stand setze, sich selbst ein Urteil zu bilden. Es wäre mir sehr lieb, wenn dieses Urteil nicht bloss auf Grund

indem man die 10—12 cm breiten und 30 cm langen Papierstreifen durch den Kleister hindurchzieht, den überflüssigen Kleister abwischt und die Bogen schnell trocknet. So bewahrt man sie, vor hellem Licht geschützt, in geschlossenen Gefässen auf. Zum Gebrauche befeuchtet man das Papier beiderseits mässig mit Wasser oder, was besser ist, mit gesättigter Kochsalzlösung und spannt es gleichmässig auf einem ausreichend grossen Cylinder oder auf einer ebenen Platte von Glas oder Metall auf.

von theoretischen Ueberlegungen, sondern auch von praktischen Versuchen zu stande käme.

Was zunächst die *Zeitmarken* anlangt, so ist es natürlich (wenn man der gleichmässigen Geschwindigkeit des rotirenden Cylinders nicht ganz sicher ist) notwendig, unter allen Umständen aber ratsam, zu gleicher Zeit neben den elektrolytischen Zeichnungen Zeitmarken zu machen. Das ist aber, wenn es sich nicht um gar zu kleine Zeitteile handelt, eine ganz einfache Sache und eine namentlich dem Physiologen sehr geläufige Methode, da fast jede seiner Curven Zeitmarken trägt. Auch König muss ja eine schwingende Stimmgabel zum Zeichnen verwenden, wobei er allerdings den — meiner Meinung nach nur scheinbaren — Vorteil hat, aus *einer* Curve die zeitlichen Verhältnisse abzulesen.

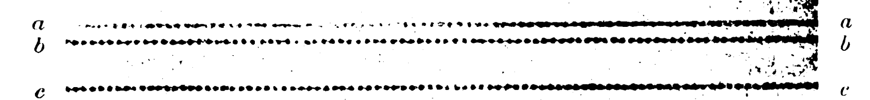


Fig. 1.

Gegen die weitere Behauptung, dass das *feuchte Fliesspapier* zu genauen Messungen nicht allzu geeignet sei, ist im allgemeinen natürlich nichts einzuwenden. Es fragt sich eben nur, wie fein man messen will und ob König mit seiner Methode genauer messen kann. Und das möchte ich — wenigstens für sehr viele Fälle — bezweifeln.

Als Beleg für die Genauigkeit meiner Methode diene vorstehende Zeichnung (Fig. 1). Eine Stimmgabel von 100 ganzen Schwingungen (und bei einer solchen von 128 Schwingungen ist es ganz ebenso) wurde durch ein Grove'sches Element nach Art eines Wagner'schen Hammers in Bewegung gesetzt. In dem Stromkreis befand sich zu gleicher Zeit die primäre Spule eines gewöhnlichen sogenannten Schlittenapparates von Du Bois-Reymond. Bei übereinander geschobenen Rollen zeichneten die Elektroden der secundären Spule dunkle, deutlich voneinander geschiedene Punkte, die namentlich bei den Oeffnungsschlägen (Reihe *b*—*b* und *c*—*c*) scharf durch helle

Zwischenräume voneinander geschieden waren. Aber auch die Schliessungsschläge (Reihe *a—a*) kann man in den meisten Fällen noch ganz gut auszählen, selbst in der Abbildung der Fig. 1, die durchaus nicht vollkommen ist, aber gerade deshalb als Beispiel von mir gewählt ist.

Als ich durch ein Blitzrad die Zahl der Unterbrechungen im primären Kreise auf 300—400 erhöhte, wurden noch in ganz gleicher Weise — natürlich bei schnellerer Drehung der Walze — scharf getrennte braune Flecke sowohl von den Oeffnungs- wie Schliessungsinductionsströmen gezeichnet, die man mit der grössten Leichtigkeit und Sicherheit abzählen konnte.

Viel schwieriger als Wechselströme zeichnen sich natürlich unterbrochene Gleichströme auf, weil die Elektrode etwas länger zeichnet, als der Strom durch sie hindurchgeht. Setzt aber sofort nach dem Verschwinden des einen kurz dauernden Stromes ein entgegengesetzter ein, wie dies ja bei Wechselströmen der Fall ist, so wird die Anode, welche soeben zeichnete, zur Kathode und ihre Weiterzeichnung jäh unterbrochen. Nichtsdestoweniger gelang es mir leicht, 100 und mehr Unterbrechungen eines Gleichstromes aufzuzeichnen. Als ich freilich den Gleichstrom einer Gramme'schen Maschine, der ja bekanntlich schnell auf und nieder schwankt, elektrolytisch aufzeichnete, so erhielt ich auch bei schneller Bewegung der Elektroden eine gleichmässig dunkle Linie. Dass es aber auch hier gelingt, die Schwankungen vermittelst meiner Methode festzustellen, halte ich nicht für ausgeschlossen. Ich bin augenblicklich nicht in der Lage, hierüber mit verschiedenen Maschinen und namentlich bei verschiedener Geschwindigkeit ihrer rotirenden Ringe Versuche anzustellen.

Auch ist mir ausser der Anwendung des Telephons keine andere *einfache* Methode[1]) bekannt, vermittelst welcher man die Zahl dieser Schwankungen festzustellen vermag.[2]) Die

1) Rud. Franke hat kürzlich diese und andere periodische Vorgänge in sinnreicher Weise vermittelst complicirter Apparate aufgezeichnet (vgl. Elektrotechn. Zeitschr. **20.** p. 802. 1899).

2) Es ist vielleicht nicht überflüssig, hier auf eine sehr einfache Methode aufmerksam zu machen, vermittelst welcher man von den mässig starken Strömen einer Centrale beliebige kleinere Bruchteile bis zu Null

elektrostatische Methode in der von mir veränderten Art (vgl. p. 755) schien mir allerdings einige Male unzweifelhafte Ergebnisse zu liefern. Wenigstens sah ich, als der entsprechend abgeschwächte Strom einer Gramme'schen Maschine einerseits einem asphaltirten Zinkblech zugeleitet wurde, während man mit der anderen, positiven zugespitzten Elektrode (einem dünnen Messingdraht) schnell und leicht über die Asphaltschicht des Bleches hinwegfuhr, bei der Bestäubung mit dem Bürker'schen Pulver[1]) eine feine rote Linie, die in regelmässigen Entfernungen von etwa 0,5 mm kleine zierliche Zäckchen zeigte. Bewegte man die Kathode über die Asphaltschicht, so wurde eine gelbe Linie gezeichnet, die in denselben Abständen dunklere Flecke aufwies. Auch war an einigen Stellen der Lack in ähnlicher Weise verändert. Die Strichspur der Elektrode bestand aus kleinen punktförmigen Vertiefungen, die in regelmässigen Entfernungen von 0,5 mm voneinander abstanden. Diese Punktreihen haben jedoch nichts mit den schnell aufeinanderfolgenden Schwankungen des Gleichstromes zu thun; denn sie treten in ganz ähnlicher Weise auch auf, wenn man den gleichmässig fliessenden Strom der Accumulatoren verwendet. Sie rühren offenbar her von regelmässigen Erzitterungen der erwärmten zeichnenden Elektrode. Wenn aber vielleicht bei sehr schnellen Wechseln die elektrostatische Methode — vorausgesetzt, dass sie überhaupt an-

---

herab in empfindliche Apparate, wie in ein Telephon, ableiten kann. Zwei amalgamirte Zinkplatten stecken an den schmalen Flächen eines etwa 20 cm langen, 10,5 cm breiten und 7 cm tiefen rechtwinkligen Glastroges, der mit Zinksulfat angefüllt ist. Dieser Trog wird von dem Starkstrom durchsetzt. Mit zwei amalgamirten Zinkdrähten, die zu dem Telephon führen, taucht man in den Trog ein. Stehen die Zinkdrähte in der Stromrichtung, so fängt man verhältnismässig viel Strom ab; stellt man sie senkrecht zur Stromrichtung, so geht gar kein Strom durch sie hindurch, stellt man sie schräg, so wird eine mittlere Menge abgefangen. Bewegt man den einen Draht vor den andern (im Sinne der Stromrichtung), so kehrt sich der Strom in den abgeleiteten Elektroden um. Das Angenehme dieser Methode beruht also darauf, dass man, ohne irgend welche Widerstände anwenden zu müssen, die kleinsten Bruchteile eines Starkstromes bis zu Null herab diesem bequem entnehmen kann. Auch kann man noch mancherlei andere Stromwechsel und Stromschwankungen auf diese Weise erzeugen.

1) K. Bürker, Ann. d. Phys. 1. p. 474. 1900.

wendbar ist — der elektrolytischen überlegen ist, so ist daran das feuchte Fliesspapier nicht schuld, sondern der Umstand, dass wenn es sich nicht um Wechselströme handelt, die Elektrode länger zeichnet, als der Strom dauert. Der Beginn eines ausreichend starken Stromes wird von der elektrolytischen Methode stets genau angezeigt, sein Ende aber häufig etwas verspätet.

Ich glaube König ist zu der Anschauung, dass feuchtes Fliesspapier nur ungenaue, löschende Zeichnungen liefert, dadurch gekommen, dass er meine Methode wohl kaum selbst probirt und vielleicht nur mit dem bekannten Polreagenspapier einige Versuche angestellt hat. Nun dieses Papier, so vortrefflich es für den Zweck sein mag, für den es bestimmt ist, eignet sich für meine Methode nicht. Einmal ist es lange nicht so empfindlich, wie mein Jodkaliumkleisterpapier, dann enthält es offenbar zu viel Säure, sodass zarte rote Flecken sehr bald ganz verschwinden. Und schliesslich hat es in der That den von König gerügten Uebelstand: es löscht und giebt deshalb keine scharfen Zeichnungen. Auch Fliesspapier, das mit Jodkalium allein getränkt ist, löscht in hohem Maasse. Gestärktes Jodkaliumkleisterpapier aber löscht fast gar nicht. Die in dieser und in meiner früheren (oben erwähnten) Arbeit photographisch wiedergegebenen, elektrolytischen Zeichnungen sind dafür ein Beleg. —

Fragen wir uns nun, unter welchen Bedingungen die König'sche und meine Methode oder nur eine von beiden angewendet werden kann und wenn beide versagen.

Zunächst versagen beide bei zu schwachen Strömen. König rechnet aus, dass sich seine Methode noch bis auf Spannungen von 15—20 Volt herunter anwenden lässt. „Doch ist diese Empfindlichkeit wesentlich bedingt durch die richtige Beschaffenheit der Lackschicht und durch die richtige Art der Bestäubung und der nachherigen Erschütterung. Für höhere Spannungen hat die Anwendung der Methode keine Schwierigkeit.“

Mit etwas anderen Worten dürfte das heissen: Für höhere Spannungen ist die Methode gut anwendbar, für niedere ist sie schwierig und unsicher. So leicht es in der That ist, die Asphaltschicht mit starken Strömen von vielleicht 100 Volt positiv oder negativ zu laden und dann zu sehen, wie von den

beiden Pulvern mehr das eine oder das andere an den betreffenden Strichspuren der Elektrode haftet, so schwierig und unsicher wird die Sache, wenn man mit den Strömen herabgeht. Wenigstens ist es weder mir noch Hrn. Oberbeck, der so freundlich war, auf meinen Wunsch die König'schen Versuche zu wiederholen, ein einziges Mal mit Sicherheit gelungen, die Asphaltschicht dann so zu laden, dass man aus dem etwa anhaftenden Pulver irgend welche Schlüsse hätte ziehen können. Gewöhnlich blieb gar kein Pulver haften, hin und wieder war die Strichspur gefärbt. Das war sie aber auch in nicht unterscheidbarer Weise, wenn die Elektrode *ohne Strom* in gleicher Art über die Asphaltschicht geführt wurde.

Zur Verwendung kamen die Wechselströme einer grossen Stöhrer'schen Maschine mit 6 Magneten, sowie diejenigen einer durch einen starken Gleichstrom getriebenen Wechselstrommaschine, welche eine Drehbank in Bewegung setzte. Die maximalen Spannungen dieser Ströme waren viel höher, als König für das sichere Gelingen seiner Methode für nötig hält.

Auch mit meiner kleineren Stöhrer'schen Maschine, deren einfache Ströme und namentlich deren Extracurrenten Spannungen von mehreren 100 Volt haben, da sie deutliche, wenn auch kleine Fünkchen geben und in grösster Stärke durch den Körper geleitet, fast unerträglich sind, habe ich trotz vielfacher Bemühungen niemals eine Spur einer elektrostatischen Zeichnung gesehen. Diese Ströme waren also offenbar alle trotz ihrer hohen Spannung zu schwach.

Ganz anders verhält sich demgegenüber meine Methode. In allen diesen Fällen giebt sie so einfache und übersichtliche Ergebnisse, wie man sie sich kaum besser wünschen kann. Bei Wechselströmen zeichnet bald die eine, bald die andere Elektrode einen dunklen, kurzen Strich, der auch noch in der Art seiner Schattirung und Breite die ungefähre Art des An- und Abstieges des Stromes erkennen lässt. Die Zahl der Stromwechsel ergiebt sich natürlich ohne weiteres, wenn man die Geschwindigkeit der bewegten Elektroden kennt.

Als Beleg teile ich die elektrolytische Zeichnung eines Wechselstromes mit, die ich durch die Liebenswürdigkeit der Herren Professoren C. Cranz und W. Gmelin in der Friedrich-Eugen-Realschule zu Stuttgart anzufertigen in der Lage war.

Fig. 2 zeigt ohne weiteres das allmähliche An- und Absteigen der Wechselströme, welches sich allerdings weniger durch allmähliches Dunklerwerden, als vielmehr durch allmähliches Breiterwerden ausdrückt. Erhöhte man die Geschwindigkeit der sich bewegenden Elektroden, so konnte man sehr gut an den jetzt 2,4 cm langen Strichen das allmähliche Zu- und Abnehmen der Dunkelheit, sowie den symmetrischen Verlauf der Ströme erkennen; denn anders als in Fig. 9 dauerte hier die Zu- und Abnahme der Dunkelheit gleich lange und



Fig. 2.

die dunkelste Stelle lag genau in der Mitte. Die Zahl der Wechsel ergiebt sich ohne weiteres aus den gleichzeitig gezeichneten Zeitmarken, die Fünftel-Secunden markiren. Sie beträgt hiernach in einer Secunde etwa 56. Auch viel schnellere Wechsel werden mit gleicher Sicherheit und Bequemlichkeit angezeigt.



Fig. 3.

Vielleicht interessirt den einen oder anderen Leser auch noch eine Thatsache, die ich gelegentlich bei diesen ziemlich starken Wechselströmen beobachtete. Sie findet in der Fig. 3 ihren Ausdruck. Als ich nämlich die beiden zeichnenden Elektroden zwischen zwei weitere, in sich kurz geschlossene andere Elektroden setzte, denen aber natürlich kein Strom zugeführt wurde, so zeichneten auch diese und zeigten hierdurch an, dass gewissermaassen herumschweifende Ströme von ihnen abgefangen wurden. Die Sache verhielt sich offenbar folgendermaassen.

Seien A und B in Fig. 4 die zeichnenden inneren Elektroden, A_1 und B_1 die äusseren, in sich geschlossenen Elektroden ohne Strom und ginge während einer bestimmten Zeit

der Strom in der angezeichneten Richtung ↓ von A nach B, so wird jetzt A_1 gegenüber dem positiven A negativ. Es stellt sich also sofort ein Strom von A nach A_1 ein. In ähnlicher Weise wird B_1 positiv gegenüber dem negativen B und durch die äusseren Elektroden A_1, B_1 fliesst ein natürlich viel schwächerer Strom ↓ von A_1 nach B_1, dessen Spuren deutlich zu erkennen sind. Er setzt immer genau mit dem Beginn des ursprünglichen Stromes ein und hört mit ihm auf. Seine Richtung, Zeitdauer und ungefähre Stärke geht unmittelbar aus der Zeichnung hervor.

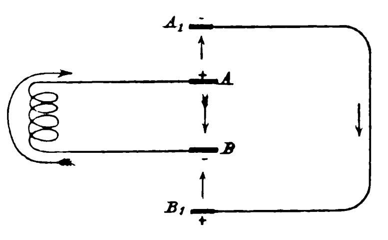


Fig. 4.

Meine Methode ist ferner anwendbar bis herab zu Strömen von etwa 1 Volt, vorausgesetzt natürlich, dass auch die Menge der angewendeten Elektricität in der Zeiteinheit eine gewisse Grösse erreicht, die natürlich — wie schon aus obigen Beispielen hervorgeht — ausserordentlich viel geringer zu sein braucht, als bei der König'schen. Ein gewöhnliches Daniell'sches Element, z. B. von 14 cm Höhe und 9,7 cm Durchmesser, bringt bei stillstehenden Elektroden erst nach etwa einer Secunde einen deutlichen Jodfleck hervor. Bewegt man die Elektroden, so ist nur bei langsamer Bewegung ein matter Strich erkennbar. Mässige Verstärkung des Stromes macht — unter sonst gleichen Bedingungen — den Strich sofort dunkler. (Vgl. unten Fig. 5.) Es handelt sich hier um Ströme von vielleicht $^1/_{300}$ bis $^1/_{100}$ Amp.

Die obere Grenze der Ströme, bis zu welcher meine Methode angewendet werden kann, ist mir nicht bekannt. Nur wird man eben allzu starke Ströme den Elektroden nicht zuleiten (sie brennen sonst ab), sondern die Ströme durch Einschaltung von Widerständen zweckmässig abschwächen, was ja kein Kunststück ist. Oeffnungsinductionsströme mittelstarker Apparate, die doch ein oder mehrere Tausend Volt Spannung haben, lassen sich vortrefflich durch sie aufzeichnen.

Haben wir hiernach einen Strom von 1—15 Volt, der periodisch unterbrochen wird, oder seine Richtung ändert, oder in gleicher Höhe dauernd verläuft, so versagt nach König's

eigener Angabe seine Methode vollkommen. Die meine giebt alle diese Ströme in ihrer Richtung und ungefähren Stärke an. Zunächst z. B. constante Ströme. Nachstehende Abbildung, Fig. 5, zeigt sechs übereinander liegende parallele Striche von verschiedener Schattirung und Breite. Der hellste, oberste Nr. 1, wurde natürlich von dem schwächsten Strom gezeichnet, die nächsten unteren dagegen, Nr. 2—6, von immer stärkeren

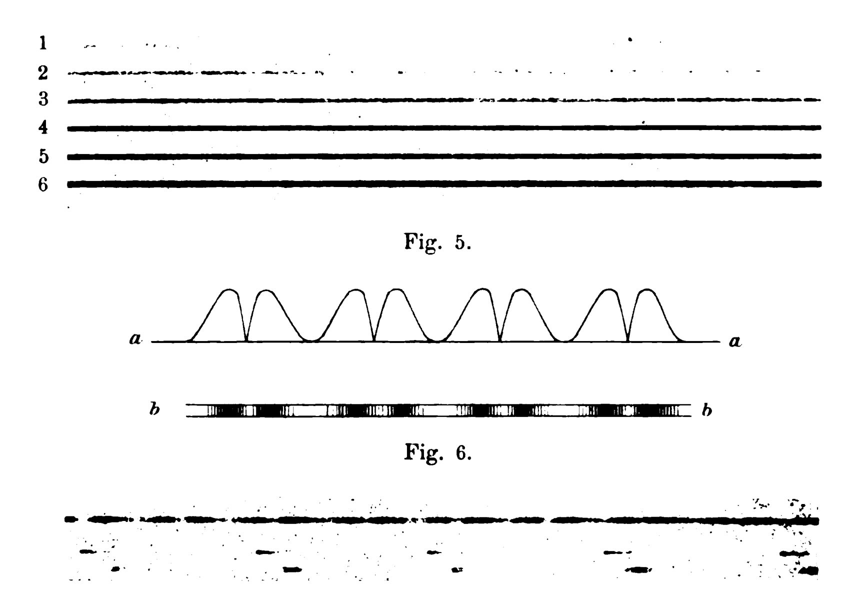


Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Strömen. Auf diese Weise kann man, da man die Stärke dieser Ströme und die Geschwindigkeit der Walze kennt, andere Ströme geradezu messen.

Steigt schliesslich — und darauf lege ich ein ganz besonderes Gewicht — ein Strom nicht augenblicklich zu seiner vollen Höhe an, sondern entwickelt er sich innerhalb einer gewissen, nicht allzu kurzen Zeit z. B. von der Stärke des Stromes in Nr. 1 bis zu derjenigen in Nr. 5, so zeichnet auch seine Anode, wie schon oben erwähnt, einen allmählich dunkler werdenden Strich. Aehnliches findet natürlich statt bei einer allmählichen Abnahme des Stromes.

Sehr schön und einfach kann man dies auch noch nach-

weisen an den Strömen einer Stöhrer'schen Maschine, welche, wenn der Commutator eingestellt ist, etwa den in Fig. 6, *a* dargestellten Verlauf haben. Die von diesen Stromschwankungen gezeichneten Linien gleichen den in Fig. 6, *b* schematisch wiedergegebenen. Immer wo der Strom stark wird, wird auch die von ihm gezeichnete Linie dunkel, und wo er schwach wird oder verschwindet, verschwindet auch die Linie. Fig. 7 zeigt eine der-

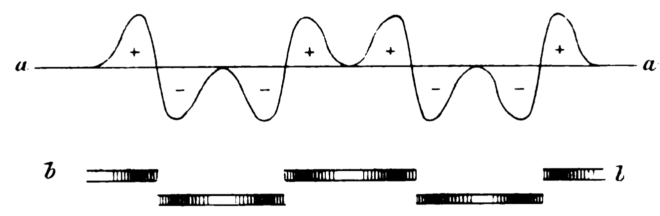


Fig. 8.

artige Zeichnung in nahezu natürlicher Grösse. Die Zeitmarken unter dem elektrolytischen Strich bezeichnen Fünftel-Secunden. (Es sind dunkle Oeffnungs- und matte Schliessungsschläge.)

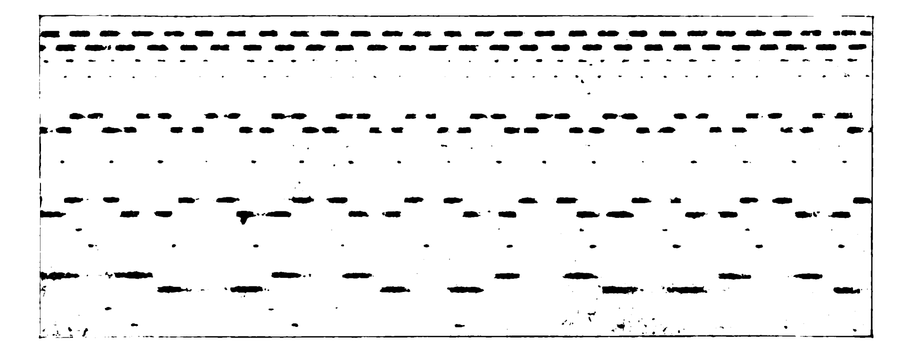


Fig. 9.

Ganz ähnliche Zeichnungen giebt die Stöhrer'sche Maschine, wenn man den Commutator nicht eingeschaltet hat, sondern ihre Wechselströme unmittelbar ableitet. Die Fig. 8, *a* zeigt den ungefähren Verlauf dieser Ströme und Fig. 8, *b* deren schematische Zeichnungen. Fig. 9 dagegen giebt uns eine Abbildung des Originals. Dieselbe ist ohne weiteres verständlich. Die Ströme sind bei verschiedenen Geschwindigkeiten der Walze gezeichnet, wie aus den Zeitmarken, die durchweg

Fünftel-Secunden bedeuten, ersichtlich ist. Man sieht unter anderem, dass die einzelnen Ströme keinen symmetrischen Verlauf haben, sondern dass ihre Höhepunkte sehr nahe an ihrem Ende bez. an ihrem Anfang liegen.

Auch die *Extracurrenten*, welche meine Stöhrer'sche Maschine giebt, können trotz ihrer schnellen Folge durch meine Methode gut und sicher aufgezeichnet werden. Eine halbe Umdrehung der Spulen liefert nämlich 25 solcher Ströme. Sie nehmen, sowie die Ströme selbst (vgl. Fig. 10, 1 und 2) an Stärke zu und ab und sind in den Nullstellungen der Spulen (wenn diese gerade in der Mitte zwischen den Magnetpolen stehen) natürlich Null oder nahezu Null. Fig. 10, 1 und 2



Fig. 10.

zeigt die gewöhnlichen Wechselströme der Maschine, 1*a* und 2*a* die Extracurrenten. In der Originalzeichnung gelingt es leicht, in dem Strich einer halben Umdrehung, das ist in dem Zeitraum von 0,15 Secunden über 20 kleine Striche auszuzählen, welche also ebenso vielen hintereinander folgenden gleichgerichteten Stromstössen ihre Entstehung verdanken. Dass man bei stärkeren und namentlich bei fortwährend wechselnden Strömen, die sich naturgemäss viel leichter aufzeichnen, zu viel höheren Zahlen (300—400 in der Secunde) kommen kann, habe ich schon oben erwähnt. Nun ich glaube, das ist trotz des feuchten Fliesspapieres doch ein recht befriedigender Grad von Genauigkeit.

In gleicher Weise werden auch die von den gewöhnlichen Schlittenapparaten erzeugten *Extracurrenten* (der primären Spule) auf das Anschaulichste von meiner Methode verzeichnet. (Die König'sche versagte mir auch hier vollkommen.) Je nach der Art, wie man diese Extracurrenten erzeugt, übersieht man unmittelbar den Moment ihres Entstehens und ihre Richtung

im Vergleich zu den in der Spule vorhandenen constanten Strömen.

So ergiebt z. B. die Anordnung in Fig. 11, in welcher in *C* geöffnet und geschlossen wird, dass der durch die Elektroden $E E_1$ gehende Strom den nebenstehenden (in Fig. 12, *a*) gezeichneten Verlauf hat. Bei Oeffnung (*Ö*) schiesst der Oeffnungsextracurrent ➡ ➤ zu bedeutender Höhe auf und ihm folgt auf dem Fuss der Strom des Elementes *D* —➤ in gleicher Richtung. Bei Schliessung (*S*) verschwindet der Strom ····➤

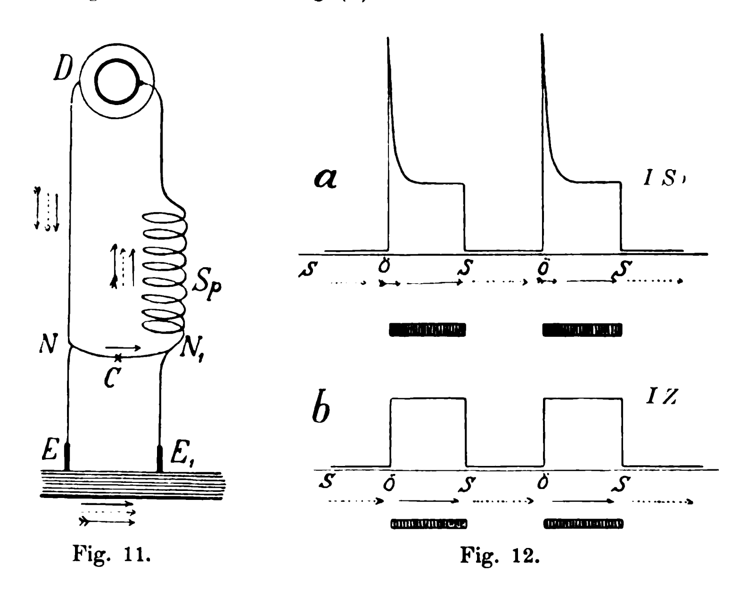


Fig. 11. Fig. 12.

nahezu ganz aus den Elektroden $E E_1$. Dementsprechend verhält sich die elektrolytische Zeichnung, die scharf dunkel einsetzt und allmählich verblasst. Ersetzt man die Spule (*Sp*) durch einen Zickzackdraht (*Z*) von gleichem Widerstande, so giebt es keine Extracurrenten. Der Verlauf der Ströme ist so, wie ihn Fig. 12, *b* darstellt und ihre darunter befindliche Zeichnung dementsprechend.

Erzeugt man aber die Extracurrenten in anderer Art, so wie es Fig. 13 darstellt, indem man die Elektrode *E* jenseits des Elementes nach *N* verlegt, bildet also die Spule die Nebenschliessung, während nach wie vor in *Ö* geschlossen und geöffnet wird, so ist der Verlauf der Ströme in der Spule und

in den Elektroden etwa so, wie *a* in Fig. 14 es zeigt. Bei Oeffnung (*Ö*) entsteht der dem Bestandstromanteil entgegengesetzt laufende Oeffnungsextracurrent allein ➸. Hierauf verschwindet jeder Strom aus der Spule. Bei *S* aber tritt der Bestandstromanteil ⟵ in den Spulenelektrodenkreis und zwar, was noch ganz besonders zu beachten ist, macht sich hier auch der Schliessungsextracurrent bemerkbar, der sonst gar nicht so leicht nachzuweisen ist. Die den Bestandstromanteil ⟵ zeichnende Elektrode zeichnet nämlich zuerst

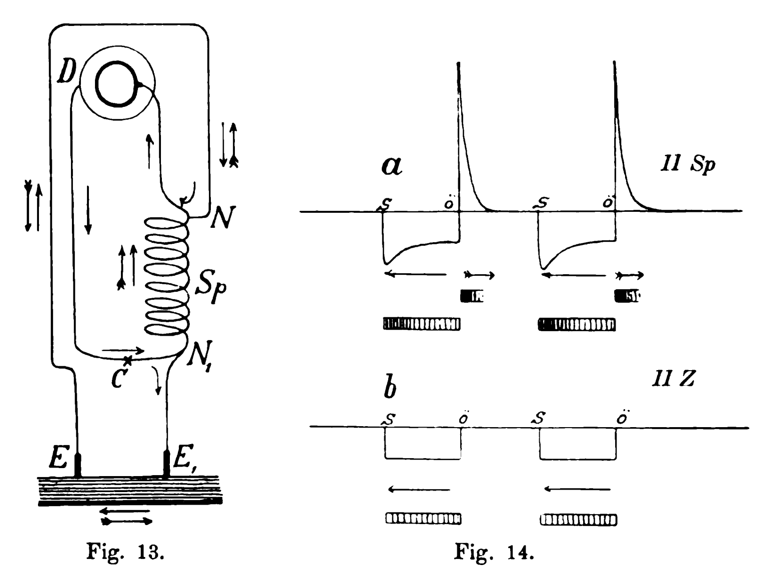


Fig. 13. Fig. 14.

dunkel und später heller. Ersetzt man wieder die Spule (*Sp*) durch den Zickzackdraht (*Z*), so fallen beide Extracurrenten fort und es werden gemäss dem Verlauf der Ströme in *b* nur die Bestandstromanteile (⟵) gezeichnet.

Fig. 15 giebt hierfür einige Belege. Die erste Linie 1, *I Sp*, sowie die fünfte 1 *a*, *I Sp* giebt für verschiedene, hier nicht näher zu beschreibende Anordnungen die Ströme der Fig. 12, *a* wieder; die Linien 2, *I Z* und 2 *a*, *I Z* diejenigen der Fig. 12, *b*.

Die dritte Linie 3, *II Sp* und die vorletzte 3 *a*, *II Sp* giebt die Ströme der Fig. 14, *a* wieder und die noch übrigen Linien 4, *II Z* und 4 *a*, *II Z* diejenigen der Fig. 14, *b*.

Hierzu ist etwa noch zu bemerken, dass die Zeichnungen durchweg im frischen Zustande am allerschönsten sind und durch die mehrfache Wiedergabe natürlich an Schärfe und Schönheit viel verlieren. Sie sind in der Fig. 15 auf etwa die Hälfte verkleinert. Die Zeitmarken bezeichnen hier wie überall Fünftel-Secunden. Die untereinander gezeichneten Striche gehören zusammen (1 zu 2, 3 zu 4 etc.).

Ich glaube kaum, dass man durch irgend eine andere Methode in so einfacher, schneller und sicherer Art die in der

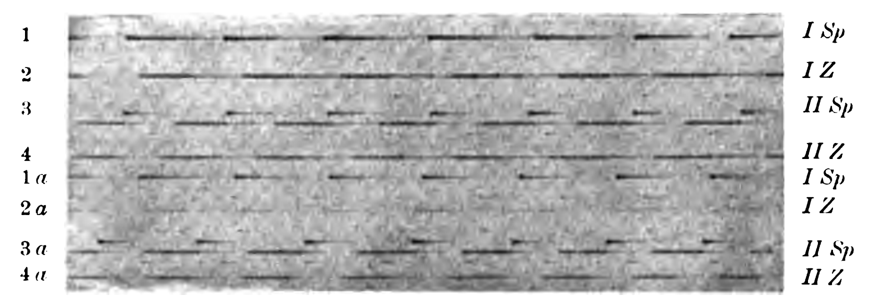


Fig. 15.

Spule kreisenden verschiedenartigen Ströme nachweisen kann. Die König'sche Methode kann es jedenfalls nicht. Günstigstenfalls würde sie vielleicht bei sehr stärken Strömen die Oeffnungsextracurrenten verzeichnen.

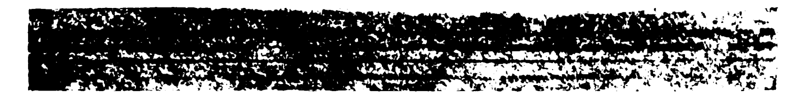


Fig. 16.

Ich wende mich schliesslich zu den eigentlichen *Inductionsströmen* der gewöhnlichen Inductionsapparate, welche in der secundären Rolle erzeugt werden. Bekanntlich haben diese beiden Ströme sehr verschiedene physikalische und physiologische Eigenschaften. Erfolgt die Schliessung und Oeffnung des primären Kreises in nahezu gleichen Zeitabständen, so zeichnet meine Methode folgende Figur (vgl. Fig. 16). Man sieht ohne weiteres, dass 1. der Schliessungsinductionsstrom (die unteren Flecke) eine entgegengesetzte Richtung hat, als der Oeffnungsinductionsstrom (die oberen Flecke) und dass

2. der Oeffnungsinductionsstrom viel dunklere, schärfer einsetzende kurze Linien zeichnet, als der Schliessungsinductionsstrom, dessen Zeichnungen durchweg matter sind. (Vgl. auch die Zeitmarken in Fig. 2 und namentlich in Fig. 7.)

Schwächt man die Ströme durch Entfernung der Spulen voneinander mehr und mehr ab, so bleibt dieser Unterschied bestehen und schliesslich zeichnet nur noch die Anode des elektrolytisch wirksameren Oeffnungsinductionsstromes.

Stellt man dieselben Versuche mit der König'schen Methode an, so bekommt man auch mit ihr zierliche Zeichnungen. Vorweg aber ist hervorzuheben, dass man nur die Wirkungen der Oeffnungsinductionsströme nachweisen kann. Von den Schliessungsinductionsströmen sah ich, wenigstens mit meinen Apparaten, keinerlei Wirkungen. Nur als ich mit grösseren Ruhmkorff'schen Apparaten arbeitete, fand ich, dass auch von den Schliessungsschlägen die Asphaltschicht wirksam geladen wird, wenn etwa die Oeffnungsfunken 1 cm lang sind und die Schliessungsschläge kleine Funken geben.

Setzt man nämlich die Anode auf die Asphaltschicht, während die Kathode mit dem unter ihr befindlichen Metall in leitender Verbindung steht, so erhält man zierliche rote concentrische Kreise mit einem roten Punkt in der Mitte. Häufig werden sie durch radiäre Strahlungen unterbrochen. Sowohl die Mennige, wie der Schwefel beteiligen sich an der Zeichnung.

Sitzt dagegen die Kathode auf der Asphaltschicht, so werden viel kleinere, dichtere rote Flecke von rundlicher Gestalt gezeichnet.

Sehr zierlich nehmen sich solche Reihen von kleinen Lichtenberg'schen Figuren aus, wenn man ein Stück Stanniol mit Asphaltlack überzieht und nachdem der Lack völlig getrocknet ist, dasselbe so wie das Jodkaliumpapier auf die metallene Walze (das Stanniol natürlich nach unten) aufspannt. Werden jetzt die Inductionsströme erzeugt und die eine Elektrode mit der metallenen Walze in Verbindung gebracht, die andere dagegen ganz leise auf die Asphaltschicht gesetzt, so bekommt man nach Bestäubung des asphaltirten Stanniols und sorgfältigem Abblasen mit einem Blasebalg zierliche Reihen von grösseren (positiven) Kreisen und von kleineren (negativen) Flecken.

Selbstverständlich kommen hierbei mancherlei Unregelmässigkeiten vor, so z. B. wenn die Asphaltschicht zu dünn oder zu dick, oder gar, wenn auch noch so leicht, verletzt ist. Dabei sind immer, was ich noch besonders betonen möchte, die Farben beider Figuren gleich oder kaum voneinander verschieden. Beiderlei Pulver, sowohl die Mennige wie der Schwefel haften, wenn auch in verschiedener Art, an den positiv und an den negativ geladenen Punkten, oder besser gesagt, sowohl in der Umgebung der Punkte, auf welchen die Anode, als auch derjenigen, auf welchen die Kathode (natürlich derselbe Draht bei Wechsel des Stromes) aufsass. Werden die Ströme schwächer, so werden beiderlei Figuren, namentlich die positiven immer kleiner und einander immer ähnlicher, sodass man sie schliesslich kaum voneinander unterscheiden kann.

All das Gesagte gilt, wenn man das bekannte Mennige-Schwefelgemisch oder das weniger schön zeichnende Englischrot-Schwefelgemisch anwendet. Nun kann man aber, wie Hr. Bürker kürzlich gefunden hat, ausserordentlich viel schönere Lichtenberg'sche Figuren erhalten, wenn man folgendes Gemisch anwendet. Schwefel 5, Karminpulver 1 und Semen Lycopodii 3 Raumteile. Die dann entstehenden Zeichnungen sind unvergleichlich viel bestimmter und charakteristischer, als diejenigen mit den oben erwähnten Gemischen aus zwei Pulvern.

Bestäubt man die elektrisirte Asphaltschicht mit diesem Pulver, so sieht man sofort, dass wenn auch nur eine Spur von Pulver herabfällt, die positiv geladenen Punkte von grossen roten, die negativ geladenen dagegen von kleinen hellgelben Kreisen umrahmt sind. Bestäubt man weiter und bläst dann vorsichtig ab, so erhält man sehr charakteristische und zierliche Zeichnungen. Dort, wo die nahezu punktförmige, positive Elektrode aufgesessen, ist ein kleiner gelber Kreis von 0,5 bis 1,0 mm Durchmesser, ihn umgiebt ein etwa 2 mm breiter roter und diesen wieder ein schmaler gelber. Wo derselbe Draht als Kathode sass, ist ein kleiner roter Kreis von höchstens 0,5—0,6 mm Durchmesser, ihn umgiebt ein kleiner, scharf gezeichneter gelber und diesen wieder ein ganz schwacher roter. Mehr als drei Ringe habe ich mit meinen Apparaten nicht gesehen. Bei Anwendung eines kleinen Ruhmkorff mit

Condensator traten vier Ringe auf. Innen kam bei den positiven noch ein ganz kleiner roter, bei den negativen ein ganz kleiner gelber hinzu.

Eine schwache Vorstellung von der Zierlichkeit dieser concentrischen Kreise, die in dieser Art noch nicht bekannt sind[1]), dürfte die Fig. 17 geben, welche die grösseren positiven und kleineren negativen Kreise in beinahe natürlicher Grösse darstellt.



Fig. 17.

Wie diese verschiedenen concentrischen positiven und negativen Ladungen, die auch an die Priestley'schen[2]) Ringe erinnern, zu Stande kommen, darüber möchte ich mir ein Urteil nicht erlauben. Jedenfalls dürften sie nicht ohne Interesse sein.

Wenn man hiernach die elektrostatische Methode mit der elektrolytischen vergleicht, so kommt man zu dem Ergebnis, dass die erstere wohl nur bei starken, namentlich stark gespannten Strömen Anwendung finden kann, dann aber in der von König angegebenen Art sehr genaue Ergebnisse liefert. Die elektrolytische dagegen ist nahezu überall anwendbar, sowohl bei starken, namentlich aber auch bei schwächeren Strömen, bei denen die elektrostatische vollkommen versagt.

Neben dieser allgemeinen Verwendbarkeit empfiehlt sich die elektrolytische Methode durch ihre Uebersichtlichkeit und Einfachheit. Denn wenn genügend Strom vorhanden ist, zeichnet eben die betreffende Elektrode unter den Augen des Beobachters. Bei der elektrostatischen dagegen sieht man der elektrisirten Asphaltschicht zunächst nichts an. Erst die Bestäubung mit dem Pulver und das nachherige Abklopfen oder Abblasen desselben lässt die Zeichnungen hervortreten.

Schliesslich sei noch auf einen Punkt hingewiesen. Wenn man längere Zeit mit den trockenen Pulvern in trockener Luft hantirt, verstäuben alle Apparate, und auch der Experimentator

1) Aehnliche Versuche sind beschrieben in G. Wiedemann, Die Lehre von der Elektricität 4. p. 780ff. 1885.

2) G. Wiedemann, l. c. p. 726.

überzieht sich bald mit rötlichem Staub. Namentlich wird man in seinem Nasenschleim sehr bald mikroskopisch und auch makroskopisch den Staub nachweisen können. Das ist im allgemeinen nicht angenehm, sicher aber nicht gleichgültig bei der Anwendung von Mennige. Da muss man sich bei längerem Experimentiren die Schleimhäute schützen. Das für die Mennige empfohlene englische Rot ist zwar nicht giftig, giebt aber nicht so schöne Zeichnungen und stäubt noch stärker. Das Bürker'sche Gemisch stäubt zwar auch stark, ist aber völlig ungiftig.

Zum Schluss möchte ich auch noch an dieser Stelle Hrn. Dr. K. Bürker und Hrn. stud. med. H. Breyer, die mich in jeder Weise bei den oben mitgeteilten Versuchen unterstützten, meinen Dank aussprechen.

Tübingen, Physiolog. Inst., Februar 1900.

(Eingegangen 14. Februar 1900.)

11. *Energetische Theorie der Thermoelektricität und Wärmeleitung von Metallen;*

von O. Wiedeburg.

Obwohl an theoretischen Behandlungen der Thermoelektricität wahrlich kein Mangel ist, sind doch bis in die jüngste Zeit immer neue solche gegeben worden, ein Beweis wohl, dass eine allgemeiner befriedigende noch nicht vorliegt. Die Aufgabe, die auf diesem Gebiete von der Theorie zu lösen ist, ist im Grunde eine zweifache: sie muss einmal Rechenschaft geben von den Beziehungen, die zwischen den verschiedenen, für die Thermoelektricität selbst charakteristischen Grössen bestehen, und sie muss ferner ermitteln, ob und in welcher Weise die thermoelektrischen mit anderen messbaren Eigenschaften der gegebenen Stoffe verknüpft sind.

Den ersten Punkt anlangend, besteht ziemlich allgemeine Uebereinstimmung darüber, um welche Relationen es sich handelt, die verschiedenen thermodynamischen Herleitungen derselben zeigen vielfach nur äusserliche Unterschiede. Zu kritischen Erörterungen bietet hier vor allem die Frage Anlass, in welcher Weise der zweite Hauptsatz der Thermodynamik zur Verwendung zu bringen sei: man kann einerseits zweifeln, ob überhaupt der Fall *umkehrbarer* Vorgänge gegeben sei, ob nicht etwa die unzweifelhaft sich einmischenden nichtumkehrbaren Vorgänge der Wärme- und Elektricitäts*leitung* dagegen sprechen, und Boltzmann[1]) hat deshalb seinerzeit das Problem formulirt von dem allgemeineren Gesichtspunkt aus, der die Leitungsvorgänge berücksichtigt; andererseits, auch gesetzt den Fall, man nimmt einen streng umkehrbaren Process als gegeben an, so bleibt doch die Thatsache bestehen, dass die Anwendung des zweiten Hauptsatzes hier nur durch eine eigenartige hypothetische Erweiterung seines Geltungsbereiches ermöglicht wird.

---

1) L. Boltzmann, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Wien, Mathem.-naturw. Kl. II. **96.** p. 1258. 1887.

Während er sonst — in der Form $\int (dQ/\vartheta) = 0$ — bezogen wird auf einen in sich vollkommen *homogenen* Körper, der *zeitlich nacheinander* die verschiedenen Wärmemengen dQ bei verschiedener Höhe seiner Temperatur ϑ (umkehrbar) aufnimmt bez. abgiebt, wird er von W. Thomson[1]) wie von Clausius[2]) und Budde[3]), von Duhem[4]) wie von Planck[5]) u. a. benutzt, um eine Beziehung herzustellen zwischen den Wärmemengen, die der Thermokreis in seinen einzelnen, *auf verschiedener Temperatur befindlichen* Teilen *gleichzeitig* mit der Umgebung austauscht. Dass ein solches Verfahren etwas Hypothetisches enthält, hat kürzlich Voigt schon hervorgehoben. Lorentz[6]) suchte es in seiner Theorie zu vermeiden.

Den thermodynamischen Contactpotentialtheorien steht gegenüber die wohl wenig beachtete Theorie von C. Neumann[7]), der auf die Elektricität ausser den rein elektrischen Kräften noch einen mit Temperatur und Dichte veränderlichen „isotropen Druck“ wirken lässt, und die hiermit in gewisser Weise verwandte formale Mitführungstheorie von F. Kohlrausch[8]), auf die wir noch zurückkommen.

Eine gewisse Mittelstellung nimmt Voigt's[9]) thermodynamische Theorie ein.

Der zweite Teil der Aufgabe: Beantwortung der Frage, wie sich etwa die Thermokraft einer Combination *voraus berechnen* lässt aus bekannten Eigenschaften ihrer Bestandteile, ist bisher wenig in Angriff genommen und ohne besonderen Erfolg. Bucherer[10]) suchte hier die Dampfspannungen der

1) W. Thomson, Trans. Roy. Soc. Edinb. **21.** p. 123. 1854.

2) R. Clausius, Pogg. Ann. **90.** p. 513. 1853.

3) E. Budde, Pogg. Ann. **153.** p. 343. 1874; Wied. Ann. **21.** p. 277. 1884; **30.** p. 664. 1887.

4) P. Duhem, Ann. scient. de l'Ecole Norm. (3) **2.** p. 405. 1885.

5) M. Planck, Wied. Ann. **36.** p. 624. 1889.

6) H. A. Lorentz, Arch. Néerl. **20.** p. 129. 1885; Wied. Ann. **36.** p. 593. 1889.

7) C. Neumann, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss., Math.-Phys. Kl. **24.** p. 49. 1872.

8) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. **156.** p. 601. 1875; Wied. Ann. **23.** p. 477. 1884; **67.** p. 630. 1899.

9) W. Voigt, Wied. Ann. **67.** p. 717. 1899.

10) A. H. Bucherer, Wied. Ann. **59.** p. 735. 1896; Zur Theorie d. Thermoelektr. d. Elektrolyte u. Metalle p. 14. Leipzig 1898.

Metalle einzuführen, Liebenow[1]) das thermische und elektrische Leitvermögen; sein Verfahren ist von Voigt[2]) sehr zutreffend kritisirt worden, indessen hat man doch das Gefühl, dass seine Schlussfolgerungen irgendwie sich der Wahrheit nähern. Endlich Riecke's[3]) kinetische Mitführungstheorie sucht die fraglichen Beziehungen zu gewinnen, indem sie alles durch Eigenschaften der Molecüle ausdrückt.

Im Folgenden möchte ich nun auf einer neuen Grundlage eine Theorie der Thermoelektricität aufzubauen suchen. Wenn ich sie als eine *energetische* bezeichne, so soll damit gesagt sein, dass für sie maassgebend ist die Gruppirung und Behandlung der verschiedenen physikalischen Begriffe mit Rücksicht auf ihr Verhältnis zum Energiebegriff, wie man es durch die Bezeichnung als Energie*factoren* andeutet. In mehreren Arbeiten[4]) habe ich diese Fragen schon behandelt, insbesondere auch gezeigt, wie die Energiegleichung selbst keineswegs den Ausgangspunkt zu bilden hat. Charakteristisch ist dabei, dass die verschiedenen „Zustandsseiten" auf Grund einer vollkommenen Analogie aller untereinander ganz gleichmässig behandelt werden. Wie man auch darüber denken mag, so wird man doch wohl zugeben müssen, dass der Versuch, eine solche Analogie, die sicherlich merkliche Vorteile bietet, möglichst weit zu treiben, nicht von Haus aus abzuweisen sei. Der Erfolg muss schliesslich den Maassstab zur Beurteilung liefern.

Die allgemeine Theorie der Zustandsänderungen.

Die Grundlage meiner Entwickelungen bildet, wie ich das verschiedentlich ausgeführt, das System der „Zustandsgleichungen" des betrachteten Körpers, aus dem man bei Einführung einer bestimmten Annahme die beiden Hauptsätze der Thermodynamik herleiten kann. Wir kennzeichnen eine jede „Zustandsseite" durch zwei Variabeln, die ihr entsprechende Intensitätsgrösse J und Quantitätsgrösse M; für die Wärme insbesondere spielt die Temperatur ϑ die Rolle der Grösse J

1) C. Liebenow, Wied. Ann. **68.** p. 316. 1899.

2) W. Voigt, Wied. Ann. **69.** p. 706. 1899.

3) E. Riecke, Wied. Ann. **66.** p. 353, 545, 1199. 1898.

4) O. Wiedeburg, Wied. Ann. **61.** p. 705. 1897; **62.** p. 652. 1897; **63.** p. 154. 1897; **64.** p. 519. 1898; **69.** p. 66. 1899.

und eine als die „Entropie“ sich ausweisende Grösse S die von M. Wenn wir nun die Wechselwirkung z. B. zwischen der Wärme und irgend einer anderen Zustandsseite — zunächst für umkehrbare Vorgänge — beschreiben wollen, so nehmen wir an, dass zwischen den vier Variabeln ϑ, S, J, M zwei Gleichungen bestehen, die lediglich eben diese Wechselwirkung zum Ausdruck bringen; unter Verwendung von Differentialen schreiben wir sie z. B. in der Form:

$$
(1) \qquad \begin{cases} c_\vartheta \, d\vartheta = dS + g_{\vartheta, M} \, dM, \\ c_J \, dJ = dM + g_{J, S} \, dS, \end{cases}
$$

wo die Grössen c und g dem betreffenden Körper eigentümlich sind. Unterwerfen wir nun diese Grössen unter Einführung des „Wechselwirkungsfactors“ $r_{M,S}$ der Bedingung:

$$
(2) \qquad \frac{g_{\vartheta, M}}{c_\vartheta} = \frac{g_{J, S}}{c_J} = - r_{M, S},
$$

so genügt dies, um die beiden Hauptsätze für unseren Fall herzuleiten, denn es folgt dann aus (1):

$$
(3) \qquad dE = \mathfrak{d} Q + \mathfrak{d} A,
$$

wo die „Gesamtenergie“

$$
E = \frac{1}{1 - c_\vartheta \, c_J \, r_{M,S}^2} \left(c_\vartheta \frac{\vartheta^2}{2} + c_\vartheta \, c_J \, r_{M,S} \, \vartheta J + c_J \frac{J^2}{2} \right),
$$

die „Wärmezufuhr“

$$
\mathfrak{d} Q = \vartheta \, dS,
$$

und die Zufuhr an Energie der anderen Art

$$
\mathfrak{d} A = J \, dM.
$$

Bei unserem Verfahren erspart uns also die Wechselwirkungsbedingung (2) namentlich auch die besondere Aufstellung des zweiten Hauptsatzes; ich weise darauf hin, weil wir später in ähnlicher Weise die oben besprochene Erweiterung dieses Satzes einführen werden.

Um dann den allgemeineren Fall der nicht-umkehrbaren Vorgänge zu behandeln, habe ich die Zustandsgleichungen (1) erweitert durch die Annahme, dass, wenn dt das Zeitelement, $d\vartheta / dt$ und ebenso dJ / dt nicht nur linear, sondern auch

quadratisch von dS/dt und dM/dt abhängt. Die Energiegleichung nimmt dann die Form an:

$$(4) \qquad dE = \vartheta\, dS + W_S \left(\frac{dS}{dt}\right)^2 dt + J\, dM + W_M \left(\frac{\partial M}{\partial t}\right)^2 dt,$$

wo die W lineare Functionen von ϑ und J sind.

Weiter wird die Wechselwirkung zweier homogener Körper aufeinander formulirt durch die Annahmen, dass die Summe der gleichartigen Quantitätsgrössen in einem abgeschlossenen System constant sei:

$$(5) \qquad dS_1 + dS_2 = 0, \qquad dM_1 + dM_2 = 0,$$

und dass ferner für die Gesamtenergie das Gleiche gelte:

$$(6) \qquad dE_1 + dE_2 = 0,$$

Es gelten dann für den „Uebergang" von einem Körper auf den anderen die „Intensitätsgleichungen":

$$(7) \qquad \frac{dS_1}{dt} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{W_{S_1} + W_{S_2}}, \qquad \frac{dM_1}{dt} = \frac{J_2 - J_1}{W_{M_1} + W_{M_2}},$$

derentwegen die W als „Widerstandsgrössen" bezeichnet werden.

Das ist in kurzen Zügen der Gedankengang meiner früheren Entwickelungen: es fragt sich nun, wie kommen wir mit ihrer Hülfe zu einer Formulirung der thermoelektrischen Erscheinungen, wie wir sie anstreben?

Die Zustandsgleichungen für einen durchströmten Körper.

Im Fall eines thermoelektrischen Kreises haben wir es nicht, wie oben, mit einem System aus nur zwei in sich vollkommen homogenen Körpern zu thun, sondern mit einer continuirlichen Reihe von Volumelementen, die teils von verschiedener chemischer Natur sind, teils wenigstens in verschiedenem physikalischen Zustand sich befinden. Wir fassen ein bestimmtes Volumelement in dem einen der beiden Metalle ins Auge, bezeichnen mit ϑ seine Temperatur, mit s seine Entropie, berechnet für die Volumeneinheit, mit φ den Wert des elektrischen Potentiales in ihm, mit q seine elektrische Ladung, wieder für die Volumeneinheit berechnet; letztere Grösse wird nur für nichtstationäre Ströme veränderlich, von

Null verschieden sein, man mag sie sich, wenn eine Veranschaulichung wünschenswert erscheint, an Ionen irgend welcher Art gebunden denken.

Nun wollen wir uns auf streng lineare Strömungen beschränken, wollen die Richtung, in der in einem der beiden Metalle die Volumteile aufeinander folgen, als x-Richtung bezeichnen. Die Art und Weise, in der zwei aneinander grenzende Volumteile sich in elektrischer Beziehung gegenseitig beeinflussen, stellen wir üblicherweise dar, indem wir von einem elektrischen *Strom* sprechen, der aus dem einen in das andere übertritt; seine Dichte, bezogen auf $+x$-Richtung, sei i. Entgegen der üblichen Anschauung führen wir nun einen entsprechenden Begriff auch für die gegenseitige *thermische* Einwirkung zweier Elemente ein, den Entropiestrom σ, der durch den Uebergang einer gewissen Menge Entropie (oder „thermischer Ladung", wie ich vorgeschlagen habe) zu stande kommt.

In den Grössen ϑ, s, σ; φ, q, i sind uns die Begriffe gegeben, die uns zur Darstellung der thermoelektrischen Erscheinungen, allgemeiner gesagt, zur Darstellung der Vorgänge in einem gleichzeitig von Wärme und Elektricität durchströmten Metall verhelfen sollen, es fragt sich: in welcher Weise verknüpfen wir sie miteinander?

Wir haben oben die zeitliche Aenderung einer jeden Intensitätsgrösse dargestellt als einesteils linear, andernteils quadratisch abhängig von den zeitlichen Aenderungen der beiden Quantitätsgrössen; in dem jetzt zu behandelnden Fall werden wir Uebereinstimmung mit der Erfahrung erzielen, wenn wir diese damalige Gestalt der für nicht-umkehrbare Vorgänge gültigen Zustandsgleichungen *sinngemäss* umformen; es spielen augenscheinlich die Grössen dM/dt und dS/dt in den quadratischen Gliedern eine etwas andere Rolle als in den linearen, der wir Rechnung tragen, indem wir bei der Umschreibung auf den jetzt zu behandelnden Fall in den quadratischen Gliedern sie durch die zugehörigen „Ströme" ersetzen, während in den linearen Gliedern die Aenderungen der „Ladung" stehen bleiben. In dem früheren mehr abstracten Fall eines Systems aus nur zwei Körpern fällt beides zusammen: die Aenderung der Ladung erfolgt nicht durch Zufluss von einer Seite *und* Abfluss nach einer anderen, sondern

nur einseitig, sie ist *gleich* dem Strom, soweit man von einem solchen hier überhaupt reden kann.

Demgemäss formuliren wir also die rein hypothetische Grundlage unserer Entwickelungen zunächst folgendermaassen: es bestehen zwischen den oben genannten Grössen die beiden Gleichungen:

$$(8) \quad \begin{cases} c_\vartheta \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} = \dfrac{\partial s}{\partial t} - c_\vartheta r_{q,s} \dfrac{\partial q}{\partial t} - \varkappa_s \sigma^2 + \gamma_{\vartheta,q} \cdot i^2, \\ c_\varphi \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \dfrac{\partial q}{\partial t} - c_\varphi r_{q,s} \dfrac{\partial s}{\partial t} - \varkappa_q i^2 + \gamma_{\varphi,s} \cdot \sigma^2; \end{cases}$$

dabei werden die Coefficienten c_ϑ, c_φ, $\varkappa_s$, $\varkappa_q$, $\gamma_{\vartheta,q}$, $\gamma_{\varphi,s}$, $r_{q,s}$ als (specifische, auf die Volumeneinheit bezogene) *Stoffconstanten* des betreffenden Metalles angesehen. Es ist neben der ganz gleichförmigen Behandlung aller Zustandsseiten charakteristisch für unsere Auffassung, dass sie in dieser Weise wahre Constanten von Haus aus in Rechnung setzt, deren Auffindung schliesslich ja doch das Ziel der Messungen ist.

Die Wechselwirkungsconstante $r_{q,s}$ ist, den obigen Gleichungen (1) und (2) entsprechend, gleich eingeführt, um die Herleitung der Energiegleichung zu sichern.

Bevor wir aber zur Verwendung der Grundgleichungen (8) schreiten, müssen wir mit ihnen noch eine *Erweiterung* vornehmen, die wohl schon bei meinen früheren Betrachtungen nahegelegen hätte, deren Notwendigkeit aber erst hier in dem allgemeineren Fall zu Tage getreten ist: wir führen in jede der beiden Gleichungen noch ein Glied ein, das dem *Product* der beiden Ströme, σi, proportional ist.

Danach lauten denn unsere Ausgangsgleichungen:

$$(9) \quad \begin{cases} c_\vartheta \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} = \dfrac{\partial s}{\partial t} - c_\vartheta r_{q,s} \dfrac{\partial q}{\partial t} - \varkappa_s \cdot \sigma^2 - \varrho_\vartheta \cdot \sigma i + \gamma_{\vartheta,q} \cdot i^2, \\ c_\varphi \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \dfrac{\partial q}{\partial t} - c_\varphi r_{q,s} \dfrac{\partial s}{\partial t} - \varkappa_q \cdot i^2 - \varrho_\varphi \cdot \sigma i + \gamma_{\varphi,s} \sigma^2, \end{cases}$$

wo auch die ϱ specifische Constanten des betreffenden Metalles sind; sie stellen die Beziehung dar, in der die Ströme, die Ladungsänderungen, die Temperatur- und Potentialänderungen in einem beliebigen Punkt des Metalles zu einander stehen. (Dass dabei einigen Constanten das negative Vorzeichen gegeben wurde, ist aus praktischen Gründen geschehen, wie sich im Lauf der Rechnung zeigen wird.)

Es sei dabei bemerkt, dass diese Gleichungen zugeschnitten sind auf den speciellen Zweck, dem sie dienen sollen; sie geben weder von den Strahlungs- noch von den Inductionserscheinungen Rechenschaft, die mit thermischen und elektrischen Vorgängen doch so direct verknüpft sind. Deren Berücksichtigung muss der Zukunft vorbehalten bleiben.

Die Energiegleichung und die Strömungsgleichungen.

Wir leiten nun zunächst die für die betrachteten Vorgänge gültige Form der *Energiegleichung* ab. Dazu löse man die beiden Gleichungen (9) auf nach $\partial s / \partial t$ und $\partial q / \partial t$, multiplicire die erste der erhaltenen beiden Gleichungen mit ϑ, die zweite mit φ und addire, dann lässt sich das Resultat auf die Form bringen:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \vartheta \frac{\partial s}{\partial t} + \varphi \frac{\partial q}{\partial t} + w_s \,.\, \sigma^2 - 2\,a \,.\, \sigma\, i + w_q \,.\, i^2\,, \tag{10}$$

wo die Gesamtenergie, der Energieinhalt, der Volumeneinheit, dem oben gegebenen Ausdruck für E entsprechend, bestimmt ist durch

$$e = \nu \left(c_\vartheta \frac{\vartheta^2}{2} + c_\vartheta\, c_\varphi\, r_{q,s}\, \vartheta\, \varphi + c_\varphi \frac{\varphi^2}{2} \right), \tag{11}$$

wenn zur Abkürzung

$$\frac{1}{1 - c_\vartheta\, c_\varphi\, r_{q,s}^2} = \nu$$

gesetzt wird, wo ferner:

$$w_s = \nu\,(\gamma_{\varphi,s} - \varkappa_s\, c_\varphi\, r_{q,s})\, \varphi + \nu\,(\gamma_{\varphi,s}\, c_\vartheta\, r_{q,s} - \varkappa_s)\, \vartheta\,, \tag{12}$$

$$w_q = \nu\,(\gamma_{\vartheta,q} - \varkappa_q\, c_\vartheta\, r_{q,s})\, \vartheta + \nu\,(\gamma_{\vartheta,q}\, c_\varphi\, r_{q,s} - \varkappa_q)\, \varphi\,, \tag{13}$$

$$2\,a = \nu\,(\varrho_\varphi + \varrho_\vartheta\, c_\varphi\, r_{q,s})\, \varphi + \nu\,(\varrho_\vartheta + \varrho_\varphi\, c_\vartheta\, r_{q,s})\, \vartheta\,. \tag{14}$$

Die Energiegleichung soll uns nun zu weiteren Schlüssen dienen, nämlich zur Formulirung der gegenseitigen Beeinflussung einander benachbarter Volumenelemente. Da die Ladung eines jeden solchen sich ändert durch Zufluss von der einen, Abfluss nach der anderen Seite, so besteht zwischen Ladung und Strömung die bekannte, als *Continuitätsgleichung* bezeichnete Relation:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = - \frac{\partial i}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial s}{\partial t} = - \frac{\partial \sigma}{\partial x}\,. \tag{15}$$

Es spielt der Continuitätssatz hier in unserem Falle eines Körpers, dessen Zustandsvariabeln örtlich veränderlich sind,

dieselbe Rolle, wie oben im Falle eines abgeschlossenen Systems aus nur zwei homogenen Körpern der durch Gleichung (5) ausgedrückte Satz von der Erhaltung der Quantitätsgrössen; beide bringen die definitionsgemässe Eigentümlichkeit der Quantitätsgrössen zum Ausdruck.

Auf Grund von (15) können wir die Energiegleichung schreiben:

$$(16)\qquad \frac{\partial e}{\partial t} = -\vartheta\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \varphi\frac{\partial i}{\partial x} + w_s\sigma^2 - 2a\sigma i + w_q i^2;$$

sie enthält nur noch die Ströme und die Intensitäten.

Nun haben wir oben im Fall der zwei Körper folgendermaassen weiter geschlossen: Die Vorgänge im Innern dieses Systems unterliegen nicht nur *der* Bedingung, dass die Summen der gleichartigen Quantitätsgrössen constant bleiben (Gleichung (5)), sondern auch noch der ferneren, dass für die Summe der Grössen E das Gleiche gilt (Gleichung (6)): auch die Gesamtenergie, berechnet für beide Körper zusammen, ist unveränderlich, der Energieinhalt jedes einzelnen vermehrt sich nur um so viel, als sich der des anderen vermindert, auch hinsichtlich dieser Grössen handelt es sich nur um eine *Uebertragung* von einem Bestandteil des Systems auf den andern.

Dementsprechend setzen wir fest, dass auch *der Energieinhalt eines Volumelementes* in dem jetzt behandelten allgemeineren Fall *sich nur durch Zufluss von der einen, Abfluss nach der anderen Seite verändert,* dass also die Gleichung gilt

$$(17)\qquad \frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x},$$

durch die der Begriff des *Energiestromes* ε in unsere Betrachtungen eingeführt wird.

Schreiben wir die linke Seite der Energiegleichung (16) demgemäss um, so besagt die Relation nun, dass die rechte Seite sich als Differentialquotient einer Function von x (und t) nach x muss darstellen lassen.

Eine Umformung der rechten Seite liegt nahe, durch die die Energiegleichung folgende Gestalt erhält:

$$(18)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\dfrac{\partial(\vartheta\sigma)}{\partial x} - \dfrac{\partial(\varphi i)}{\partial x} + \sigma\dfrac{\partial\vartheta}{\partial x} + i\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \qquad\qquad + w_s\sigma^2 - 2a\sigma i + w_q i^2. \end{cases}$$

Man sieht, dass der besagten Forderung genügt wird, wenn wir setzen:

$$(19)\qquad \sigma \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x} + w_s \sigma^2 - 2 a \sigma i + w_q i^2 = 0 ,$$

und dies wiederum ist erfüllt, wenn die Beziehungen bestehen:

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_s \sigma - a_q i = 0 , \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + w_q i - a_s \sigma = 0 , \end{cases}$$

wobei die Grössen a_q und a_s der Bedingung unterliegen, dass

$$(21)\qquad a_q + a_s = 2 a .$$

Damit haben wir diejenigen Gleichungen gewonnen, die den früher angeführten Intensitätsgleichungen (7) entsprechen, verallgemeinert infolge der Erweiterung, die wir mit den Zustandsgleichungen durch Einführung der Productglieder vorgenommen haben.

Wir gewinnen zugleich für die Energiegleichung die Form:

$$(22)\qquad \frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{\partial (\vartheta \sigma + \varphi i)}{\partial x} ,$$

nämlich für den Gesamtenergiestrom ε die Darstellung

$$(23)\qquad \varepsilon = \vartheta \sigma + \varphi i ,$$

wir können ihn zerlegen in die zwei Teile: thermischer Energiestrom $\vartheta \sigma$ und elektrischer Energiestrom φi.

An die Gleichungen (20) vor allem knüpfen sich unsere weiteren Erörterungen, wir wollen darum zunächst ihren Inhalt etwas näher ins Auge fassen.

Leitung und Mitführung.

Es ergeben sich aus (20) sofort folgende Gleichungen für die beiden Ströme:

$$(24)\qquad \begin{cases} \sigma = - \dfrac{w_q}{w_q w_s - a_q a_s} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} - \dfrac{a_q}{w_q w_s - a_q a_s} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} , \\ i = - \dfrac{w_s}{w_q w_s - a_q a_s} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{a_s}{w_q w_s - a_q a_s} \cdot \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} . \end{cases}$$

Wir sehen, es wird eine Strömung (σ oder i) bedingt nicht nur durch ein „Gefälle“ der *ihr entsprechenden* Intensität,

sondern auch durch ein solches der *fremden.* Man kann diese Verhältnisse einfach beschreiben, wenn man von einer „*Mitführung*" des einen Stromes durch den andersartigen spricht, wie das seit Kohlrausch's Theorie gebräuchlich ist.

Ist z. B. $(\partial \vartheta / \partial x) = 0$, sodass nur das *Potential*gefälle wirkt, so erzeugt dies einen elektrischen Strom i *und* einen Entropiestrom σ, die nach (24) zu einander in dem Verhältnis stehen:

$$\sigma = \frac{a_q}{w_s} i ;$$

es wird, kann man dann sagen, vom elektrischen Strom i ein Entropiestrom dieser Stärke „mitgeführt". Umgekehrt, wenn nur ein *Temperatur*gefälle vorhanden ist, also der Entropiestrom σ der „primäre", führt dieser einen elektrischen Strom $i = (a_s / w_q) \sigma$ mit sich.

Liegen andererseits die Verhältnisse so, dass nur *einer* der beiden Ströme zu stande kommt, so haben wir es mit reinen *Leitungs*vorgängen zu thun; die Beziehung zwischen dem vorhandenen Strom und dem ihm zugehörigen Intensitätsgefälle lautet hier nach (20) derart, dass:

$$(25) \qquad \sigma = -\frac{1}{w_s} \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \qquad i = -\frac{1}{w_q} \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Es besteht dann in einem solchen nur von *einem* Strom durchflossenen Leiter auch ein Gefälle der ihm fremden Intensität, das sich aus (20) leicht berechnet.

Im allgemeinen gehen die eigentliche Leitung und die Mitführung nebeneinander her, jeder Strom lässt sich in zwei dementsprechende Teile teilen (Gleichung (24).)

Wie die zweite Gleichung (25) zeigt, stellt also die Grösse w_q den *specifischen elektrischen Widerstand* des Metalles dar, entsprechend ist w_s als *thermischer Widerstand* zu bezeichnen. Was über diese Grössen nach unseren Herleitungen zu sagen ist, das habe ich früher[1]) schon eingehend dargelegt; denn die „Widerstandsgrössen" W_q und W_s, die damals besprochen wurden, unterscheiden sich von den hier in der üblichen Form als „specifische" Widerstände auftretenden nur dadurch, dass bei ihnen die geometrischen Verhältnisse unbestimmt blieben.

1) O. Wiedeburg, Wied. Ann. 62. p. 652. 1897.

Auf die Hauptpunkte möchte ich hier noch einmal kurz hinweisen:

Nach früherem sind w_q und w_s definirt durch die Gleichungen:

$$(12) \quad w_s = \nu(\gamma_{\varphi,s} - \varkappa_s c_\varphi r_{q,s})\varphi + \nu(\gamma_{\varphi,s} c_\vartheta r_{q,s} - \varkappa_s)\vartheta,$$

$$(13) \quad w_q = \nu(\gamma_{\vartheta,q} - \varkappa_q c_\vartheta r_{q,s})\vartheta + \nu(\gamma_{\vartheta,q} c_\varphi r_{q,s} - \varkappa_q)\varphi,$$

d. h. es ist jede lineare Function der *beiden* Intensitäten. Das würde bei w_q der strengen Form des Ohm'schen Gesetzes widersprechen, nach der der Widerstand unabhängig vom Potential ist; wir können aber unsere Formeln in Uebereinstimmung damit bringen, können w_q unabhängig von φ und analog w_s unabhängig von ϑ erhalten, wenn wir über die Constanten der Zustandsgleichungen passend verfügen.

Indem wir setzen:

$$(26) \quad \varkappa_s = \gamma_{\varphi,s} c_\vartheta r_{q,s} \quad \text{und} \quad \varkappa_q = \gamma_{\vartheta,q} c_\varphi r_{q,s},$$

wird

$$(27) \quad w_s = \gamma_{\varphi,s} \cdot \varphi, \quad w_q = \gamma_{\vartheta,q}\vartheta.$$

Beide specifischen Widerstände werden also der *fremden* Intensität proportional, und zwar dieser Intensität in *absoluter* Zählung, d. h. gerechnet in beiden Fällen von einem ganz bestimmten Nullpunkt aus, den wir als eben durch diese Gleichungen definirt ansehen können. Wir erhalten den *elektrischen Widerstand* eines Metalles *proportional* der *absoluten Temperatur*, was bekanntlich durch die Erfahrung mit ziemlicher Annäherung bestätigt wird, wie das früher schon näher besprochen wurde.[1])

Auch wegen der näheren Behandlung der anderen Formel (27), nach der der „thermische Widerstand“ proportional dem elektrischen Potential in absoluter Zählung, möchte ich auf meine früheren Ausführungen verweisen; ich muss nur be-

1) In allen Fällen, wo *beide* Ströme nebeneinander bestehen, ist nach (24) als Wert des elektrischen Widerstandes, d. h. des Verhältnisses von Potentialgefälle zu Strom, nicht w_q sondern

$$w_q = w_q - \frac{a_q a_s}{w_s}$$

zu rechnen, entsprechend bei w_s; über die Grösse des Unterschiedes können wir für jetzt nichts aussagen.

merken, dass der reciproke Wert von w_s zwar zusammenhängt, aber *nicht zu identificiren* ist mit der Grösse, die man gewöhnlich als *thermisches Leitvermögen* bezeichnet. Wir kommen später auf diese Fragen, die ich früher noch nicht übersah, zurück.

Durch die Festsetzungen (26) wird die Zahl der in den Zustandsgleichungen (9) enthaltenen Constanten auf 7 reducirt: es bleibt dabei die Frage noch offen, ob diese wirklich alle voneinander unabhängig sind.

Neben den beiden Widerständen treten die etwa als *Mitführungsfactoren* zu bezeichnenden Grössen a_q und a_s auf, von denen wir zunächst nur soviel wissen, dass nach (21) und (14):

$$(28)\quad a_q + a_s = 2\,a = v\,(\varrho_q + \varrho_\vartheta\, c_\varphi\, r_{q,s})\,\varphi + v\,(\varrho_\vartheta + \varrho_q\, c_\vartheta\, r_{q,s})\,\vartheta\,.$$

Hier bei dieser Grösse a, die zu *beiden* Zustandsseiten gleicherweise in Beziehung steht, haben wir keine Veranlassung, eine Intensität vor der anderen zu bevorzugen, wie wir das gewissermaassen bei den w thaten.

Die quantitave Reciprocität der Mitführung.

Nun wollen wir aber über diese Grössen a_q und a_s eine Bestimmung treffen, die für das folgende von entscheidender Bedeutung ist. *Wir setzen sie nämlich einander gleich*, sodass also

$$(29)\quad a_q = a_s = a = \frac{v}{2}\,(\varrho_q + \varrho_\vartheta\, c_\varphi\, r_{q,s})\,\varphi + \frac{v}{2}\,(\varrho_\vartheta + \varrho_q\, c_\vartheta\, r_{q,s})\,\vartheta\,.$$

Die Strömungsgleichungen (20), in denen die beiden a zuerst auftraten, nehmen dann die Gestalt an:

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_s\,\sigma - a\,.\,i = 0\,, \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + w_q\,i - a\,.\,\sigma = 0\,. \end{cases}$$

Danach besteht in den Mitführungserscheinungen eine *Reciprocität* auch in *quantitativer* Hinsicht. Man erkennt sie am besten an der Form, die jetzt die Gleichungen (24) annehmen:

$$(31)\quad \begin{cases} \sigma = -\dfrac{w_q}{w_q\,w_s - a^2}\,\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} - \dfrac{a}{w_q\,w_s - a^2}\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\,, \\[2ex] i = -\dfrac{w_s}{w_q\,w_s - a^2}\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} - \dfrac{a}{w_q\,w_s - a^2}\,\dfrac{\partial \vartheta}{\partial x}\,. \end{cases}$$

Wenn also $(\partial \vartheta / \partial x) = 0$, so ist der mitgeführte Entropiestrom

$$\sigma = - \frac{a}{w_q w_s - a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

wenn andererseits $(\partial \varphi / \partial x) = 0$, so ist der mitgeführte elektrische Strom:

$$i = - \frac{a}{w_q w_s - a^2} \frac{\partial \vartheta}{\partial x};$$

berechnet auf die Einheit des fremden Intensitätsgefälles sind also die in den beiden Fällen mitgeführten Ströme einander gleich: *es ist*, um einen kurzen Ausdruck zu gebrauchen, *das „Mitführungsvermögen" (analog dem Leitvermögen) des Metalles in beiden Beziehungen das gleiche.*

Wir können eine Parallele ziehen zwischen der hier besprochenen Reciprocitätsfestsetzung und jener, die wir hinsichtlich der *Zustands*gleichungen trafen, um die Gültigkeit der Energiegleichung zu erlangen.

Beschränkt auf umkehrbare Ladungsänderungen lauten ja die Zustandsgleichungen ursprünglich:

$$c_\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} + g_{\vartheta, q} \frac{\partial q}{\partial t},$$

$$c_q \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t} + g_{q, s} \frac{\partial s}{\partial t}.$$

Durch Einführung des Wechselwirkungsfactors r, gemäss Gleichung (2), gehen sie über in:

$$- \frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \frac{1}{c_\vartheta} \frac{\partial s}{\partial t} - r_{qs} \frac{\partial q}{\partial t} = 0,$$

$$- \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c_\varphi} \frac{\partial q}{\partial t} - r_{qs} \frac{\partial s}{\partial t} = 0.$$

In ihrer Symmetrie stimmen diese Gleichungen für die umkehrbaren Ladungsänderungen vollkommen überein mit den Gleichungen (30) für die Strömungen; auch bei diesen letzteren können wir von Umkehrbarkeit reden: denn wenn die beiden Intensitätsgefälle ihr Vorzeichen wechseln, so gilt gleiches auch für die beiden Ströme.

Nun haben wir oben schon darauf hingewiesen, dass die Einführung jener *ersten* Reciprocitätsannahme uns die besondere Aufstellung des zweiten Hauptsatzes in der gewöhnlich benutzten Form erspart: dem ganz entsprechend leistet uns, wie

wir bald sehen werden, die *neue* Reciprocitätsannahme ($a_q = a_s$) dieselben Dienste, derenthalben es sonst der eingangs hervorgehobenen hypothetischen *Erweiterung* des zweiten Hauptsatzes bedarf, die sich ja im Gegensatz zu der ursprünglichen Form auf physikalisch inhomogene, nämlich durchströmte Körper bezieht.

Der Thomsoneffect.

Die Anwendung der bisher entwickelten Formeln auf die thermoelektrischen Erscheinungen gestaltet sich am einfachsten da, wo es sich um nur einen, chemisch homogenen Körper handelt, bei der Behandlung des Thomsoneffectes. Die Untersuchung dieser Erscheinung bildet nur einen besonderen Fall des allgemeineren Problems, den stationären Zustand eines von Wärme und Elektricität durchströmten Leiters zu formuliren.

Die Lösung dieser Aufgabe ist leicht gegeben vermittelst der Energiegleichung (22) und der Strömungsgleichungen (30) bez. (31); erstere liefert als Bedingung des stationären Zustandes, in dem Temperatur und Potential, also auch e überall unverändert bleiben:

$$\frac{d(\vartheta\,\sigma + \varphi\, i)}{d\,x} = 0\,,$$

oder specieller, da der elektrische Strom in allen Querschnitten der gleiche ist:

$$\frac{d\,(\vartheta\,\sigma)}{d\,x} + i\,\frac{d\,\varphi}{d\,x} = 0; \tag{32}$$

in diese Gleichung führen wir aus (30) den Wert für σ ein:

$$\sigma = -\frac{1}{w_s}\,\frac{d\,\vartheta}{d\,x} + \frac{a}{w_s}\,i$$

und erhalten:

$$-\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\vartheta}{w_s}\,\frac{d\,\vartheta}{d\,x}\right) + i\,\frac{d}{d\,x}\left(\vartheta\,.\,\frac{a}{w_s}\right) + i\,\frac{d\,\varphi}{d\,x} = 0;$$

weiter wird aus der zweiten Gleichung (31) eingesetzt

$$\frac{d\,\varphi}{d\,x} = -\left(w_q - \frac{a^2}{w_s}\right) i - \frac{a}{w_s}\,\frac{d\,\vartheta}{d\,x}$$

und man erhält dann leicht:

$$\frac{d}{d\,x}\left(\frac{\vartheta}{w_s}\,\frac{d\,\vartheta}{d\,x}\right) - i\,\vartheta\,\frac{d}{d\,x}\left(\frac{a}{w_s}\right) + \left(w_q - \frac{a^2}{w_s}\right) i^2 = 0. \tag{33}$$

Es ergiebt sich also eine Relation derselben Form, wie man sie sonst erhält, wenn man das Facit zieht aus der „Wärmeentwickelung", die in einem Volumenelement auftritt einmal infolge Differenz der Wärme-Zu- und -Ableitung, dann infolge des der Stromstärke proportionalen Thomsoneffectes, endlich als dem Quadrat von i proportionale Joule'sche Wärme.

Nach unserer Herleitung wäre also das sog. thermische Leitvermögen gegeben durch $\lambda = \vartheta / w_s$; wir werden aber weiter unten sehen, dass die eigentliche Bedeutung dieser Grösse dadurch noch nicht vollständig getroffen ist. Wir sehen ferner, dass bei der Berechnung der Joule'schen Wärme der elektrische Widerstand nicht als w_q einzusetzen ist, sondern als $w_q' = w_q - a^2 / w_s$, wie überall, wo neben der Leitung die Mitführung besteht (vergl. Anm. p. 769).

Endlich zeigt sich, dass der Thomsoneffect bedingt ist durch die örtliche Veränderung der Grösse a / w_s; nun ist nach (29) a eine lineare homogene Function von ϑ und φ, schreiben wir zur Abkürzung:

$$a = \alpha_q \,.\, \varphi + \alpha_\vartheta \vartheta; \tag{34}$$

ferner ist nach (27) $w_s = \gamma_{\varphi, s} \,.\, \varphi$, demnach

$$\frac{a}{w_s} = \frac{\alpha_q}{\gamma_{\varphi, s}} + \frac{\alpha_\vartheta \vartheta}{\gamma_{\varphi, s} \varphi} \tag{35}$$

veränderlich, weil ϑ und φ mit x sich ändern. Bedenkt man aber, dass es sich hier handelt um Aenderung des Potentiales (ebenso wie der Temperatur), gerechnet in *absoluter* Zählung, und dass der Wert des normalen Potentiales, des Erdpotentiales, in dieser Zählung vermutlich von der Grössenordnung 10^9 Volt ist, so erkennt man, dass die Aenderungen von φ im Metall viel geringeren Einfluss auf a / w_s ausüben, als die von ϑ. Wir erhalten also mit grosser Annäherung die *Thomsonwärme dargestellt durch*:

$$- i \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{a}{w_s} \right) \frac{d \vartheta}{d x} = - i \vartheta \frac{\alpha_\vartheta}{\gamma_{\varphi, s} \varphi} \frac{d \vartheta}{d x},$$

d. h. der Coefficient des Thomsoneffectes, den man ja $\tau i (d \vartheta / d x)$ zu schreiben pflegt, die sog. specifische Wärme der Elektricität τ (bei Thomson mit σ bezeichnet) berechnet sich zu

$$\tau = - \frac{\alpha_\vartheta}{\gamma_{\varphi, s} \varphi} \,.\, \vartheta, \tag{36}$$

er erscheint also *proportional dem Wert der absoluten Temperatur* an der betreffenden Stelle des Metalles. Das Vorzeichen bleibt dabei unbestimmt, weil dies von den Constanten ϱ der Zustandsgleichungen, also auch von α_ϑ gilt.

Diese Schlussfolgerung aus unserem Ansatz stimmt bekanntlich mit den Ergebnissen der Erfahrung gut überein. Die von Tait[1]) auf Grund der später zu besprechenden Beziehungen des Thomsoneffectes zu der thermoelektrischen Kraft vermutete Proportionalität des Thomsoneffectes mit der absoluten Temperatur besteht nach Battelli's Messungen[2]) wirklich angenähert, etwa im selben Sinne, wie die Proportionalität des elektrischen Widerstandes mit der absoluten Temperatur. Thatsächlich entspringen bei unserer Herleitung beide Beziehungen aus derselben Annahme (26), durch die wir die Widerstände w_q und w_s unabhängig machten von der *zugehörigen* Intensität.

Wir haben hier eine streng lineare Bewegung der Wärme wie der Elektricität angenommen, bei der experimentellen Messung des Thomsoneffectes muss man aber noch die *seitliche* Abgabe von Wärme, allgemeiner gesagt: Energie, durch Leitung und Strahlung berücksichtigen. Wird diese, auf die Zeit- und Längeneinheit berechnet, mit H bezeichnet, so nimmt also die Bedingung des stationären Zustandes die Form an:

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda\,\frac{d\vartheta}{dx}\right) + \tau\, i\,\frac{d\vartheta}{dx} + w_q\, i^2 - H = 0. \tag{37}$$

An diese knüpft nun die specielle Berechnung der Messmethoden an, bei denen entweder der Unterschied beobachtet wird, der sich im stationären Wert der Temperatur an einer bestimmten Stelle bei Stromumkehr zeigt, oder aber der hierbei sich ergebende Unterschied in der Wärmeabgabe H nach aussen.[3])

Das allgemeinere Problem der stationären Temperatur- und Potentialverteilung in einem elektrisch geheizten Leiter

---

1) P. G. Tait, Proc. Roy. Soc. Edinb. **7.** p. 308. 1870/71.

2) A. Battelli, Atti d. R. Acc. di Torino **22.** p. 48. 369. 1886; Rend. d. R. Acc. dei Lincei (4) **3.** p. 105. 212. 1887.

3) Eine kritische Besprechung der verschiedenen Methoden giebt nach H. F. Weber's Ausführungen die Inaugural-Dissertation von A. Petersson, Ueber Messungen des Thomsoneffectes, Zürich 1895.

ist ja neuerdings mehrfach behandelt worden, seit F. Kohlrausch[1]) darauf eine Methode zur Bestimmung des Verhältnisses der thermischen und elektrischen Leitfähigkeit gegründet hat. Auf die Rechnungen von Voigt[2]) komme ich später noch bei einem Vergleich seiner Theorie mit der meinigen zurück, will hier nur noch kurz auf den Fall eingehen, dass man den Thomsoneffect *vernachlässigt*, wie das ursprünglich Kohlrausch that.

Wir hätten dann also $a = 0$ zu setzen und würden einfach haben:

$$i = -\frac{1}{w_q}\frac{d\varphi}{dx}, \qquad \sigma = -\frac{1}{w_s}\frac{d\vartheta}{dx};$$

die Energiegleichung liefert:

$$\vartheta\sigma + \varphi i = \text{const.}$$

also, da auch i constant gegen x:

$$\frac{\vartheta\sigma}{i} = c - \varphi$$

oder weiter.

$$\frac{\dfrac{\vartheta}{w_s}\dfrac{d\vartheta}{dx}}{\dfrac{1}{w_q}\dfrac{d\varphi}{dx}} = c - \varphi,$$

wenn man die Leitfähigkeiten $\lambda = \vartheta / w_s$ und $\varkappa = 1 / w_q$ einführt:

$$\frac{\lambda}{\varkappa}\frac{d\vartheta}{d\varphi} = c - \varphi,$$

mithin, wenn λ ebenso wie $\varkappa$ als nur mit ϑ veränderlich angesehen wird:

$$\int \frac{\lambda}{\varkappa} d\vartheta = c\varphi - \frac{\varphi^2}{2} + c',$$

eine sehr einfache Herleitung dieser von Kohlrausch gegebenen und benutzten Formel.

Die thermoelektromotorische Kraft.

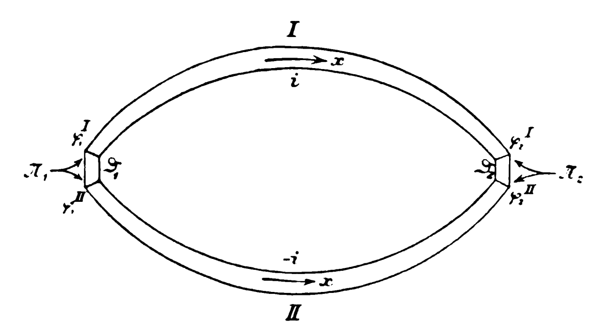
Wir kommen nun zur eigentlichen Thermoelektricität, wo es sich um die Vereinigung mehrerer chemisch verschiedener

1) F. Kohlrausch, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 711. 1899; Ann. d. Phys. (4) 1. p. 132. 1900.

2) W. Voigt, Gött. Nachr. p. 228. 1899.

Metalle handelt, berechnen zunächst die elektromotorische Kraft eines stationären Thermostromes.

Der Thermokreis sei gebildet aus zwei verschiedenen Metallen in Stab- oder Drahtform, d. h. nur linear durchströmt; an



ihren beiden Enden sind sie miteinander verbunden, und diese „Lötstellen" befinden sich dauernd auf den Temperaturen ϑ_1 bezw. ϑ_2; die Verbindung denken wir uns hergestellt durch metallische Querstücke irgend welcher Art, die in ihrer ganzen Ausdehnung sich auf der betreffenden Temperatur befinden und beliebig kurz angenommen werden mögen, damit ihr elektrischer Widerstand vernachlässigt werden kann; sie dienen auch dazu, den Ein- und Austritt von Wärmeströmen an den Enden der beiden Metalle zu vermitteln. In beiden Metallen rechnen wir die $+ x$-Richtung von der niedrigeren Temperatur ϑ_1 zur höheren ϑ_2, sodass durchweg $(d\vartheta/dx) > 0$; dasjenige Metall, in dem der elektrische Strom i in der Richtung wachsender x verläuft, bezeichnen wir als I; dementsprechend ist dann für das andere, II, die Stromstärke als $-i$ einzusetzen.[1])

Zur Berechnung dient uns die 2. Gleichung (31), die wir schreiben können:

$$\left(w_q - \frac{a^2}{w_s}\right) i = -\frac{dq}{dx} - \frac{a}{w_s}\frac{d\vartheta}{dx}. \tag{38}$$

Wenn wir sie über die ganze Länge eines Metalles integriren, tritt links dessen elektrischer Gesamtwiderstand auf, den wir zur Abkürzung mit w bezeichnen wollen:

$$w = \int \left(w_q - \frac{a^2}{w}\right) dx.$$

---

1) Es ist dann II im Vergleich zu I das „thermoelektrisch positive".

Unter Anwendung der eben festgesetzten Bezeichnungen erhalten wir also für die beiden Teile des Thermokreises die Formeln:

$$
(39)\quad \left|\begin{aligned}
w^{\mathrm{I}}\, i &= -(\varphi_2^{\mathrm{I}} - \varphi_1^{\mathrm{I}}) - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{I}} d\,\vartheta\,,\\
-\,w^{\mathrm{II}}\, i &= -(\varphi_2^{\mathrm{II}} - \varphi_1^{\mathrm{II}}) - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{II}} d\,\vartheta\,.
\end{aligned}\right.
$$

Subtraction der zweiten von der ersten Gleichung liefert:

$$
(40)\quad (w^{\mathrm{I}} + w^{\mathrm{II}})\, i = +(\varphi_2^{\mathrm{II}} - \varphi_1^{\mathrm{II}}) - (\varphi_2^{\mathrm{I}} - \varphi_1^{\mathrm{I}}) + \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left\{\left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{II}} - \left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{I}}\right\} d\,\vartheta\,.
$$

Wir erhalten also für die *elektromotorische Kraft des Thermostromes* den Wert (etwas anders geordnet):

$$
(41)\quad \Theta = (\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})_2 - (\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})_1 + \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left\{\left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{II}} - \left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{I}}\right\} d\,\vartheta\,.
$$

Wir lassen, indem wir so schreiben, die Möglichkeit offen, dass an den beiden Lötstellen *Sprünge des elektrischen Potentiales* bestehen: $\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}$, und für unsere ganze Entwickelung ist es nun von wesentlicher Bedeutung, ob diese Potentialsprünge an den beiden Lötstellen verschiedener Temperatur von verschiedener Grösse sind.

Um ganz klar zu sein, wollen wir es ausdrücklich als *Hypothese* bezeichnen, wenn wir annehmen, dass solche Verschiedenheit nicht besteht, dass also $(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})_2 = (\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})_1$. Wir werden im Folgenden sehen, dass wir dann zu Folgerungen kommen, die *im allgemeinen* als von der Erfahrung bestätigt angesehen werden.

Die elektromotorische Kraft des Thermostromes wird bei dieser Annahme dargestellt durch:

$$
(42)\quad \Theta = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left\{\left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{II}} - \left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{I}}\right\} d\,\vartheta\,.
$$

Nach früherem ist nun der Coefficient des Thomsoneffectes, wenn wir davon absehen, dass a/w_s auch wegen φ veränderlich ist, gegeben durch:

$$\tau = -\vartheta \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{a}{w_s}\right);$$

wir erhalten also, wenn τ^{II} und τ^{I} diese Grösse, berechnet für die beiden Metalle bei derselben Temperatur ϑ bedeuten:

$$(43)\qquad \tau^{\text{II}} - \tau^{\text{I}} = -\vartheta \frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2};$$

wir finden so auch auf unserem Wege diese bekannte Thomson'sche Relation, deren strenge quantitative Prüfung bisher freilich noch durch die Unsicherheit der gemessenen Grössen recht erschwert wird.[1])

Die Berechnung der elektromotorischen Kraft können wir auf Grund von (42) weiterführen, da die Grösse a/w_s in ihrer Abhängigkeit von ϑ uns ja bekannt ist[2]), denn es gilt nach früherem:

$$(35)\qquad \frac{a}{w_s} = \frac{a_\varphi}{\gamma_{\varphi,s}} + \frac{a_\vartheta}{\gamma_{\varphi,s}\cdot\varphi}\,\vartheta,$$

oder abgekürzt

$$(44)\qquad \frac{a}{w_s} = \alpha + \beta\,.\,\vartheta,$$

wo α und β Constanten des betreffenden Metalles. Danach ergiebt sich:

$$(45)\qquad \Theta = (\alpha^{\text{II}} - \alpha^{\text{I}})(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \tfrac{1}{2}(\beta^{\text{II}} - \beta^{\text{I}})(\vartheta_2^2 - \vartheta_1^2),$$

d. h. *die elektromotorische Kraft des Thermostromes als parabolische Function der Lötstellentemperaturen*, was ja mit den Ergebnissen der Erfahrung innerhalb ziemlich weiter Grenzen übereinstimmt.

Der Peltiereffect.

Während wir bisher den *elektrischen* Strom, der im Thermokreis fliesst, besprochen haben, wenden wir uns nun zur Besprechung des *Wärme*stromes, des thermischen Energiestromes, für den sich auf Grund der 1. Gleichung (30) ergiebt:

$$(46)\qquad \vartheta\,\sigma = -\frac{\vartheta}{w_s}\frac{d\vartheta}{dx} + \frac{a}{w_s}\,\vartheta\, i.$$

Wir suchen seinen Wert speciell für die Enden der beiden Metalle, die beiden Lötstellen. An der kälteren Löt-

1) Vgl. E. Riecke, Experimentalphysik 2. p. 325. 1896.

2) φ gilt darin wieder als constant.

stelle ϑ_1, von der aus die wachsenden x gerechnet werden. hat der *ein*tretende Wärmestrom für beide Metalle den Wert ($\vartheta / w_s = \lambda$ gesetzt):

$$(47)\quad \begin{cases} (\vartheta\,\sigma)_1^{\mathrm{I}} = -\left(\lambda\,\dfrac{d\,\vartheta}{d\,x}\right)_1^{\mathrm{I}} + \left(\dfrac{a}{w_s}\right)_1^{\mathrm{I}} \vartheta_1\, i\,. \\ (\vartheta\,\sigma)_1^{\mathrm{II}} = -\left(\lambda\,\dfrac{d\,\vartheta}{d\,x}\right)_1^{\mathrm{II}} - \left(\dfrac{a}{w_s}\right)_1^{\mathrm{II}} \vartheta_1\, i\,; \end{cases}$$

hier bedeutet der erste Teil die infolge blosser Wärmeleitung in das Metall eintretende (bez. hier austretende) Wärmemenge, während der zweite den an das Vorhandensein des Stromes gebundenen, von seiner Stärke abhängigen, mit ihm umkehrbaren, den eigentlichen Gegenstand der Messungen bildenden Teil des Wärmeaustausches der Lötstellen mit der Umgebung darstellt. Für diesen letzteren ergiebt sich also der Gesamtwert:

$$(48\text{a})\quad \Pi_1 = -\left\{\left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{II}} - \left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{I}}\right\}_1 \vartheta_1\, i\,.$$

Für die wärmere Lötstelle ϑ_2, wo die eintretende Wärme den wachsenden x *entgegen*fliesst, berechnet sich in gleicher Weise:

$$(48\text{b})\quad \Pi_2 = +\left\{\left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{II}} - \left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{I}}\right\}_2 \vartheta_2\, i\,.$$

Ein Vergleich mit (42) ergiebt also für die an der wärmeren Lötstelle vom Thermostrom aufgenommene bez. die an der kälteren abgegebene Wärmemenge

$$(49)\quad \Pi = i\,\vartheta_n \left(\frac{d\,\Theta}{d\,\vartheta}\right)_{\vartheta_n},$$

wo

$$n = 2 \text{ bez. } 1\,;$$

wir finden die bekannte Thomson-Clausius'sche Relation. Man überzeugt sich leicht, dass für deren Herleitung wesentlich nötig ist unsere Annahme über die Mitführungsfactoren: $a_q = a_s$. Denn ursprünglich tritt im Ausdruck für Π auf das a_q (vgl. 1. Gleichung (20)), in dem für Θ aber a_s (vgl. 2. Gleichung (24)). Es bestätigt sich dadurch, was wir oben erwähnten (p. 772), dass uns die Einführung dieser Annahme in die Strömungsgleichungen dient an Stelle der hypothetischen Erweiterung des zweiten Hauptsatzes.

Aus den Formeln (48) ergiebt sich allgemein für diejenige Wärme, die *entwickelt* wird da, wo der Strom i vom Metall I zum Metall II fliesst, für die „Peltierwärme", der Ausdruck:

$$- i \vartheta \left\{ \left(\frac{a}{w_s} \right)^{II} - \left(\frac{a}{w_s} \right)^{I} \right\}.$$

Für die *in* einem der Metalle entwickelte Thomsonwärme fanden wir oben in Gleichung (33):

$$- i \vartheta \frac{d}{d x} \left(\frac{a}{w_s} \right).$$

Wir erkennen daran die *vollkommene Analogie*: maasgebend für diese „Wärmeentwickelungen" ist in jedem Fall die örtliche Zunahme der Grösse a / w_s in Richtung des Stromes.

Führen wir noch a / w_s, als Function von ϑ dargestellt, durch (44) ein, so finden wir für die auf den Strom 1 berechnete Peltierwärme:

$$(50) \qquad P = - (\alpha^{II} - \alpha^{I}) \vartheta - (\beta^{II} - \beta^{I}) \vartheta^2,$$

eine Formel, die namentlich durch die Messungen von Battelli [1]) ihre Bestätigung gefunden hat.

Vergleich mit den früheren Theorien.

Wollen wir nun einen kurzen Vergleich anstellen zwischen der hier entwickelten Theorie der Thermoelektricität und den bisher schon vorliegenden, so werden wir insbesondere die Gruppe der „Mitführungstheorien" ins Auge fassen, denn als zu diesen gehörig kennzeichnet sich unsere Theorie unmittelbar.

Das Verhältnis der älteren thermodynamischen Contactpotentialtheorien von Clausius, Thomson, Budde speciell zur Kohlrausch'schen Mitführungstheorie ist seinerzeit schon von Budde [2]) näher beleuchtet worden, der da zeigte, wie diese auf den ersten Blick so verschiedenartigen Anschauungen in ihren wesentlichen Folgerungen übereinstimmen. Zur einfachen Darstellung der Contactpotentialtheorie benutzt Budde eine Grösse α (oder für ein anderes Metall β und dergleichen), die vollkommen die Stelle der von uns benutzten Grösse a / w_s vertritt, wie man direct an den für die Peltier- und Thomson-

1) A. Battelli, Rend. d. Acad. d. Lincei (4a) 5. p. 631. 1889. Deutsch in: Physik. Revue 2. p. 546 u. 713. 1892.

2) E. Budde, Wied. Ann. 21. p. 277. 1884; 25. p. 564. 1885.

wärme gegebenen Ausdrücken (Gleichung (13) und (14) bei Budde) erkennt.[1])

Die Annahmen, die der Kohlrausch'schen Theorie zu Grunde liegen, schreiben sich in unserer Bezeichnungsweise folgendermaassen (s. oben p. 768): Mitführung eines elektrischen Stromes durch einen Strom thermischer Energie (Wärmestrom):

$$i = \frac{a}{\vartheta\, w_q} \cdot \vartheta\sigma ,$$

Mitführung eines Wärmestromes durch einen elektrischen:

$$\vartheta\sigma = \frac{a\,\vartheta}{w_s} \cdot i ;$$

man sieht dann leicht, dass die von Kohlrausch mit ϑ bezeichnete Grösse (ebenso wie Budde's α) identisch ist mit unserem a/w_s, und ferner, dass Kohlrausch's C gleich der absoluten Temperatur gesetzt werden muss, wie das schon Budde hervorhob. Auch Riecke[2]) formulirt in der Entwickelung seiner molecular-kinetischen Mitführungstheorie die notwendige Beziehung zwischen den beiden Factoren der gegenseitigen Mitführung von i und $\vartheta\sigma$ in der Weise, wie es unserem Ansatz entspricht. Voigt's thermodynamische Theorie kommt schliesslich gleichfalls darauf hinaus, dass man die thermoelektrischen Erscheinungen sehr einfach darstellen kann, wenn man von einer Mitführung redet. Unser a/w_s findet sich bei Voigt wieder in der Grösse $-d\Theta/dT$. Die Gleichung, auf Grund deren er den stationären Zustand eines von Wärme und Elektricität durchflossenen Leiters behandelt[3]), lautet in unserer Schreibweise:

$$-\frac{\vartheta}{w_s}\frac{d\vartheta}{dx} + i\left(\frac{a}{w_s}\,\vartheta + \varphi\right) = \text{const},$$

wie sie sich leicht aus der Energiegleichung und der einen Strömungsgleichung ergiebt.

Mit den Mitführungstheorien in formaler Hinsicht verwandt ist die schon erwähnte Theorie von Carl Neumann, wenn sie auch von Haus aus auf anderen Grundlagen beruht. Während die Mitführungstheorien alle darin ihren Ausdruck finden,

1) a/w_s wäre also als Function von ϑ ins „thermoelektrische Diagramm" einzutragen.

2) l. c. p. 380.

3) W. Voigt, Gött. Nachr. p. 228. 1899 (s. Gleichung (19), p. 234).

dass sowohl der elektrische als der Wärme- (bei uns zunächst der Entropie-) Strom als lineare, homogene Functionen des Potentialgefälles *und* des Temperaturgefälles dargestellt werden, formulirt Neumann den Ausdruck für den elektrischen Strom[1]) so, dass an Stelle des Temperaturgefälles das eines „isotropen Druckes" P tritt, der seinerseits mit der absoluten Temperatur und der „Dichte δ des elektrischen Fluidums" verknüpft ist durch eine dem Boyle-Gay-Lussac'schen Gesetz ganz analoge Formel. Danach hängt schliesslich die Grösse der elektromotorischen Kraft des Thermokreises davon ab, wie jene Dichte δ sich ändert von einem Metall zum andern und innerhalb eines solchen mit der Temperatur. Vergleicht man Neumann's Endformel mit der unsrigen, so erkennt man leicht, dass an Stelle unseres a/w_s dort die Grösse steht:

$$\mathfrak{R} \,.\, {}^e\!\log \frac{1}{\delta}\,,$$

wo $\mathfrak{R}$ eine unbekannte, universelle Constante. Auf Grund der Annahme, dass die Aenderung von δ mit der Temperatur proportional ist der der materiellen Dichte des betreffenden Metalles, ergiebt sich, dass die von uns in (44) und (45) mit β bezeichnete Constante proportional dem thermischen Ausdehnungscoefficienten ist. Daraus folgt weiter, dass wenn von zwei Metallen das in der Nähe von 0° C. im Vergleich zum anderen elektropositive den *kleineren* Ausdehnungscoefficienten hat, dann der „neutrale Temperaturpunkt" der Combination über 0° liegen muss, eine Folgerung, die Neumann in 28 von 31 untersuchten Fällen bestätigt fand.

Von der Liebenow'schen Theorie, deren Kritik durch Voigt[2]) wir schon erwähnten, bleibt, da ihre Schlussweise so sehr anfechtbar, nur ihr Endresultat bestehen, das ja in einzelnen Fällen mit der Erfahrung übereinstimmt: danach wäre unser a/w_s gleich der positiven *oder* negativen Quadratwurzel aus dem thermischen Leitvermögen dividirt durch das elektrische und die absolute Temperatur.

Nach Bucherer's Theorie endlich hätte diese Grösse die Bedeutung:

$$\frac{R}{n}\left(1 - \vartheta\,\frac{d\,{}^e\!\log p}{d\,\vartheta}\right),$$

1) Die thermischen Erscheinungen behandelt er nicht.
2) W. Voigt, Wied. Ann. **69.** p. 706. 1899.

wo R die universelle Gasconstante, n die Anzahl der in einem Grammmolecül enthaltenen „elektrothermischen Aequivalente" des Metalles, endlich p dessen Dampfspannung bei der Temperatur ϑ.

Vergleichen wir nun das *Ergebnis* unserer Entwickelungen mit dem der sonstigen Theorien, so finden wir: Gegenüber den Theorien, die — mögen sie nun Contactpotentiale oder Mitführung annehmen — nur den Zusammenhang der verschiedenen thermoelektrischen Grössen untereinander behandeln, hat die unsrige den Vorteil, dass sie über die Abhängigkeit dieser Grössen von der Temperatur ohne ad hoc eingeführte Annahmen bestimmte Aussagen macht, die von der Erfahrung bestätigt werden. [Gleichungen (36), (45), (50).] Die maassgebende Grösse a/w_s tritt eben als ***bekannte*** Function von ϑ auf. Eine *Berechnung* der thermoelektrischen Grössen aus anderweit bekannten ***liefert sie aber freilich bisher nicht.*** In dieser Beziehung ist das Problem zurückgeführt auf die Frage, ob und wie sich etwa a durch w_s (bez. das thermische Leitvermögen) und andere bekannte Eigenschaften des betreffenden Stoffes ausdrücken lässt. Erinnert man sich der durch Gleichung (29) gegebenen Bedeutung von a, so erkennt man, dass es sich im wesentlichen darum handelt: Stehen in den Zustandsgleichungen, die wir durch Einführung von (26) schreiben können:

$$(51)\quad \begin{cases} c_\vartheta \dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} = \dfrac{\partial s}{\partial t} - c_\vartheta r_{\varphi s} \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \gamma_{\varphi, s} c_\vartheta r_{\varphi s} \sigma^2 \\ \qquad\qquad - \varrho_\vartheta \sigma i + \gamma_{\vartheta, q} i^2, \\ c_\varphi \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = \dfrac{\partial q}{\partial t} - c_\varphi r_{\varphi s} \dfrac{\partial s}{\partial t} - \gamma_{\vartheta, q} c_\varphi r_{\varphi s} i^2 \\ \qquad\qquad - \varrho_\varphi \sigma i + \gamma_{\varphi, s} \sigma^2, \end{cases}$$

die Constanten ϱ in einer principiell gegebenen Beziehung zu den übrigen Constanten? Von diesen dürften am ersten die γ in Betracht kommen; dann würde wohl a/w_s sich durch die Leitvermögen ausdrücken, ähnlich vielleicht der Liebenow'schen Relation. Der erstrebenswerte Fortschritt ist also gerade von einer *Vereinfachung* unserer Grundlagen zu erwarten.

Die Wärmeleitung.

Wir kommen nun zur Besprechung einer Frage, die uns oben gelegentlich entgegentrat, deren nähere Erörterung wir aber verschoben. Wir fanden, als wir die Energiegleichung für den stationären Zustand eines von Wärme und Elektricität durchströmten Leiters aufstellten (p. 772), dass die Stelle des sogenannten thermischen Leitvermögens λ in unserer Entwickelung eingenommen wurde von der Grösse ϑ / w_s. Benutzen wir den für w_s gegebenen Ausdruck (27), so hätten wir also:

$$\lambda = \frac{\vartheta}{\gamma_{q,s} \cdot \varphi},$$

d. h. es müsste das thermische Leitvermögen eines Metalles proportional der absoluten Temperatur sein. Das trifft nun bekanntlich keineswegs zu. Der Temperaturcoefficient des Leitvermögens[1]) ist wesentlich geringer als 0,00367, für die verschiedenen Metalle verschieden, sogar dem Vorzeichen nach. übrigens keineswegs allzu sicher bisher bestimmt.

Wie dieser Widerspruch zu beseitigen ist, das kann man leicht finden an der Hand meiner früheren Ausführungen. Wir setzen, wenn wir die Zustandsgleichungen in der von uns gegebenen Form benutzen, voraus, dass der Zustand des betrachteten Metalles jederzeit durch die von uns eingeführten Variabelen vollkommen bestimmt sei (und durch die Art und Weise, wie wir diese miteinander verknüpft haben). Ist das nicht der Fall, so müssen wir gewärtig sein, gelegentlich auf mehr oder weniger merkliche Widersprüche zwischen Theorie und Erfahrung zu stossen. Wenn wir nun, wie hier geschehen. einem Metall nur thermische und elektrische Eigenschaften zuschreiben, so genügt das offenbar nicht.

Wir müssen neben diesen beiden Zustandsseiten sicherlich mindestens noch eine, dritte, berücksichtigen, die der *Cohäsion* des Metalles, und zwar müssen wir für sie, wie für jede andere, *zwei* Zustandsvariable einführen, eine Cohäsionsintensität und eine Cohäsionsquantität. Bei meiner Behandlung der Gesetze der Widerstandsgrössen und der specifischen Wärmen[2]) habe ich das früher schon gethan, habe gezeigt, wie wir die neue

1) Vgl. z. B. die neuesten Messungen von W. Jäger u. H. Diesselhorst, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 719. 1899.

2) O. Wiedeburg, Wied. Ann. **62**. p. 652. 1897; **64**. p. 519. 1898.

Intensitätsvariable als ein Maass des veränderlichen „Härtegrades“ des Metalles ansehen können, indem dann unsere so erweiterten Zustandsgleichungen gewisse Erfahrungen über die Härte wiedergeben. Das Nähere anlangend kann ich auf meine damaligen Darlegungen verweisen.

Für jetzt möchte ich davon absehen, das Problem der Thermoelektricität in seiner durch Berücksichtigung der Cohäsion erweiterten Form zu behandeln, mich vielmehr damit begnügen, zu zeigen, welchen Einfluss die Cohäsion auch schon auf die Erscheinungen der „blossen Wärmeleitung“ ausübt, wo also von elektrischen Strömen keine Rede ist.

Wenn ein Teil eines von Wärme durchströmten Metalles eben infolge der Wärmeleitung seine Temperatur ändert, so ist damit sicherlich auch eine Aenderung seines Cohäsionszustandes verbunden — vom moleculartheoretischen Standpunkt aus wird man sagen: eine Aenderung der Molecularkräfte, eine Lockerung oder Festigung des Verbandes der Molecüle untereinander. Mit einer örtlichen Verschiedenheit der Temperatur wird im allgemeinen eine örtliche Verschiedenheit des Härtegrades Hand in Hand gehen. Wir nehmen weiter, ganz analog wie bei den anderen Zustandsseiten, an, dass eine Differenz des Härtegrades in benachbarten Volumenelementen sich auszugleichen strebt, es wird ein Uebergang der Cohäsionsquantität erfolgen, wir werden von einem *Cohäsionsstrom* reden können und von einem Widerstand des Metalles gegen einen solchen, der vielleicht sehr gross ist.

Den Zusammenhang, in dem die Aenderungen der Cohäsion mit denen des thermischen Zustandes stehen, formuliren wir nun nach unseren allgemeinen Grundsätzen, genau in derselben Weise, wie wir es oben für die thermisch-elektrischen Vorgänge gethan haben. Wir ersetzen also in den Zustandsgleichungen (9) die Variabeln φ, q, i durch den Härtegrad J, die Cohäsionsquantität, berechnet für die Volumeneinheit m, und den Cohäsionsstrom μ, ebenso die Constanten durch die entsprechenden neuen, und schliessen im übrigen, wie damals.

Die Gleichung, die uns hier nun besonders interessirt, ist die Energiegleichung:

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{\partial (\vartheta \sigma + J \mu)}{\partial x}; \tag{52}$$

für die beiden Ströme gelten, analog zu (31), die Gleichungen:

$$(53)\quad \begin{cases} (w_m w_s - b^2)\sigma = -w_m \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - b\frac{\partial J}{\partial x}, \\ (w_m w_s - b^2)\mu = -w_s \frac{\partial J}{\partial x} - b\frac{\partial \vartheta}{\partial x}; \end{cases}$$

wenn wir also $\vartheta\sigma + J\mu = \varepsilon$ setzen, so ist:

$$(54)\quad \varepsilon = -\frac{(w_m \vartheta + bJ)\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + (w_s J + b\vartheta)\frac{\partial J}{\partial x}}{w_s w_m - b^2}.$$

Die Energiegleichung, die die betrachteten Vorgänge unter dem allgemeinsten Gesichtspunkt beschreibt, würde dann lauten:

$$(55)\quad \frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial x};$$

in praxi beschreiben wir aber solche Vorgänge der sog. blossen Wärmeleitung, indem wir nach Fourier die Gleichung ansetzen:

$$(56)\quad c\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right),$$

wo c die „specifische Wärme der Volumeneinheit“ und λ das „thermische Leitvermögen“; wir berücksichtigen eben nur die zeitliche und örtliche Aenderung der *einen* Variabeln, der Temperatur. Ich habe früher schon näher ausgeführt, wie überhaupt die Definition der specifischen Wärme C eines Körpers der Gleichung entspricht

$$dE = C\,d\vartheta,$$

indem wir aus dem zeitlichen Differential der Gesamtenergie E bei solchen Vorgängen eines „blossen Wärmeüberganges“ das der Temperatur ϑ herausheben, weil $d\vartheta$ die beobachtete Grösse ist. Ganz analog kommt die Gestaltung der *rechten* Seite von Gleichung (56) zu stande; auch hier handelt es sich eigentlich nicht um eine rein thermische Grösse, den Wärmestrom, sondern um den Gesamtenergiestrom, wir betrachten aber für diesen das Temperaturgefälle als die wesentliche treibende Ursache und stellen ihn als diesem proportional dar, zwingen dem betrachteten Vorgang bei seiner Berechnung eine Form der Differentialgleichung auf, die wir auf Grund einer *einseitigen* Anschauung für die richtige halten. So ist denn nach unserer *allgemeineren* Auffassung die Definition der als thermisches Leitvermögen gemessenen Grösse gegeben durch:

$$\varepsilon = -\lambda\frac{\partial \vartheta}{\partial x}.$$

d. h. es hat das Leitvermögen, durch die in den Strömungsgleichungen (53) vorkommenden Grössen ausgedrückt, die Bedeutung:[1])

$$\lambda = \frac{w_m \vartheta + b J + (w_s J + b \vartheta) n}{w_s w_m - b^2}, \tag{57}$$

wo

$$n = \frac{\partial J}{\partial x} \Big/ \frac{\partial \vartheta}{\partial x}$$

das Verhältnis der beiden gleichzeitig am selben Orte bestehenden Gefälle.

Nun ändern sich alle diese Grössen — einzig w_s ausgenommen — mit ϑ; die Abhängigkeit des Leitvermögens von der Temperatur ist also eine ziemlich complicirte und würde erst dann näher zu überblicken sein, wenn man über das quantitative Verhältnis der einzelnen Grössen zu einander bestimmtes wüsste. Dazu gehört natürlich, dass der von mir in dieser Weise gemachte Versuch, die Cohäsionseigenschaften nach dem Schema der Energetik zu formuliren und in Rechnung zu ziehen, weiter durchgeführt und insbesonde die charakteristische Variable J der *Messung* in wohldefinirtem Maasse zugänglich gemacht wird. Vermutlich tritt hier der Mitführungsfactor b im Vergleich zu den Widerstandsgrössen mehr hervor, als dies mit dem Factor a auf thermisch-elektrischem Gebiete der Fall ist.

Noch auf einen Punkt möchte ich hinweisen: Nach unserer Auffassung hat an die Stelle des „Wärmestromes“, von dem man bei Herleitung der Fourier'schen Differentialgleichung redet, der Gesamtenergiestrom zu treten. Nun habe ich oben schon hervorgehoben, dass in unseren Ausgangsgleichungen ebenso wie die Inductions-, so auch die *Strahlungsvorgänge* nicht berücksichtigt sind; es wird auch durch letztere — nach anderen Gesetzen als bei der Leitung — Energie fortgepflanzt von Ort zu Ort, die durch ihre Absorption den Zustand der durchwanderten Raumteile, insbesondere auch die örtliche Temperaturverteilung in dem betrachteten Körper, beeinflusst. Dann müssen wir schliessen, dass auch diese Vorgänge durch

1) Meine früheren Bemerkungen (Wied. Ann. **62.** p. 652. 1897) über das Wärmeleitvermögen sind nach dem hier Ausgeführten zu berichtigen; die vollkommene Analogie in der Definition der specifischen Wärme und des Wärmeleitvermögens war von mir damals noch nicht bemerkt.

ihre charakteristischen Constanten von Einfluss sind auf die Bedeutung und Grösse des Begriffes, den wir als Mittel zur kurzen Darstellung solcher Erscheinungen unter dem Namen Wärmeleitvermögen benutzen.

Berücksichtigt man alle diese Punkte, die die Bedeutung des thermischen Leitvermögens als eine so complicirte erscheinen lassen, so wird man sich nicht wundern, dass die so einfache Gesetzmässigkeit, die von Wiedemann und Franz hinsichtlich des Verhältnisses von thermischem und elektrischem Leitvermögen aufgestellt wurde, sich nicht in aller Strenge halten lässt. Von einer *Constanz dieses Verhältnisses* auch nur für alle reinen Metalle ist jedenfalls keine Rede.[1]) Eigentlich sind auch diese beiden Leitvermögen gar nicht direct miteinander vergleichbar, denn während das thermische sich darstellt als Quotient einer *Energie*grösse (pro Zeit- und Flächeneinheit), dividirt durch ein Intensitätsgefälle, erscheint das elektrische als eine *Quantitäts*grösse, dividirt durch ein solches Gefälle. Indes ein bestimmtes und jedenfalls wichtiges Gesetz wird durch die annähernde Proportionalität der beiden Leitvermögen unzweifelhaft *angedeutet.*[2]) Es dürfte eine Beziehung zwischen zwei (oder mehreren) in diesen Grössen enthaltenen *Constanten* sein; vermutlich stehen, wie ich früher schon bemerkte, die beiden Constanten $\gamma_{\vartheta, q}$ und $\gamma_{\varphi, s}$, die für die nicht-umkehrbaren Wechselwirkungen der beiden Zustandsseiten maassgebend sind, in einem von der Natur des Metalles unabhängigen Verhältnis.

Es wird die nächste Aufgabe sein, die Erscheinungen der Thermoelektricität allgemeiner, mit Rücksicht auf die Cohäsionseigenschaften der Metalle, nach den von uns hier aufgestellten und befolgten Grundsätzen zu behandeln.

Bekannt ist ja, welch' wesentlichen Einfluss diese Eigenschaften auf die thermoelektrischen Erscheinungen haben; erst nach ihrer Einbeziehung in die Theorie wird man hoffen können, ein Bild der Thermoelektricität zu gewinnen, das

1) Vergl. die neuen Bestimmungen von W. Jäger u. H. Diesselhorst, l. c.

2) Vergl. dazu den von mir nachgewiesenen Parallelismus zwischen elektrischem Widerstand und *Strahlungsvermögen* bei reinen Metallen, Wied. Ann. **66.** p. 92. 1898.

einen *genaueren* Vergleich mit dem Inhalt unserer Erfahrung verträgt. Die von uns im Vorstehenden als Folgerungen erhaltenen einfachen Gesetze werden dann natürlich gewisse Abänderungen erfahren, wie sie denn auch mit der Erfahrung nur *angenähert* übereinstimmen.

Zusammenfassung.

Es wurde die früher gegebene Darstellung nicht-umkehrbarer Vorgänge verallgemeinert, derart, dass sie auf einen physikalisch *in*homogenen Körper Anwendung finden kann, z. B. auf ein Metall, das infolge örtlicher Temperatur- und Potentialunterschiede von Wärme und Elektricität durchströmt wird.

Zugleich wird die Theorie principiell erweitert, sodass sie bei solchen Strömungen neben der eigentlichen Leitung die „Mitführung“ berücksichtigt.

Hinsichtlich dieser Mitführung wird eine quantitativ bestimmte Reciprocität formulirt in einer Gleichheit der beiden „Mitführungsvermögen“, eine Annahme, die für die Theorie diejenigen Dienste leistet, derentwegen man sonst den zweiten Hauptsatz in eigenartiger Weise benutzt.

Auf diesen Grundlagen ergiebt sich der elektrische Widerstand und der Coefficient des Thomsoneffectes proportional zur absoluten Temperatur in Uebereinstimmung mit der Erfahrung.

Für den Zusammenhang zwischen Thomsoneffect, Peltiereffect und thermoelektromotorischer Kraft ergeben sich die bekannten Relationen unter der Annahme, dass die Potentialsprünge an den beiden Lötstellen von gleicher Grösse sind. (Standpunkt der *reinen* Mitführungstheorie.)

Endlich wird gezeigt, dass der Vorgang der sog. blossen Wärmeleitung nicht als rein thermischer anzusehen und zu formuliren ist, insofern mit Aenderungen des thermischen auch solche des Cohäsionszustandes untrennbar verbunden sind; die Bedeutung der als Wärmeleitvermögen bezeichneten Grösse ist danach eine weniger einfache, wodurch sich auch die Schwierigkeit erklärt, strenge Gesetzmässigkeiten hinsichtlich dieser Grösse und ihres Verhältnisses zum elektrischen Leitvermögen aufzustellen.

Leipzig, 23. März 1900.

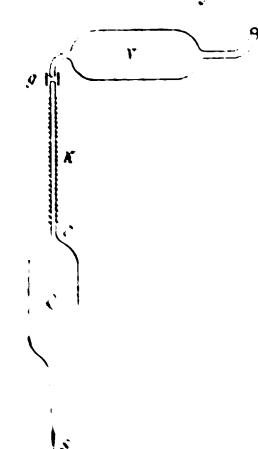
(Eingegangen 24. März 1900.)

12. *Bestimmung der Volumenänderung von Rubidium beim Schmelzen; von Moritz Eckardt.*

Durch eine vom Verfasser aufgefundene Darstellungsmethode[1]) von Rubidium und Cäsium war derselbe in die Lage versetzt, mit grösseren Mengen dieser Stoffe eine Bestimmung der Volumenänderung dieser Elemente vorzunehmen.

Die hierbei angewendete Methode der Bestimmung schliesst sich der von M. Toepler[2]) angewandten an.

Eine Hauptschwierigkeit des Arbeitens mit Rubidium ist seine leichte Oxydirbarkeit, und wurde aus diesem Grunde nachfolgende Arbeitsmethode benutzt. Das verwendete Dilatometer nebst dem mit ihm durch Gummischlauch (g) verbundenem Vorlagegefäss (r) ist aus beistehender Figur ersichtlich. Seine Handhabung geschah in folgender Weise. Zunächst wurde durch die offene feine Spitze (S) Paraffinöl (vom spec. Gewicht 0,872) bis zum Capillaransatze (c) eingesogen und hierauf das absolute Gewicht dieses completten Apparates bestimmt. Sodann wurde das zu verwendende Rubidium auf ca. 50° C. erwärmt und durch die Spitzenöffnung (S) in geschmolzenem Zustande in den Apparat bis zum Capillaransatze (c) eingesogen. Hierbei tritt das bisher in Q befindliche Paraffinöl quantitativ in die Vorlage (r). Die Spitze (S) der unteren Capillare wurde im Gebläse zugeschmolzen. Die Gewichtszunahme, welche das Dilatometer erlitt, ist offenbar gleich dem absoluten Gewichte des in den Apparat eingetretenen Rubidiums.



1) Vgl. Zeitschr. f. anorgan. Chem. 22. p. 158. 1899.

2) Vgl. M. Toepler, Wied. Ann. 53. p. [illegible]; daselbst findet sich der Volumensprung beim Schmelzen angegeben zu 0,014; dieser mit [illegible] g Rb gefundene Wert ist, wie meine Bestimmungen zeigen, etwas zu klein.

Nach Entfernung des Vorlagegefässes brachte ich das Dilatometer, um möglichst vollkommenen Wärmeausgleich zu erzielen, mitsamt dem Gefässe eines Thermometers in ein kleines Quecksilberbad und dieses wiederum in ein grösseres Paraffinbad. Durch zweckmässige Rührvorrichtung konnte die Temperatur des Gesamtbades möglichst gleichmässig gehalten werden.

Zur Bestimmung des Volumensprunges beim Schmelzen (in cm^3 pro Gramm) wurden die im Folgenden mitgeteilten Beobachtungsreihen ausgeführt.

Die angewendete Menge Rubidium betrug in beiden Fällen 5,4547 g (unter Berücksichtigung des Luftauftriebes bei der Wägung).

Die Schmelztemperatur bestimmte sich zu 37,80°.

Die Tabelle giebt den Stand des Paraffinmeniscus in dem mit Teilung versehenen Steigrohre (K) in der Figur an; ein Teilstrich (mm) entsprach einem Volumen von 0,0227 cm^3.

I. Reihe			II. Reihe		
Temperatur	Rohrmeniscus		Temperatur	Rohrmeniscus	
0°	14,20	fest	18,5°	13,30	fest
8,7	13,83	fest	28,7	12,80	fest
14,5	13,57	fest	33,3	12,59	fest
31,4	13,79	fest	35,8	12,30	fest
34,9	12,61	fest	36,0	12,29	fest
39,2	8,40	flüssig	36,8	11,90	fest
43,9	8,19	flüssig	37,0	11,50	fest
59,5	7,32	flüssig	41,4	8,26	flüssig
58,0	7,41	flüssig	70,9	6,71	flüssig
41,1	8,30	flüssig	86,5	5,90	flüssig
34,0	12,65	fest	87,1	5,85	flüssig
21,7	13,17	fest	93,5	5,51	flüssig
43,0	8,21	flüssig	95,1	5,40	flüssig
50,4	7,80	flüssig	98,0	5,30	flüssig
			100,0	5,20	flüssig

Durch graphische Interpolation findet man ein Ansteigen des Meniscus beim Schmelzen um 39,8 Scalenteile. Hieraus berechnet sich die Volumenzunahme (K_λ) zu

0,01657 cm^3 für 1 Gramm Rb.

Für Cäsium wurde die Volumenänderung in anderer Weise festgestellt. Der Vollständigkeit halber sei schon hier der (gelegentlich einer vom Verfasser mit Hrn. E. Graefe ausgeführten Untersuchung festgestellte) Wert für den Volumensprung mitgeteilt.

Es ergab sich K_λ zu

$$0{,}01393 \text{ cm}^3 \text{ für } 1 \text{ g Cs.}$$

Festes Cäsium von Schmelztemperatur (specifisches Gewicht $= 1{,}886$) dehnt sich demnach um 2,627 Proc. seines Volumens aus.

Es sei auch an dieser Stelle noch Hrn. Dr. M. Toepler für gütigen Rat und Unterstützung auf das Verbindlichste gedankt.

Dresden, Physikal. Institut der K. S. Techn. Hochschule, im Februar 1900.

(Eingegangen 22. Februar 1900.)

Druck von Metzger & Wittig, Leipzig.

1900. № 1.

LEHRBUCH

DER

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 1. HEFT 1.

DER GANZEN REIHE 306. BANDES 1. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.



LEIPZIG, 1900.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

Für Cäsium wurde die Volumenänderung in anderer Wei festgestellt. Der Vollständigkeit halber sei schon hier d (gelegentlich einer vom Verfasser mit Hrn. E. Graefe au geführten Untersuchung festgestellte) Wert für den Volum sprung mitgeteilt.

Es ergab sich K_λ zu

$$0{,}01393 \text{ cm}^3 \text{ für } 1 \text{ g Cs.}$$

Festes Cäsium von Schmelztemperatur (specifisches G wicht = 1,886) dehnt sich demnach um 2,627 Proc. sei

ken von Metallen in Quecksilber

6. F. Kohlrausch. Ueber den stationären Temperaturzustand eines elektrisch geheizten Leiters 132
7. A. Orgler. Zur Kenntnis des Funkenpotentiales in Gasen . 159
8. J. Koenigsberger. Ueber neuere Untersuchungen der magnetischen Susceptibilität 175
9. O. Liebknecht und A. P. Wills. Moleculare Susceptibilität paramagnetischer Salze der Eisengruppe 178
10. H. du Bois und O. Liebknecht. Moleculare Susceptibilität paramagnetischer Salze seltener Erden 189
11. H. du Bois. Halbring-Elektromagnet 199
12. Lizzie R. Laird. Ueber den zeitlichen Verlauf der magnetischen Nachwirkung in Eisenscheiben 207
13. E. Yamaguchi. Zur Kenntnis des thermomagnetischen Transversaleffectes im Wismut 214

Manuscripte sind an die Adresse des Herausgebers, **Professor Dr. P. Drude, Leipzig, Marschnerstrasse 3,** zu senden.

Es wird gebeten, die Manuscripte **druckfertig** einzuliefern und in den Correcturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuscript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuscriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Citate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuscriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muss dies bei Rücksendung des ersten Correcturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Die wissenschaftlichen Vorzüge dieses reich ausgestatteten Lehrbuchs sind von der Kritik einstimmig anerkannt worden. Dasselbe hat sich die Aufgabe gestellt, einerseits die physikalischen Lehren in weiteren Kreisen bekannt zu machen, andererseits denjenigen, welche tiefer in das Gebiet des physikalischen Wissens eindringen wollen, als Vorschule zu dienen; es hat aber, ohne den ersten Zweck aufser acht zu lassen, die zweite, wissenschaftliche Aufgabe mehr ins Auge gefafst, als dies von den verbreitetsten Lehrbüchern der Physik bis jetzt geschehen ist.

Die vorliegende, wesentlich vermehrte, vielfach umgearbeitete und verbesserte 5. Auflage der Experimentalphysik hat die gleiche Haltung wie die früheren Auflagen; das Buch soll unter dem steten Hinweise auf die Originalarbeiten eine Übersicht geben über den augenblicklichen Stand der experimentellen Physik und über die theoretischen Auffassungen, zu denen die Physik zur Zeit gelangt ist.

Der Schwerpunkt des Werkes liegt hiernach in den Experimentaluntersuchungen, und deshalb sind alle wichtigeren neueren Untersuchungen, die bis zur Bearbeitung des betreffenden Bandes erschienen waren, aufgenommen; wo es wünschenswert erschien, wurde auch auf ältere Arbeiten zurückgegriffen. Die Erweiterung des experimentellen Materials verlangte auch ein tieferes Eingehen in die Theorien; dieselben sind so weit dargelegt, wie es ohne zu ausgedehnte Rechnungen möglich war. Das neu zu behandelnde Material war ein recht ausgedehntes, daher auch der ziemlich erheblich gewachsene Umfang des Buches.

Aufser einer ganzen Menge von Spezialuntersuchungen auf allen Gebieten der Physik, welche den Ausbau in den Einzelnheiten bewirkt haben, sind es zwei, eigentlich ganz neue Gebiete, welche jetzt in die Physik aufgenommen werden mufsten. Das erste ist die auf dem Grenzgebiete der Physik und Chemie liegende Physik der Lösungen, welche von Van t'Hoffs kinetischer Theorie der Flüssigkeiten und der zuerst von Clausius ausgesprochenen, von Arrhenius durchgeführten Theorie der Dissociation der Lösungen ihren Ausgangspunkt nimmt. Die Gesetze der Osmose, der Diffusion, der Gefrierpunktserniedrigung, der Verminderung der Dampfspannung durch gelöste Salze, die Vervollständigung der von F. Kohlrausch gegebenen Theorie der elektrolytischen Leitung, die Beziehung zwischen Diffusion und Leitung, die Nernstsche Theorie der elektromotorischen Kräfte u. a. m. sind in den letzten Jahren als Früchte auf dem Boden dieser Theorie erwachsen.

Unmittelbar nach Abschlufs der vorigen Auflage begannen die klassischen Versuche von Hertz über die elektrischen Schwingungen, welche bis dahin nur in der Theorie von Maxwell vorausgesehen waren. Die Darlegung dieser Untersuchung verlangte ein neues Kapitel, nachdem die Maxwellschen Gleichungen des magnetischen Feldes in dem den Elektromagnetismus behandelnden Kapitel abgeleitet waren.

Die aus den Maxwellschen Gleichungen sich ergebende elektromagnetische Lichttheorie hatte zur Folge, dafs in der neuen Auflage die Lehre von der Strahlung, welche früher den zweiten Band bildete, in den vierten verlegt wurde. In demselben ist die elektromagnetische Lichttheorie neben der elastischen durchgeführt worden.

Die wissenschaftlichen Vorzüge dieses reich ausgestatteten Lehrbuchs sind von der Kritik einstimmig anerkannt worden. Dasselbe hat sich die Aufgabe gestellt, einerseits die physikalischen Lehren in weiteren Kreisen bekannt zu machen, andererseits denjenigen, welche tiefer in das Gebiet des physikalischen Wissens eindringen wollen, als Vorschule zu dienen; es hat aber, ohne den ersten Zweck aufser acht zu lassen, die zweite, wissenschaftliche Aufgabe mehr ins Auge gefafst, als dies von den verbreitetsten Lehrbüchern der Physik bis jetzt geschehen ist.

Die vorliegende, wesentlich vermehrte, vielfach umgearbeitete und verbesserte 5. Auflage der Experimentalphysik hat die gleiche Haltung wie die früheren Auflagen; das Buch soll unter dem steten Hinweise auf die Originalarbeiten eine Übersicht geben über den augenblicklichen Stand der experimentellen Physik und über die theoretischen Auffassungen, zu denen die Physik zur Zeit gelangt ist.

Der Schwerpunkt des Werkes liegt hiernach in den Experimentaluntersuchungen, und deshalb sind alle wichtigeren neueren Untersuchungen, die bis zur Bearbeitung des betreffenden Bandes erschienen waren, aufgenommen; wo es wünschenswert erschien, wurde auch auf ältere Arbeiten zurückgegriffen. Die Erweiterung des experimentellen Materials verlangte auch ein tieferes Eingehen in die Theorien; dieselben sind so weit dargelegt, wie es ohne zu ausgedehnte Rechnungen möglich war. Das neu zu behandelnde Material war ein recht ausgedehntes, daher auch der ziemlich erheblich gewachsene Umfang des Buches.

Aufser einer ganzen Menge von Spezialuntersuchungen auf allen Gebieten der Physik, welche den Ausbau in den Einzelnheiten bewirkt haben, sind es zwei, eigentlich ganz neue Gebiete, welche jetzt in die Physik aufgenommen werden mufsten. Das erste ist die auf dem Grenzgebiete der Physik und Chemie liegende Physik der Lösungen, welche von Van t'Hoffs kinetischer Theorie der Flüssigkeiten und der zuerst von Clausius ausgesprochenen, von Arrhenius durchgeführten Theorie der Dissociation der Lösungen ihren Ausgangspunkt nimmt. Die Gesetze der Osmose, der Diffusion, der Gefrierpunktserniedrigung, der Verminderung der Dampfspannung durch gelöste Salze, die Vervollständigung der von F. Kohlrausch gegebenen Theorie der elektrolytischen Leitung, die Beziehung zwischen Diffusion und Leitung, die Nernstsche Theorie der elektromotorischen Kräfte u. a. m. sind in den letzten Jahren als Früchte auf dem Boden dieser Theorie erwachsen.

Unmittelbar nach Abschlufs der vorigen Auflage begannen die klassischen Versuche von Hertz über die elektrischen Schwingungen, welche bis dahin nur in der Theorie von Maxwell vorausgesehen waren. Die Darlegung dieser Untersuchung verlangte ein neues Kapitel, nachdem die Maxwellschen Gleichungen des magnetischen Feldes in dem den Elektromagnetismus behandelnden Kapitel abgeleitet waren.

Die aus den Maxwellschen Gleichungen sich ergebende elektromagnetische Lichttheorie hatte zur Folge, dafs in der neuen Auflage die Lehre von der Strahlung, welche früher den zweiten Band bildete, in den vierten verlegt wurde. In demselben ist die elektromagnetische Lichttheorie neben der elastischen durchgeführt worden.

Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik.

Probespalte

aus dem Sachregister zum I. Bande. | aus dem Namenregister zum I.

Die arabischen Ziffern bedeuten die Seitenzahlen.

nterferenz des Schalles 980, von Tönen gleicher Höhe 980, verschiedener Höhe 984.
ntervalle, musikalische 838.
sotropie 726.

K.

Kaleidophon 791.
Kapillarität 364 ff.
Kapillaritätskonstanten 395, Methoden ihrer Bestimmung 396 ff., Zahlenwerte 410 ff., Einfluſs der Temperatur 410 ff., Tabelle 414, von geschmolzenen Substanzen 415, organischer Substanzen Einfluſs der Zusammensetzung 416, von Lösungen und Mischungen 418.
Kapillare Steighöhe, in Röhren 385, zwischen Platten 386, an vertikaler Wand 388, Gewicht der an der Längeneinheit der Berührungslinie getragenen Flüssigkeit 384, 391.
Kapillarröhren 379.
Kathetometer 24, Justierung 27.
Kehlkopf 914.
Kilogramm 12.
'inetische Theorie der Gase 543, der Flüssigkeiten 669.
lang 832, Analyse desselben 859, Zerlegung 860, Zusammensetzung 868.
änge schwingender fester Körper 871, 'ransversal schwingender Saiten 872, geschlagener Saiten 873, gestrichener 'aiten 875, longitudinal und tran-'rsal schwingender Stäbe 876, der 'immgabel 877, schwingender Platten ıd Glocken 878, der Labialpfeifen 8 ff., von Flüssigkeitssäulen 897, r Zungenpfeifen mit harten Zungen), der Zungenpfeifen mit weichen ıgen 907, der Blasinstrumente 912, Vokale nach Helmholtz 921, nach ssmann 925.
figuren, Chladnische 773.
ı in Flüssigkeitsstrahlen 191, bei enden Wellen 707.
linien 771.
ın 212, der Flüssigkeiten 362, spezifische 413.
ationstöne 990.
ıizierende Röhren 339.
ıtor 13.
sion fester Körper 235, flüssiger 317, der Gase 520, 534, 537, 9.
ionskoefficient, kubischer, fester 235, der Flüssigkeiten 318.
onspumpe 596, von Natterer

ion der Gase 599.
ın 927

Graham, Diffusion der Flüssigkeit Gasreibung 622, Diffusion der Ga Diffusion der Gase durch porö phragmen 665, durch Colloide
Grassi, Kompression der Flüssig 325, 326.
Grassmann, Vokaltheorie 925, K nantenbildung 927.
Graetz, Flüssigkeitsreibung 490.
S'Gravesand, Elasticität 216.
Greely, Schallgeschwindigkeit 933.
Grotrian, Flüssigkeitsreibung 488,
Guthrie, Kapillarität, Gewicht abfal der Tropfen 402.

H.

Hagen, Oberfläche der Flüssigk. engen Röhren 379, Kapillarkonstant 407, Ausfluſs aus engen Röhren 48
Hagen, E. B., Quecksilberluftpumpe 59
Hagenbach, Flüssigkeitsreibung 477, 48.
Hajech, Brechung des Schalls 962.
Hällström, Stöfse akustische 985.
Handl und *Pribram*, Flüssigkeitsreibung 490.
Hann, barometr. Höhenmessung 567.
Harms, Atomistik 206.
Hausmanninger, Stofs von Cylindern 299, Gasdiffusion 646.
Haug, Bewegung infolge von Kapillarwirkungen 435.
Heen de, Einfluſs der Temperatur auf Kapillarkonstanten 412, Diffusion von Flüssigkeiten 454.
Helmert, Verschiedenheit von *g* 180.
Helmholtz, H. von, Wirbelringe 207, 208, Flüssigkeitsreibung 477, 481, und *Piotrowski*, Flüssigkeitsreibung 489, zusammengesetzte Saitenschwingungen 796, Vibrationsmikroskop 799, Schwing. gestrichener Saiten 801, Klang 832, Tonleiter 850, musikalische Temperatur 854, tiefste Töne 857, 858, Zusammensetzung des Klanges 860 ff., Resonatoren 861, Klangfarbe und Phase 869, Zusammensetzung der Klänge von Saiten 873, Theorie der Luftschwingungen in Röhren 896, Einfluſs der Wände auf die Pfeifentöne 896, Theorie der Zungenpfeifen mit weichen Zungen 908, Bildung und Theorie der Vokale 918, 923, Schallgeschwindigkeit in Röhren 944, in Flüssigkeiten 957, Resonanz und Dauer des Nachklingens 965, Hören 973, akustische Stöfse 987, Summationstöne 991, Theorie der Kon tionstöne 993, Theorie der Ko und Dissonanz 995.

Probespalte

aus dem Sachregister zum III. Bande.

Elasticität, elektrische 369.
Elektricität 176, Erkennung derselben 176, positive und negative 178, 223, Hypothesen von Symmer und Franklin 223, Erregung derselben durch Reibung 186, durch Schaben und Feilen 189, durch Druck 190, durch Erwärmen 190, durch Bestrahlung 192, durch Belichtung 193, durch Berührung zweier Metalle 475, durch Berührung von Metallen und Flüssigkeiten 499, bei Berührung zweier Flüssigkeiten 529, zweier verschieden konzentrierter Lösungen derselben Substanz 532, zwischen Metallen und Gasen 535, bei Berührung schlechter Leiter 538.
— Dichtigkeit derselben 235, Bestimmung der Dichtigkeit 236.
— Entladung derselben 403, Entladungsstrom 403, Entladungspotential 412, Einfluſs der Belichtung durch ultraviolettes Licht auf dieselbe 423, Entladung durch Spitzen 124, Entladung einer Batterie, Dauer derselben 430, kontinuierliche 434, intermittierende 434, oscillierende 1307, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Entladungsstromes 436, 1353, Wärmewirkung desselben 450, Lichtwirkung 469, mechanische Wirkung 465, chemische Wirkung 472, 815, physiologische Wirkung 473, magnetische Wirkung 473, 1116, elektrische Wirkung 474, 1175.
— Gesetze der elektrischen Anziehung und Abstoſsung 197.
— Leitung und Mitteilung 182, 228.
— Maſs derselben 194, Dimensionen des absoluten Maſses 196.
— Sitz derselben 231.
— Spannung derselben 237.
— Verteilung auf einzeln stehenden Leitern 238, auf mehreren leitend verbundenen Leitern 249, auf zwei leitend verbundenen Kugeln 251, auf getrennten Leitern 267.
— Zerstreuung derselben 209, Abfluſs über isolierende Stützen 209.
Elektricitätsmenge, Messung mit der Torsionswage 201.
— Einheit derselben in absolutem elektromagnetischen Maſs 1234, Dimensionen dieser Einheit 1231.
Elektrischer Zustand 176.
Elektrische Verteilung oder Influenz 216, in Nichtleitern 222.
Elektrisches Grundgesetz von W. Weber 966, Einwürfe gegen dasselbe 973.
Elektrisiermaschine 374.
Elektrisierungskonstante eines Dielektricum 308.
Elektrochemie 771.

aus dem Namenregister zum IV. Bande.

K.

Kayser, Beschreibung der Gasspektra 408, 420, Entstehung der Banden und Linienspektra **411**, Konstanz des Magnesiumspektrums bei verschiedenen Temperaturen 412.
Kayser und *Runge*, Dispersion der Luft 253, Regelmäſsigkeit in der Verteilung der Linien in Gasspektren 421.
Kempf siehe Müller.
Kerr, elektrische Doppelbrechung 918, 920, **921**, Drehung der Polarisationsebene an magnetischen Spiegeln **993**.
Keſsler, Minimum der Ablenkung der Strahlen im Prisma 99, geradsichtige Prismen 294.
Ketteler, Dispersionstheorie **129**, Dispersionsgleichungen **140**, Abhängigkeit der Brechungsexponenten vom Einfallswinkel **141**, Messung von Brechungsexponenten bei anomaler Dispersion 175, Prüfung der Dispersionsformeln 197, Dispersion des Steinsalzes **202**, Brechungsexponenten von Cyaninlösungen 205, spezifisches Brechungsvermögen 212, Brechungsexponenten des Wassers **220**, verschiedener Flüssigkeiten 221, spezifisches Brechungsvermögen 223, Dispersion in Gasen **241**, Brechungsexponenten für groſse Wellenlängen 264, Absorption des Lichtes 382, Farben dicker Platten 556, Grenzen der Interferenzen bei groſsen Gangunterschieden 567, Totalreflexion 735, Theorie der Metallreflexion **755**, elliptische Polarisation bei gewöhnlicher Reflexion **795**, Theorie der Doppelbrechung 832, Theorie der Drehung der Polarisationsebene im Quarz **943**, Theorie der Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Feld **1007**.
Kirchhoff, Fraunhofersche Linien **168**, Absorption des Lichtes in farbigen Flammen 363, Satz über das Verhältnis zwischen Emission und Absorption 365, Beschaffenheit der Sonne **368**, Erklärung der Fraunhoferschen Linien 368, Emission des Lichtes **370**, Geschichte der Spektralanalyse **374**, Huyghenssches Prinzip **613**, Talbotsche Linien 650, Neumanns Reflexionstheorie 700, Theorie der Metallreflexion 761, Theorie der Doppelbrechung **830**, 867.
Kirchhoff und *Bunsen*, Spektralanalyse 375, Entdeckung von Rubidium und Cäsium 376, Abhängigkeit der Spektra von der Temperatur **412**.
Klatt siehe Lenard.

Aus den zahlreichen Besprechungen:

Beiblätter zu den Annalen der Physik u. Chemie 1898, Nr. 1:

... Kaum giebt etwas einen besseren Einblick in den ungeheuren Fortschritt in quantitativer wie qualitativer Hinsicht auf dem Gebiete der Elekricitätslehre, als ein vergleichendes Studium der vierten und fünften Auflage des Wüllnerschen Lehrbuches. Mit ungeheurem Fleifs und der ihm eigenen Begabung hat der Verf. die alten und die neuen Forschungen zu einem einheitlichen Ganzen zusammengearbeitet. Dem Jüngeren wird dieses Werk ein vorzügliches Lehrbuch, dem Älteren ein ausgezeichnetes Nachschlagewerk sein. **E. W.**

Elektrochemische Zeitschrift, Heft 3:

... Das Werk zeichnet sich nicht nur durch eine gründliche und bis ins Detail eingehende Darstellung des behandelten Stoffes aus, sondern es ist, was wir besonders hervorheben möchten, durch die Klarheit der Darstellung und durch die aufserordentlich glücklich gewählte Anordnung des Stoffes eine in jeder Hinsicht wertvolle Bereicherung der Bibliothek jedes Elektrochemikers. Wir möchten deshalb nicht verfehlen, die Aufmerksamkeit unserer engeren Fachgenossen ganz besonders auf dasselbe zu lenken und es denselben zur Anschaffung zu empfehlen.

Zeitschrift f. d. Realschulwesen, 5:

... Wir sind überzeugt, dafs die 5. Auflage des III. Bandes des bekannten, allgemein geschätzten Wüllnerschen „Lehrbuches der Experimentalphysik", deren Inhalt durchweg der Litteratur des Gegenstandes bis auf die neueste Zeit Rechnung trägt, die grofse Zahl der Freunde des gediegenen Werkes erheblich vermehren wird. Den Lehrern der Physik sei auch dieser Band wärmstens empfohlen. **Glöser.**

Naturw. Wochenschr., 11:

... Dafs das Werk in keiner einigermafsen ausgestatteten physikalischen Bibliothek fehlen darf, braucht nicht betont zu werden; wir wollen aber bei der klaren Vorführung der aufserordentlichen Fülle des Gebotenen in Verbindung mit dem bemerkenswert billigen Preise des Werkes auf die Zweckdienlichkeit auch für chemische und überhaupt exakt-naturwissenschaftliche sowohl wie Schulbibliotheken aufmerksam machen. Das Werk ist in der Lage, diesen eine grofse physikalische Bibliothek zu ersetzen.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines, Nr. 29:

... Man sieht, Prof. Wüllner hat sein altbewährtes Lehrbuch so gründlich erneuert, dafs auch die Resultate jüngster Forschung darin berücksichtigt erscheinen und dasselbe wieder auf vollster Höhe der Wissenschaft steht. Über die ausgezeichnete und so selten klare Darstellungsweise Wüllners, sowie über die schöne und angemessene Ausstattung des Buches braucht man weitere Worte nicht zu verlieren; sie sind ja altbekannt. Ein vorzügliches Sachregister und ein ebenso gutes Namensverzeichnis sind dem Bande sehr willkommener Weise beigegeben. Wüllners treffliches Werk wird sich in seiner neuen Ausgabe mit Recht zu den vielen alten gar manchen neuen Freund gewinnen. **M. P.**

Zeitschrift f. physikal. Chemie, XXV. Bd., 4. Heft:

Das Interesse der Leser dieser Zeitschrift wird sich bei den wohlbekannten allgemeinen Eigentümlichkeiten des grofsen Wüllnerschen Werkes vornehmlich auf den elektrochemischen Teil richten. Hier ist nun zu sagen, dafs der Verfasser sich offenbar ernstlich bestrebt hat, den gemachten Fortschritten Rechnung zu tragen und seinen Lesern einen Einblick in die neu entstandenen wichtigen Gebiete zu vermitteln.... **W. O.**

Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen 1898, Heft 2:

... Der neue Band (III) hat gegenüber der letzten Auflage wieder erheblich zugenommen und ist auf den stattlichen Umfang von 1150 Seiten angewachsen. Die Zunahme entspringt dem Streben des Verfassers nach Vollständigkeit, und deshalb sind diejenigen beiden Kapitel, in denen vornehmlich in den letzten Jahren grofse Fortschritte erzielt sind, dasjenige der Elektrolyse und das der elektrischen Schwingungen, erheblich erweitert, bezüglich völlig neu bearbeitet, während ältere Theorien und Darstellungen nicht in gleichem Mafse gekürzt sind. Dadurch ist auch der ganze Standpunkt des Werkes charakterisiert. Denn dasselbe giebt nicht nur einen vollständigen Überblick über den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse, sondern zugleich auch die ganze Entwickelung, welche unsere Naturerkenntnis mit fortschreitender Erfahrung genommen hat. **Dieterici.**

Centralorgan der beh. aut. Civiltechniker in Österreich, Nr. 3:

Das gegenwärtig in seiner fünften, vielfach umgearbeiteten und verbesserten Auflage erschienene Werk ist seinem theoretischen Inhalte nach so aufserordentlich wertvoll und so rühmlich bekannt, dafs es wohl weiter keiner Empfehlung bedarf. ...

„Natur“, 10:

... Der hervorragende Platz, den das Buch seit langer Zeit unter unseren gröfseren Lehrbüchern eingenommen hat, bleibt ihm auch bei dieser Auflage vollkommen gesichert. **O. M.**

Zeitschrift für lateinlose Schulen, 10:

Endlich ist der langersehnte Band, der die neuen Forschungen auf elektrischem Gebiete zu berücksichtigen hatte, erschienen. Er ist auf 1414 Seiten angewachsen, sodafs für den verschwindend niedrigen Preis geradezu Aufserordentliches geliefert wird. ...



R. Fuess, mechanisch-optische Werkstätten.

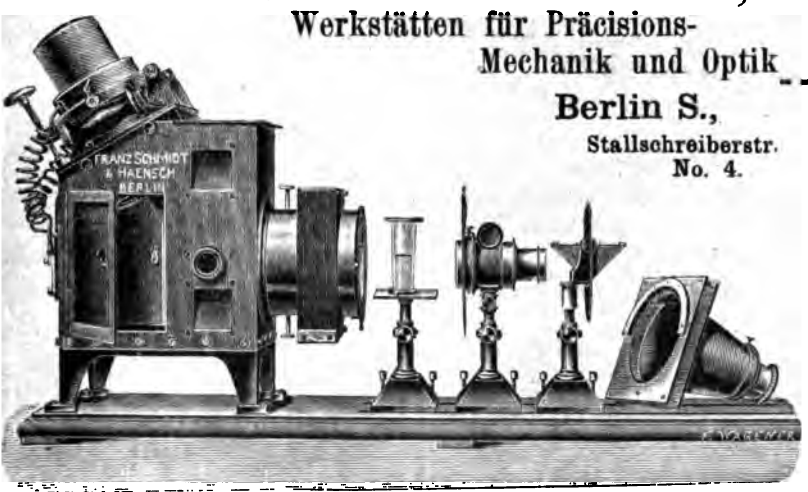


Spectrometer, Quarzspectrographen nach Schumann, **Gitterspectrographen** eigener Construction, **Heliostaten, Kathetometer** etc. etc.

(Siehe auch das Inserat im vorigen Hefte.)

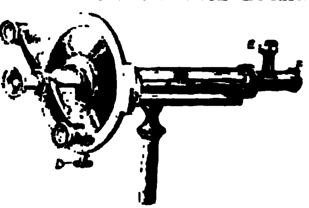
— **Sämmtliche Instrumente meist am Lager.** —

Franz Schmidt & Haensch,



Polarisations-Apparate, Spektral-Apparate, Spektrometer, Photometer, Spektral-Photometer, Colorimeter, Refraktometer, Projektions-Apparate mit sämmtlichen Neben-Einrichtungen (optische Bänke etc.), **mikrophotographische Apparate, Ablese-Fernrohre** und **-Mikroskope** etc. etc.

Prospecte gratis und franco.




Wattstundenzähler.
System Aron für Gleichstrom, ein- u. mehrphasigen Wechselstrom.
Seit 15 Jahren eingeführt, über 100 000 Apparate in Betrieb.
Erster Preis Paris 1889 und 1891.
ELECTRIZITÄTS ZÄHLER
SYSTEM ARON
Umschaltzähler
gehen und reguliren automatisch.
messen gleichmässig richtig bei geringster und höchster Belastung.
bedürfen keinerlei Wartung.
sind plombirt versandfähig.
sind unabhängig von äusseren magnetischen Einflüssen.
sind unabhängig von der Phasenverschiebung.
sind unabhängig von der Polwechselzahl.
zeichnen sich durch äusserst geringen Energieverbrauch aus.
H. ARON.
Elektrizitätszählerfabrik G. m. b. H.
BERLIN W. 35, Lützowstr. 6.



Mit zwei Beilagen von **Siemens & Halske A.-G.** in **Charlottenburg** und **B. G. Teubner** in **Leipzig.**

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

R. Fuess, mechanisch-optische Werkstätten.

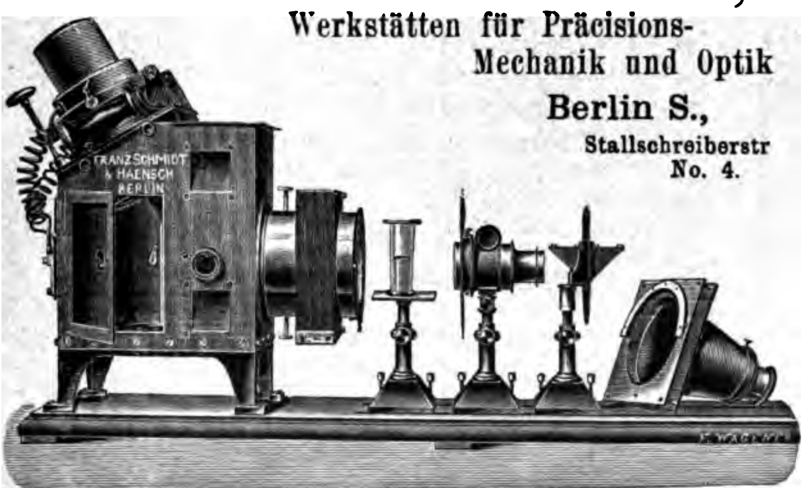


Spectrometer, Quarzspectrographen nach Schumann, Gitterspectrographen eigener Construction, **Heliostaten, Kathetometer etc. etc.**

(Siehe auch das Inserat im vorigen Hefte.)

— Sämmtliche Instrumente meist am Lager. —

Franz Schmidt & Haensch,



Polarisations-Apparate, Spektral-Apparate, Spektrometer, Photometer, Spektral-Photometer, Colorimeter, Refraktometer, Projektions-Apparate mit sämmtlichen Neben-Einrichtungen (optische Bänke etc.), **mikrophotographische Apparate, Ablese-Fernrohre** und **-Mikroskope** etc. etc.

Prospecte gratis und franco.

Inhalt.

Seite

1. R. Reiff. Die Druckkräfte in der Hydrodynamik und die Hertz'sche Mechanik 225
2. P. A. Thomas. Der longitudinale Elasticitätscoefficient eines Flusseisens bei Zimmertemperatur und bei höheren Temperaturen 232
3. Ch. Bohr. Die Löslichkeit der Kohlensäure in Alkohol zwischen -67° und +45° C. In- und Evasionscoefficient bei 0° . 244
4. U. Behn. Ueber die specifische Wärme der Metalle, des Graphits und einiger Legirungen bei tiefen Temperaturen . . . 257
5. U. Behn. Ueber die Sublimationswärme der Kohlensäure und die Verdampfungswärme der Luft 270
6. G. Tammann. Ueber adiabatische Zustandsänderungen eines Systems, bestehend aus einem Krystall und seiner Schmelze . 275
7. H. Pflaum. Ueber ein Vacuumelektroskop 290
8. G. Schwalbe. Ueber die experimentelle Grundlage der Exner'schen Theorie der Luftelektricität 294
9. H. Sieveking. Ueber Ausstrahlung statischer Elektricität aus Spitzen 299
10. H. Diesselhorst. Ueber das Problem eines elektrisch erwärmten Leiters 312
11. C. Heinke. Ueber Wellenstromerreger 326
12. E. Hagen und H. Rubens. Das Reflexionsvermögen von Metallen und belegten Glasspiegeln 352
13. W. Voigt. Ueber eine Dissymmetrie der Zeeman'schen normalen Triplets 376
14. W. Voigt. Weiteres zur Theorie der magneto-optischen Wirkungen 389
15. E. Riecke. Zur Kinetik der Serienschwingungen eines Linienspectrums 399
16. E. Riecke. Lichtenberg'sche Figuren im Innern von Röntgenröhren 414
17. J. Precht. Ueber das Verhalten der Leuchtschirme in Röntgenstrahlen 420
18. J. Stark. Ueber den Einfluss der Erhitzung auf das elektrische Leuchten eines verdünnten Gases 424
19. J. Stark. Ueber elektrostatische Wirkungen bei der Entladung der Elektricität in verdünnten Gasen 430
20. P. Drude. Zur Geschichte der elektromagnetischen Dispersionsgleichungen 437

Manuscripte sind an die Adresse des Herausgebers, **Professor Dr. P. Drude, Leipzig, Marschnerstrasse 3,** zu senden.



R. Fuess, mechanisch-optische Werkstätten.

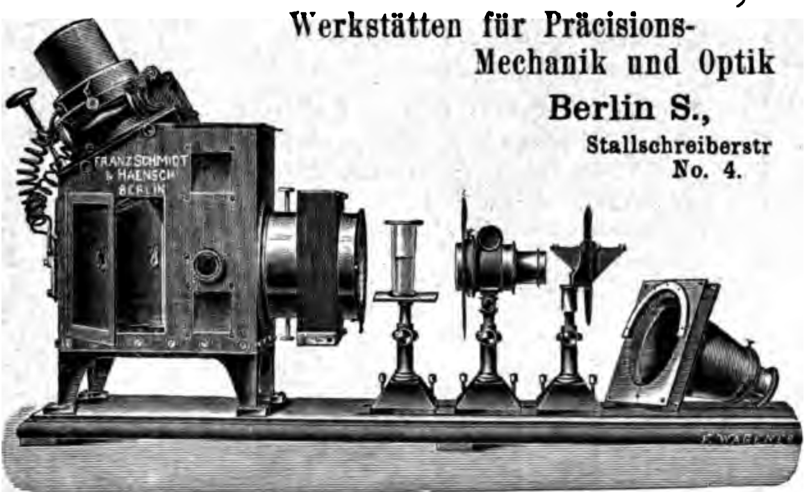


Spectrometer, Quarzspectrographen nach Schumann, Gitterspectrographen eigener Construction, Heliostaten, Kathetometer etc. etc.

(Siehe auch das Inserat im vorigen Hefte.)

— Sämmtliche Instrumente meist am Lager. —

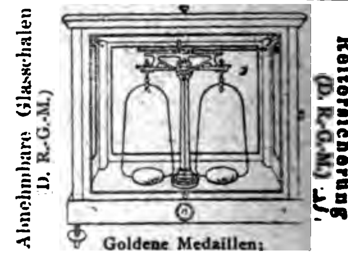
Franz Schmidt & Haensch,



Polarisations-Apparate, Spektral-Apparate, Spektrometer, Photometer, Spektral-Photometer, Colorimeter, Refraktometer, Projektions-Apparate mit sämmtlichen Neben-Einrichtungen (optische Bänke etc.), **mikrophotographische Apparate, Ablese-Fernrohre** und **-Mikroskope** etc. etc.

Prospecte gratis und franco.





Abnehmbare Glasschalen (D. R.-G.-M.)
Reitersicherung (D. R.-G.-M.)
Goldene Medaillen:

Mit einer Beilage von **Julius Springer in Berlin.**

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Personalnotizen.

Gesucht zum 15. April

ein Assistent

für das physikalische Institut der Universität Giessen. Anfangsgehalt 1200 ℳ und Dienstwohnung im Institut. Angebote sind zu richten an Prof. **Drude**, Leipzig.

Bücheranzeigen.

Herdersche Verlagshandlung, Freiburg i. Br. — B. Herder, Wien I, Wollzeile 33.

Soeben ist erschienen und durch alle Buchhandlungen zu beziehen:

Münch, Dr. P., Lehrbuch der Physik.

Elfte Auflage, nach den preussischen-Lehrplänen von 1892 in zwei Teilen bearbeitet von Dr. **H. Lüdtke.**

Erster Teil. **Vorbereitender Lehrgang.** Mit einem Anhang: Von den chemischen Erscheinungen. Mit 209 in den Text gedruckten Abbild. gr. 8. (XII u. 180 S.) ℳ 1.80; geb. in Halbleder ℳ 2.15.

Das weit verbreitete und beliebte Münchsche Lehrbuch der Physik erscheint hiermit erstmals umgearbeitet nach den preussischen Lehrplänen. Der erste Teil, welcher die physikalische Lehraufgabe der Obertertia und Untersekunda der höheren Lehranstalten enthält, ist ein nicht zu karg bemessener Auszug aus dem alten Lehrbuche mit Weglassung der mathematischen Entwicklungen. Änderungen mussten natürlich vielfach erfolgen, wie es bei einer derartigen Teilung des Buches nicht anders zu erwarten ist. Die von dem Herausgeber aufs sorgfältigste ausgeführte Neubearbeitung ist vor dem Druck von zwei als Schulmänner und Fachschriftsteller rühmlichst bekannten Autoritäten geprüft worden.

Der zweite Teil wird noch vor Ostern erscheinen.

Verlag von **Gustav Fischer** in Jena.

Soeben erschien:

Jenaer Glas

und seine Verwendung

in Wissenschaft und Technik.

Von **Dr. H. Hovestadt.**

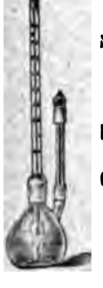
Mit 29 Abbildungen im Text.

Preis: **brosch. 9 ℳ, geb. 10 ℳ.**

W. Niehls, Berlin N. 37, Schönhauser Allee 171.

Königl. Preuss. Staatsmedaille.

Glastechnische Instrumente.



Spezialität: **Hochgradige Quecksilber-Thermometer + 550° u. 575° Cels. mit und ohne Prüfungsschein der Phys.-Techn. Reichsanst. Thermometer** für **Kältegrade** bis **— 200° Cels.** Selbstthätige **Luftpumpen** nach **Professor Neesen.**

Härtescala für Glas nach Niehls.

Glashähne, in welchem das Kücken nach meiner Konstruktion federnd festgehalten wird.





Mit einer Beilage von **Julius Springer** in **Berlin.**

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

1900. **№ 3.**

ANNALEN
DER
PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN

VIERTE FOLGE.

BAND 1. HEFT 3.

DER GANZEN REIHE 306. BANDES 3. HEFT.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT EINER TAFEL.



LEIPZIG, 1900.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

Inhalt.

		Seite
1.	C. Heinke. Ueber Wellenstromerreger. (Schluss von p. 351)	441
2.	M. Cantor. Versuch über die Absorption des Lichtes in elektrisch leuchtenden Gasen	462
3.	H. Morris-Airey. Ein Versuch zur Hypothese der elektrolytischen Leitung in Geisslerröhren	466
4.	F. Richarz und W. Ziegler. Analyse oscillirender Flaschenentladungen vermittelst der Braun'schen Röhre	468
5.	K. Bürker. Ueber ein Dreipulvergemisch zur Darstellung elektrischer Staubfiguren	474
6.	H. T. Calvert. Die Dielektricitätsconstante des Wasserstoffsuperoxyds	483
7.	P. Lenard. Ueber Wirkungen des ultravioletten Lichtes auf gasförmige Körper	486
8.	J. E. Almy. Ueber die Funkenpotentiale in festen und tropfbarflüssigen Dielektricis	508
9.	L. Graetz. Ueber die Quincke'schen Rotationen im elektrischen Feld	530
10.	F. J. Micheli. Ueber den Einfluss von Oberflächenschichten auf das Kerr'sche magneto-optische Phänomen	542
11.	P. Drude. Zur Elektronentheorie der Metalle	566
12.	A. v. Rzewuski. Ein elektrolytischer Unterbrecher für schwache Ströme	614
13.	W. Marek. Elektromotorische Kraft des Clark- und Westonelementes	617
14.	M. Planck. Bemerkungen zu einer Abhandlung über Thermodynamik des Hrn. K. Wesendonck	621

Manuscripte sind an den Herausgeber, **Professor Dr. P. Drude,** zu senden. Seine Adresse ist **bis zum 10. April Leipzig, von da an Giessen,** am Nahrungsberg 8, 9.

Es wird gebeten, die Manuscripte **druckfertig** einzuliefern und in den Correcturen den beim Druck für sie verwendeten **Raum nicht zu überschreiten.**

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (**nicht in das Manuscript** selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst **in den Text** eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuscriptes **recht genau** anzugeben, wo sie hingehören.

Citate sind am Rande oder unten auf den Seiten des **Manuscriptes** (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der **in den „Fortschritten der Physik“** üblichen Form mit Angabe des **Namens und Vornamens,** der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke jeder Arbeit** kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht **werden, so muss dies** bei Rücksendung des ersten Correcturbogens an die **Druckerei auf dessen** erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die **Sonderabdrücke betreffenden** Mittheilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung **zu richten.**





Julius Brückner & Co.,

Ilmenau in Thüringen,

Hohlglashüttenwerk, Hohl- und Flachglas-Schleiferei, Holzbearbeitung mit Motorbetrieb, Lampenbläserei, Schildermalerei und Mechanische Werkstätten,

fabriziren

Glasinstrumente für chemische, pharmaceutische, physiologische und bakteriologische etc. Zwecke.

Apparate zu Vorlesungen über Experimental-Chemie.

Vollständige Ausrüstung chemischer Laboratorien.

Lichtelectrische Apparate — Geissler'sche - , Crookes'sche und Röntgenröhren. Spectralröhren.

Glaspräcisionsinstrumente.

Barometer, Aräometer, Thermometer für Wissenschaft und Technik mit und ohne amtlichen Prüfungsschein.

== Tadellose Ausführung aller einschlägigen Apparate. ==

PAUL GEBHARDT

Mechaniker und Optiker

(Inhaber der Berliner Lehrmittel-Anstalt)

Permanente Lehrmittel-Ausstellung.



Reich illustrierte Kataloge versende an Interessenten gratis und franko.

Fabrik und grösstes Lager sämtlicher physikalischer, elektrischer, optischer, chemischer Lehrapparate.

Intensitätsvariable als ein Maass des veränderlichen „Härtegrades“ des Metalles ansehen können, indem dann unsere so erweiterten Zustandsgleichungen gewisse Erfahrungen über die Härte wiedergeben. Das Nähere anlangend kann ich auf meine damaligen Darlegungen verweisen.

Für jetzt möchte ich davon absehen, das Problem der Thermoelektricität in seiner durch Berücksichtigung der Cohäsion erweiterten Form zu behandeln, mich vielmehr damit begnügen, zu zeigen, welchen Einfluss die Cohäsion auch schon auf die Erscheinungen der „blossen Wärmeleitung“ ausübt, wo also von elektrischen Strömen keine Rede ist.

Wenn ein Teil eines von Wärme durchströmten Metalles eben infolge der Wärmeleitung seine Temperatur ändert, so ist damit sicherlich auch eine Aenderung seines Cohäsionszustandes verbunden — vom moleculartheoretischen Standpunkt aus wird man sagen: eine Aenderung der Molecularkräfte, eine Lockerung oder Festigung des Verbandes der Molecüle untereinander. Mit einer örtlichen Verschiedenheit der Temperatur wird im allgemeinen eine örtliche Verschiedenheit des Härtegrades Hand in Hand gehen. Wir nehmen weiter, ganz analog wie bei den anderen Zustandsseiten, an, dass eine Differenz des Härtegrades in benachbarten Volumenelementen sich auszugleichen strebt, es wird ein Uebergang der Cohäsionsquantität erfolgen, wir werden von einem *Cohäsionsstrom* reden können und von einem Widerstand des Metalles gegen einen solchen, der vielleicht sehr gross ist.

Den Zusammenhang, in dem die Aenderungen der Cohäsion mit denen des thermischen Zustandes stehen, formuliren wir nun nach unseren allgemeinen Grundsätzen, genau in derselben Weise, wie wir es oben für die thermisch-elektrischen Vorgänge gethan haben. Wir ersetzen also in den Zustandsgleichungen (9) die Variabeln φ, q, i durch den Härtegrad J, die Cohäsionsquantität, berechnet für die Volumeneinheit m, und den Cohäsionsstrom μ, ebenso die Constanten durch die entsprechenden neuen, und schliessen im übrigen, wie damals.

Die Gleichung, die uns hier nun besonders interessirt, ist die Energiegleichung:

$$(52) \qquad \frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial(\vartheta\sigma + J\mu)}{\partial x};$$

einen *genaueren* Vergleich mit dem Inhalt unserer Erfahrung verträgt. Die von uns im Vorstehenden als Folgerungen erhaltenen einfachen Gesetze werden dann natürlich gewisse Abänderungen erfahren, wie sie denn auch mit der Erfahrung nur *angenähert* übereinstimmen.

Zusammenfassung.

Es wurde die früher gegebene Darstellung nicht-umkehrbarer Vorgänge verallgemeinert, derart, dass sie auf einen physikalisch *in*homogenen Körper Anwendung finden kann, z. B. auf ein Metall, das infolge örtlicher Temperatur- und Potentialunterschiede von Wärme und Elektricität durchströmt wird.

Zugleich wird die Theorie principiell erweitert, sodass sie bei solchen Strömungen neben der eigentlichen Leitung die „Mitführung" berücksichtigt.

Hinsichtlich dieser Mitführung wird eine quantitativ bestimmte Reciprocität formulirt in einer Gleichheit der beiden „Mitführungsvermögen", eine Annahme, die für die Theorie diejenigen Dienste leistet, derentwegen man sonst den zweiten Hauptsatz in eigenartiger Weise benutzt.

Auf diesen Grundlagen ergiebt sich der elektrische Widerstand und der Coefficient des Thomsoneffectes proportional zur absoluten Temperatur in Uebereinstimmung mit der Erfahrung.

Für den Zusammenhang zwischen Thomsoneffect, Peltiereffect und thermoelektromotorischer Kraft ergeben sich die bekannten Relationen unter der Annahme, dass die Potentialsprünge an den beiden Lötstellen von gleicher Grösse sind. (Standpunkt der *reinen* Mitführungstheorie.)

Endlich wird gezeigt, dass der Vorgang der sog. blossen Wärmeleitung nicht als rein thermischer anzusehen und zu formuliren ist, insofern mit Aenderungen des thermischen auch solche des Cohäsionszustandes untrennbar verbunden sind; die Bedeutung der als Wärmeleitvermögen bezeichneten Grösse ist danach eine weniger einfache, wodurch sich auch die Schwierigkeit erklärt, strenge Gesetzmässigkeiten hinsichtlich dieser Grösse und ihres Verhältnisses zum elektrischen Leitvermögen aufzustellen.

Leipzig, 23. März 1900.

(Eingegangen 24. März 1900.)

Nach Entfernung des Vorlagegefässes brachte ich das Dilatometer, um möglichst vollkommenen Wärmeausgleich zu erzielen, mitsamt dem Gefässe eines Thermometers in ein kleines Quecksilberbad und dieses wiederum in ein grösseres Paraffinbad. Durch zweckmässige Rührvorrichtung konnte die Temperatur des Gesamtbades möglichst gleichmässig gehalten werden.

Zur Bestimmung des Volumensprunges beim Schmelzen (in cm^3 pro Gramm) wurden die im Folgenden mitgeteilten Beobachtungsreihen ausgeführt.

Die angewendete Menge Rubidium betrug in beiden Fällen 5,4547 g (unter Berücksichtigung des Luftauftriebes bei der Wägung).

Die Schmelztemperatur bestimmte sich zu 37,80°.

Die Tabelle giebt den Stand des Paraffinmeniscus in dem mit Teilung versehenen Steigrohre (K) in der Figur an; ein Teilstrich (mm) entsprach einem Volumen von 0,0227 cm^3.

I. Reihe

Temperatur	Rohrmeniscus	
0°	14,20	fest
8,7	13,83	
14,5	13,57	
31,4	13,79	
34,9	12,61	
39,2	8,40	flüssig
43,9	8,19	
59,5	7,32	
58,0	7,41	
41,1	8,30	
34,0	12,65	fest
21,7	13,17	
43,0	8,21	flüssig
50,4	7,80	

II. Reihe

Temperatur	Rohrmeniscus	
18,5°	13,30	fest
28,7	12,80	
33,3	12,59	
35,8	12,30	
36,0	12,29	
36,8	11,90	
37,0	11,50	
41,4	8,26	flüssig
70,9	6,71	
86,5	5,90	
87,1	5,85	
93,5	5,51	
95,1	5,40	
98,0	5,30	
100,0	5,20	

Durch graphische Interpolation findet man ein Ansteigen des Meniscus beim Schmelzen um 39,8 Scalenteile. Hieraus berechnet sich die Volumenzunahme (K_λ) zu

0,01657 cm^3 für 1 Gramm Rb.

Für Cäsium wurde die Volumenänderung in anderer Weis festgestellt. Der Vollständigkeit halber sei schon hier d (gelegentlich einer vom Verfasser mit Hrn. E. Graefe au geführten Untersuchung festgestellte) Wert für den Volume sprung mitgeteilt.

Es ergab sich K_λ zu

$$0{,}01393 \text{ cm}^3 \text{ für } 1 \text{ g Cs.}$$

Festes Cäsium von Schmelztemperatur (specifisches G wicht = 1,886) dehnt sich demnach um 2,627 Proc. sei

keit von Metallen in Quecksilber
6. F. Kohlrausch. Ueber den stationären Temperaturzustand eines elektrisch geheizten Leiters 132
7. A. Orgler. Zur Kenntnis des Funkenpotentiales in Gasen . 159
8. J. Koenigsberger. Ueber neuere Untersuchungen der magnetischen Susceptibilität 175
9. O. Liebknecht und A. P. Wills. Moleculare Susceptibilität paramagnetischer Salze der Eisengruppe 178
10. H. du Bois und O. Liebknecht. Moleculare Susceptibilität paramagnetischer Salze seltener Erden 189
11. H. du Bois. Halbring-Elektromagnet 199
12. Lizzie R. Laird. Ueber den zeitlichen Verlauf der magnetischen Nachwirkung in Eisenscheiben 207
13. E. Yamaguchi. Zur Kenntnis des thermomagnetischen Transversaleffectes im Wismut 214

Manuscripte sind an die Adresse des Herausgebers, **Professor Dr. P. Drude, Leipzig, Marschnerstrasse 3,** zu senden.

Es wird gebeten, die Manuscripte **druckfertig** einzuliefern und in den Correcturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuscript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuscriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Citate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuscriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muss dies bei Rücksendung des ersten Correcturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Zweiter Abschnitt. **Die Lehre von der Reibungselektricität.**

Die Reibungselektricität im Zustande der Isolation **176**
Die Entladung der Elektricität und deren Wirkungen **403**

Dritter Abschnitt. **Der Galvanismus.**

Die Entstehung des galvanischen Stromes und die Gesetze der Stromstärke **475**
Die Wirkungen des galvanischen Stromes im Schließsungskreise **699**

Vierter Abschnitt. **Die Wirkungen des Stromes aufserhalb des Stromkreises.**

Elektrodynamik **920**
Elektromagnetismus und Diamagnetismus **1001**
Elektrische Induktion **1159**
Elektrische Schwingungen **1307**

IV. Band.

Die Lehre von der Strahlung.

Erster Abschnitt. **Ausbreitung und Wahrnehmung des Lichtes.**

Die ungestörte Ausbreitung des Lichtes **3**
Von der gestörten Ausbreitung des Lichtes, Reflexion und Brechung . . . **53**
Absorption und Emission des Lichtes und die sie begleitenden Erscheinungen **349**
Die Wahrnehmung des Lichtes **472**

Zweiter Abschnitt. **Theoretische Optik.**

Interferenz und Beugung des Lichtes **514**
Die Polarisation des Lichtes **678**
Von der Doppelbrechung des Lichtes **805**
Interferenz des polarisierten Lichtes **874**

Probespalte

aus dem Sachregister zum I. Bande.

Die arabischen Ziffern bedeuten die Seitenzahlen.

Interferenz des Schalles 980, von Tönen gleicher Höhe 980, verschiedener Höhe 984.
Intervalle, musikalische 838.
Isotropie 726.

K.

Kaleidophon 791.
Kapillarität 364 ff.
Kapillaritätskonstanten 395, Methoden ihrer Bestimmung 396 ff., Zahlenwerte 410 ff., Einfluſs der Temperatur 410 ff., Tabelle 414, von geschmolzenen Substanzen 415, organischer Substanzen Einfluſs der Zusammensetzung 416, von Lösungen und Mischungen 418.
Kapillare Steighöhe, in Röhren 385, zwischen Platten 386, an vertikaler Wand 388, Gewicht der an der Längeneinheit der Berührungslinie getragenen Flüssigkeit 384, 391.
Kapillarröhren 379.
Kathetometer 24, Justierung 27.
Kehlkopf 914.
Kilogramm 12.
Kinetische Theorie der Gase 543, der Flüssigkeiten 669.
Klang 832, Analyse desselben 859, Zerlegung 860, Zusammensetzung 868.
Klänge schwingender fester Körper 871, transversal schwingender Saiten 872, geschlagener Saiten 873, gestrichener Saiten 875, longitudinal und transversal schwingender Stäbe 876, der Stimmgabel 877, schwingender Platten und Glocken 878, der Labialpfeifen 878 ff., von Flüssigkeitssäulen 897, der Zungenpfeifen mit harten Zungen 900, der Zungenpfeifen mit weichen Zungen 907, der Blasinstrumente 912, der Vokale nach Helmholtz 921, nach Grassmann 925.
Klangfiguren, Chladnische 773.
Knoten in Flüssigkeitsstrahlen 494, bei stehenden Wellen 707.
Knotenlinien 771.
Kohäsion 212, der Flüssigkeiten 362, 413, spezifische 413.
Kombinationstöne 990.
Kommunizierende Röhren 339.
Komparator 13.
Kompression fester Körper 235, flüssiger Körper 317, der Gase 520, 534, 537, 596, 599.
Kompressionskoefficient, kubischer, fester Körper 235, der Flüssigkeiten 318.
Kompressionspumpe 596, von Natterer 597.
Kondensation der Gase 599.
Konsonanten 927.
Konsonanz 838, Theorie derselben 995.

aus dem Namenregister zum I. Bande.

Graham, Diffusion der Flüssigkeiten 444, Gasreibung 622, Diffusion der Gase 642, Diffusion der Gase durch poröse Diaphragmen 665, durch Colloide 667.
Grassi, Kompression der Flüssigkeiten 325, 326.
Grassmann, Vokaltheorie 925, Konsonantenbildung 927.
Graetz, Flüssigkeitsreibung 490.
S'Gravesand, Elasticität 216.
Greely, Schallgeschwindigkeit 933.
Grotrian, Flüssigkeitsreibung 488, 490.
Guthrie, Kapillarität, Gewicht abfallender Tropfen 402.

H.

Hagen, Oberfläche der Flüssigk. in engen Röhren 379, Kapillarkonstanten 407, Ausfluſs aus engen Röhren 483.
Hagen, E. B., Quecksilberluftpumpe 591.
Hagenbach, Flüssigkeitsreibung 477, 481.
Hajech, Brechung des Schalls 962.
Hällström, Stöſse akustische 985.
Handl und *Pribram*, Flüssigkeitsreibung 490.
Hann, barometr. Höhenmessung 567.
Harms, Atomistik 206.
Hausmanninger, Stoſs von Cylindern 299, Gasdiffusion 646.
Hauy, Bewegung infolge von Kapillarwirkungen 435.
Heen de, Einfluſs der Temperatur auf Kapillarkonstanten 412, Diffusion von Flüssigkeiten 454.
Helmert, Verschiedenheit von *g* 180.
Helmholtz, H. von, Wirbelringe 207, 208, Flüssigkeitsreibung 477, 481, und *Piotrowski*, Flüssigkeitsreibung 489, zusammengesetzte Saitenschwingungen 796, Vibrationsmikroskop 799, Schwing. gestrichener Saiten 801, Klang 832, Tonleiter 850, musikalische Temperatur 854, tiefste Töne 857, 858, Zusammensetzung des Klanges 860 ff., Resonatoren 861, Klangfarbe und Phase 869, Zusammensetzung der Klänge von Saiten 873, Theorie der Luftschwingungen in Röhren 896, Einfluſs der Wände auf die Pfeifentöne 896, Theorie der Zungenpfeifen mit weichen Zungen 908, Bildung und Theorie der Vokale 918, 923, Schallgeschwindigkeit in Röhren 941, in Flüssigkeiten 957, Resonanz und Dauer des Nachklingens 965, Hören 973, akustische Stöſse 987, Summationstöne 991, Theorie der Kombinationstöne 993, Theorie der Konsonanz und Dissonanz 995.
Henry, Gesetz der Gasabsorption 6[illegible]

Zweiter Abschnitt. **Die Lehre von der Reibungselektricität.**

Die Reibungselektricität im Zustande der Isolation 176
Die Entladung der Elektricität und deren Wirkungen 403

Dritter Abschnitt. **Der Galvanismus.**

Die Entstehung des galvanischen Stromes und die Gesetze der Stromstärke 475
Die Wirkungen des galvanischen Stromes im Schliefsungskreise 699

Vierter Abschnitt. **Die Wirkungen des Stromes aufserhalb des Stromkreises.**

Elektrodynamik 920
Elektromagnetismus und Diamagnetismus 1001
Elektrische Induktion 1150
Elektrische Schwingungen 1307

IV. Band.

Die Lehre von der Strahlung.

Erster Abschnitt. **Ausbreitung und Wahrnehmung des Lichtes.**

Die ungestörte Ausbreitung des Lichtes 3
Von der gestörten Ausbreitung des Lichtes, Reflexion und Brechung . . . 53
Absorption und Emission des Lichtes und die sie begleitenden Erscheinungen 319
Die Wahrnehmung des Lichtes 472

Zweiter Abschnitt. **Theoretische Optik.**

Interferenz und Beugung des Lichtes 514
Die Polarisation des Lichtes 678
Von der Doppelbrechung des Lichtes 805
Interferenz des polarisierten Lichtes 874

Probespalte

aus dem Sachregister zum I. Bande.

Die arabischen Ziffern bedeuten die Seitenzahlen.

Interferenz des Schalles 980, von Tönen gleicher Höhe 980, verschiedener Höhe 984.
Intervalle, musikalische 838.
Isotropie 726.

K.

Kaleidophon 791.
Kapillarität 364 ff.
Kapillaritätskonstanten 395, Methoden ihrer Bestimmung 396 ff., Zahlenwerte 410 ff., Einfluſs der Temperatur 410 ff., Tabelle 414, von geschmolzenen Substanzen 415, organischer Substanzen Einfluſs der Zusammensetzung 416, von Lösungen und Mischungen 418.
Kapillare Steighöhe, in Röhren 385, zwischen Platten 386, an vertikaler Wand 388, Gewicht der an der Längeneinheit der Berührungslinie getragenen Flüssigkeit 384, 391.
Kapillarröhren 379.
Kathetometer 24, Justierung 27.
Kehlkopf 914.
Kilogramm 12.
Kinetische Theorie der Gase 543, der Flüssigkeiten 669.
Klang 832, Analyse desselben 859, Zerlegung 860, Zusammensetzung 868.
Klänge schwingender fester Körper 871, transversal schwingender Saiten 872, geschlagener Saiten 873, gestrichener Saiten 875, longitudinal und transversal schwingender Stäbe 876, der Stimmgabel 877, schwingender Platten und Glocken 878, der Labialpfeifen 878 ff., von Flüssigkeitssäulen 897, der Zungenpfeifen mit harten Zungen 900, der Zungenpfeifen mit weichen Zungen 907, der Blasinstrumente 912, der Vokale nach Helmholtz 921, nach Grassmann 925.
Klangfiguren, Chladnische 773.
Knoten in Flüssigkeitsstrahlen 494, bei stehenden Wellen 707.
Knotenlinien 771.
Kohäsion 212, der Flüssigkeiten 362, 413, spezifische 413.
Kombinationstöne 990.
Kommunizierende Röhren 339.
Komparator 13.
Kompression fester Körper 235, flüssiger Körper 317, der Gase 520, 534, 537, 596, 599.
Kompressionskoefficient, kubischer, fester Körper 235, der Flüssigkeiten 318.
Kompressionspumpe 596, von Natterer 597.
Kondensation der Gase 599.
Konsonanten 927.
Konsonanz 838, Theorie derselben 995.

aus dem Namenregister zum I. Bande.

Graham, Diffusion der Flüssigkeiten 444, Gasreibung 622, Diffusion der Gase 642, Diffusion der Gase durch poröse Diaphragmen 665, durch Colloide 667.
Grassi, Kompression der Flüssigkeiten 325, 326.
Grassmann, Vokaltheorie 925, Konsonantenbildung 927.
Graetz, Flüssigkeitsreibung 490.
S'Gravesand, Elasticität 216.
Greely, Schallgeschwindigkeit 933.
Grotrian, Flüssigkeitsreibung 488, 490.
Guthrie, Kapillarität, Gewicht abfallender Tropfen 402.

H.

Hagen, Oberfläche der Flüssigk. in engen Röhren 379, Kapillarkonstanten 407, Ausfluſs aus engen Röhren 483.
Hagen, E. B., Quecksilberluftpumpe 591.
Hagenbach, Flüssigkeitsreibung 477, 481.
Hajech, Brechung des Schalls 962.
Hällström, Stöfse akustische 985.
Handl und *Pribram*, Flüssigkeitsreibung 490.
Hann, barometr. Höhenmessung 567.
Harms, Atomistik 206.
Hausmanninger, Stoſs von Cylindern 299, Gasdiffusion 646.
Haug, Bewegang infolge von Kapillarwirkungen 435.
Heen de, Einfluſs der Temperatur auf Kapillarkonstanten 412, Diffusion von Flüssigkeiten 454.
Helmert, Verschiedenheit von g 180.
Helmholtz, H. von, Wirbelringe 207, 208, Flüssigkeitsreibung 477, 481, und *Piotrowski*, Flüssigkeitsreibung 489, zusammengesetzte Saitenschwingungen 796, Vibrationsmikroskop 799, Schwing. gestrichener Saiten 801, Klang 832, Tonleiter 850, musikalische Temperatur 854, tiefste Töne 857, 858, Zusammensetzung des Klanges 860 ff., Resonatoren 861, Klangfarbe und Phase 869, Zusammensetzung der Klänge von Saiten 873, Theorie der Luftschwingungen in Röhren 896, Einfluſs der Wände auf die Pfeifentöne 896, Theorie der Zungenpfeifen mit weichen Zungen 908, Bildung und Theorie der Vokale 918, 923, Schallgeschwindigkeit in Röhren 944, in Flüssigkeiten 957, Resonanz und Dauer des Nachklingens 965, Hören 973, akustische Stöſse 987, Summationstöne 991, Theorie der Kombinationstöne 993, Theorie der Konsonanz und Dissonanz 995.
Henry, Gesetz der Gasabsorption 60[illegible]

Probespalte

aus dem Sachregister zum III. Bande.

Elasticität, elektrische 369.
Elektricität 176, Erkennung derselben 176, positive und negative 178, 223, Hypothesen von Symmer und Franklin 223, Erregung derselben durch Reibung 186, durch Schaben und Feilen 189, durch Druck 190, durch Erwärmen 190, durch Bestrahlung 192, durch Belichtung 193, durch Berührung zweier Metalle 475, durch Berührung von Metallen und Flüssigkeiten 499, bei Berührung zweier Flüssigkeiten 529, zweier verschieden konzentrierter Lösungen derselben Substanz 532, zwischen Metallen und Gasen 535, bei Berührung schlechter Leiter 538.
— Dichtigkeit derselben 235, Bestimmung der Dichtigkeit 236.
— Entladung derselben 403, Entladungsstrom 403, Entladungspotential 412, Einfluſs der Belichtung durch ultraviolettes Licht auf dieselbe 423, Entladung durch Spitzen 424, Entladung einer Batterie, Dauer derselben 430, kontinuierliche 434, intermittierende 434, oscillierende 1307, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Entladungsstromes 436, 1353, Wärmewirkung desselben 450, Lichtwirkung 469, mechanische Wirkung 465, chemische Wirkung 472, 815, physiologische Wirkung 473, magnetische Wirkung 473, 1116, elektrische Wirkung 474, 1175.
— Gesetze der elektrischen Anziehung und Abstoſsung 197.
— Leitung und Mitteilung 182, 228.
— Maſs derselben 194. Dimensionen des absoluten Maſses 196.
— Sitz derselben 231.
— Spannung derselben 237.
— Verteilung auf einzeln stehenden Leitern 238, auf mehreren leitend verbundenen Leitern 249, auf zwei leitend verbundenen Kugeln 251, auf getrennten Leitern 267.
— Zerstreuung derselben 209, Abfluſs über isolierende Stützen 209
Elektricitätsmenge, Messung mit der Torsionswage 204.
— Einheit derselben in absolutem elektromagnetischen Maſs 1231, Dimensionen dieser Einheit 1234.
Elektrischer Zustand 176.
Elektrische Verteilung oder Influenz 216, in Nichtleitern 222.
Elektrisches Grundgesetz von W. Weber 966, Einwürfe gegen dasselbe 973.
Elektrisiermaschine 374.
Elektrisierungskonstante eines Dielektricum 308.
Elektrochemie 771.

aus dem Namenregister zum IV. Bande.

K.

Kayser, Beschreibung der Gasspektra 408, 420, Entstehung der Banden und Linienspektra 411, Konstanz des Magnesiumspektrums bei verschiedenen Temperaturen 412.
Kayser und *Runge*, Dispersion der Luft 253, Regelmäſsigkeit in der Verteilung der Linien in Gasspektren 421.
Kempf siehe Müller.
Kerr, elektrische Doppelbrechung 918, 920, 921, Drehung der Polarisationsebene an magnetischen Spiegeln 993.
Keſsler, Minimum der Ablenkung der Strahlen im Prisma 99, geradsichtige Prismen 294.
Ketteler, Dispersionstheorie 129, Dispersionsgleichungen 140, Abhängigkeit der Brechungsexponenten vom Einfallswinkel 141, Messung von Brechungsexponenten bei anomaler Dispersion 175, Prüfung der Dispersionsformeln 197, Dispersion des Steinsalzes 202, Brechungsexponenten von Cyaninlösungen 205, spezifisches Brechungsvermögen 212, Brechungsexponenten des Wassers 220, verschiedener Flüssigkeiten 221, spezifisches Brechungsvermögen 223, Dispersion in Gasen 241, Brechungsexponenten für groſse Wellenlängen 264. Absorption des Lichtes 382, Farben dicker Platten 556, Grenzen der Interferenzen bei groſsen Gangunterschieden 567, Totalreflexion 735, Theorie der Metallreflexion 755, elliptische Polarisation bei gewöhnlicher Reflexion 795, Theorie der Doppelbrechung 832, Theorie der Drehung der Polarisationsebene im Quarz 943, Theorie der Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Feld 1007.
Kirchhoff, Fraunhofersche Linien 168, Absorption des Lichtes in farbigen Flammen 363, Satz über das Verhältnis zwischen Emission und Absorption 365, Beschaffenheit der Sonne 368, Erklärung der Fraunhoferschen Linien 368, Emission des Lichtes 370, Geschichte der Spektralanalyse 374, Huyghenssches Prinzip 613, Talbotsche Linien 650, Neumanns Reflexionstheorie 700, Theorie der Metallreflexion 761, Theorie der Doppelbrechung 880, 867.
Kirchhoff und *Bunsen*, Spektralanalyse 375, Entdeckung von Rubidium und Cäsium 376, Abhängigkeit der Spektra von der Temperatur 412.
Klatt siehe Lenard.

Aus den zahlreichen Besprechungen:

Beiblätter zu den Annalen der Physik u. Chemie 1898, Nr. 1:

...Kaum giebt etwas einen besseren Einblick in den ungeheuren Fortschritt in quantitativer wie qualitativer Hinsicht auf dem Gebiete der Elekricitätslehre, als ein vergleichendes Studium der vierten und fünften Auflage des Wüllnerschen Lehrbuches. Mit ungeheurem Fleifs und der ihm eigenen Begabung hat der Verf. die alten und die neuen Forschungen zu einem einheitlichen Ganzen zusammengearbeitet. Dem Jüngeren wird dieses Werk ein vorzügliches Lehrbuch, dem Älteren ein ausgezeichnetes Nachschlagewerk sein. **E. W.**

Elektrochemische Zeitschrift, Heft 3:

... Das Werk zeichnet sich nicht nur durch eine gründliche und bis ins Detail eingehende Darstellung des behandelten Stoffes aus, sondern es ist, was wir besonders hervorheben möchten, durch die Klarheit der Darstellung und durch die aufserordentlich glücklich gewählte Anordnung des Stoffes eine in jeder Hinsicht wertvolle Bereicherung der Bibliothek jedes Elektrochemikers. Wir möchten deshalb nicht verfehlen, die Aufmerksamkeit unserer engeren Fachgenossen ganz besonders auf dasselbe zu lenken und es denselben zur Anschaffung zu empfehlen.

Zeitschrift f. d. Realschulwesen, 5:

...Wir sind überzeugt, dafs die 5. Auflage des III. Bandes des bekannten, allgemein geschätzten Wüllnerschen „Lehrbuches der Experimentalphysik", deren Inhalt durchweg der Litteratur des Gegenstandes bis auf die neueste Zeit Rechnung trägt, die grofse Zahl der Freunde des gediegenen Werkes erheblich vermehren wird. Den Lehrern der Physik sei auch dieser Band wärmstens empfohlen. **Glöser.**

Naturw. Wochenschr., 11:

... Dafs das Werk in keiner einigermafsen ausgestatteten physikalischen Bibliothek fehlen darf, braucht nicht betont zu werden; wir wollen aber bei der klaren Vorführung der aufserordentlichen Fülle des Gebotenen in Verbindung mit dem bemerkenswert billigen Preise des Werkes auf die Zweckdienlichkeit auch für chemische und überhaupt exakt-naturwissenschaftliche sowohl wie Schulbibliotheken aufmerksam machen. Das Werk ist in der Lage, diesen eine grofse physikalische Bibliothek zu ersetzen.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines, Nr. 29:

... Man sieht, Prof. Wüllner hat sein altbewährtes Lehrbuch so gründlich erneuert, dafs auch die Resultate jüngster Forschung darin berücksichtigt erscheinen und dasselbe wieder auf vollster Höhe der Wissenschaft steht. Über die ausgezeichnete und so selten klare Darstellungsweise Wüllners, sowie über die schöne und angemessene Ausstattung des Buches braucht man weitere Worte nicht zu verlieren; sie sind ja altbekannt. Ein vorzügliches Sachregister und ein ebenso gutes Namensverzeichnis sind dem Bande sehr willkommener Weise beigegeben. Wüllners treffliches Werk wird sich in seiner neuen Ausgabe mit Recht zu den vielen alten gar manchen neuen Freund gewinnen. **M. P.**

Zeitschrift f. physikal. Chemie, XXV. Bd., 4. Heft:

Das Interesse der Leser dieser Zeitschrift wird sich bei den wohlbekannten allgemeinen Eigentümlichkeiten des grofsen Wüllnerschen Werkes vornehmlich auf den elektrochemischen Teil richten. Hier ist nun zu sagen, dafs der Verfasser sich offenbar ernstlich bestrebt hat, den gemachten Fortschritten Rechnung zu tragen und seinen Lesern einen Einblick in die neu entstandenen wichtigen Gebiete zu vermitteln.... **W. O.**

Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen 1898, Heft 2:

... Der neue Band (III) hat gegenüber der letzten Auflage wieder erheblich zugenommen und ist auf den stattlichen Umfang von 1150 Seiten angewachsen. Die Zunahme entspringt dem Streben des Verfassers nach Vollständigkeit, und deshalb sind diejenigen beiden Kapitel, in denen vornehmlich in den letzten Jahren grofse Fortschritte erzielt sind, dasjenige der Elektrolyse und das der elektrischen Schwingungen, erheblich erweitert, bezüglich völlig neu bearbeitet, während ältere Theorien und Darstellungen nicht in gleichem Mafse gekürzt sind. Dadurch ist auch der ganze Standpunkt des Werkes charakterisiert. Denn dasselbe giebt nicht nur einen vollständigen Überblick über den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse, sondern zugleich auch die ganze Entwickelung, welche unsere Naturerkenntnis mit fortschreitender Erfahrung genommen hat. **Dieterici.**

Centralorgan der beh. aut. Civiltechniker in Österreich, Nr. 3:

Das gegenwärtig in seiner fünften, vielfach umgearbeiteten und verbesserten Auflage erschienene Werk ist seinem theoretischen Inhalte nach so aufserordentlich wertvoll und so rühmlich bekannt, dafs es wohl weiter keiner Empfehlung bedarf. . . .

„Natur“, 10:

... Der hervorragende Platz, den das Buch seit langer Zeit unter unseren gröfseren Lehrbüchern eingenommen hat, bleibt ihm auch bei dieser Auflage vollkommen gesichert. **O. M.**

Zeitschrift für lateinlose Schulen, 10:

Endlich ist der langersehnte Band, der die neuen Forschungen auf elektrischem Gebiete zu berücksichtigen hatte, erschienen. Er ist auf 1414 Seiten angewachsen, sodafs für den verschwindend niedrigen Preis geradezu Aufserordentliches geliefert wird. . . .



dass sowohl der elektrische als der Wärme- (bei uns zunächst der Entropie-) Strom als lineare, homogene Functionen des Potentialgefälles *und* des Temperaturgefälles dargestellt werden, formulirt Neumann den Ausdruck für den elektrischen Strom[1]) so, dass an Stelle des Temperaturgefälles das eines „isotropen Druckes" P tritt, der seinerseits mit der absoluten Temperatur und der „Dichte δ des elektrischen Fluidums" verknüpft ist durch eine dem Boyle-Gay-Lussac'schen Gesetz ganz analoge Formel. Danach hängt schliesslich die Grösse der elektromotorischen Kraft des Thermokreises davon ab, wie jene Dichte δ sich ändert von einem Metall zum andern und innerhalb eines solchen mit der Temperatur. Vergleicht man Neumann's Endformel mit der unsrigen, so erkennt man leicht, dass an Stelle unseres a/w_s dort die Grösse steht:

$$\mathfrak{R} \cdot {}^e\log \frac{1}{\delta} \,.$$

wo $\mathfrak{R}$ eine unbekannte, universelle Constante. Auf Grund der Annahme, dass die Aenderung von δ mit der Temperatur proportional ist der der materiellen Dichte des betreffenden Metalles, ergiebt sich, dass die von uns in (44) und (45) mit β bezeichnete Constante proportional dem thermischen Ausdehnungscoefficienten ist. Daraus folgt weiter, dass wenn von zwei Metallen das in der Nähe von 0° C. im Vergleich zum anderen elektropositive den *kleineren* Ausdehnungscoefficienten hat, dann der „neutrale Temperaturpunkt" der Combination über 0° liegen muss, eine Folgerung, die Neumann in 28 von 31 untersuchten Fällen bestätigt fand.

Von der Liebenow'schen Theorie, deren Kritik durch Voigt[2]) wir schon erwähnten, bleibt, da ihre Schlussweise so sehr anfechtbar, nur ihr Endresultat bestehen, das ja in einzelnen Fällen mit der Erfahrung übereinstimmt: danach wäre unser a/w_s gleich der positiven *oder* negativen Quadratwurzel aus dem thermischen Leitvermögen dividirt durch das elektrische und die absolute Temperatur.

Nach Bucherer's Theorie endlich hätte diese Grösse die Bedeutung:

$$\frac{R}{n}\left(1 - \vartheta\,\frac{d \cdot \log p}{d\,\vartheta}\right);$$

1) Die thermischen Erscheinungen behandelt er nicht.

2) W. Voigt, Wied. Ann. **69**. p. 706. 1899.

wo R die universelle Gasconstante, n die Anzahl der in einem Grammmolecül enthaltenen „elektrothermischen Aequivalente" des Metalles, endlich p dessen Dampfspannung bei der Temperatur ϑ.

Vergleichen wir nun das *Ergebnis* unserer Entwickelungen mit dem der sonstigen Theorien, so finden wir: Gegenüber den Theorien, die — mögen sie nun Contactpotentiale oder Mitführung annehmen — nur den Zusammenhang der verschiedenen thermoelektrischen Grössen untereinander behandeln, hat die unsrige den Vorteil, dass sie über die Abhängigkeit dieser Grössen von der Temperatur ohne ad hoc eingeführte Annahmen bestimmte Aussagen macht, die von der Erfahrung bestätigt werden. [Gleichungen (36), (45), (50).] Die maassgebende Grösse a/w_s tritt eben als *bekannte* Function von ϑ auf. Eine *Berechnung* der thermoelektrischen Grössen aus anderweit bekannten *liefert sie aber freilich bisher nicht.* In dieser Beziehung ist das Problem zurückgeführt auf die Frage, ob und wie sich etwa a durch w_s (bez. das thermische Leitvermögen) und andere bekannte Eigenschaften des betreffenden Stoffes ausdrücken lässt. Erinnert man sich der durch Gleichung (29) gegebenen Bedeutung von a, so erkennt man, dass es sich im wesentlichen darum handelt: Stehen in den Zustandsgleichungen, die wir durch Einführung von (26) schreiben können:

$$
(51) \quad \left\{
\begin{aligned}
c_\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \frac{\partial s}{\partial t} - c_\vartheta r_{qs} \frac{\partial q}{\partial t} - \gamma_{q,s} c_\vartheta r_{qs} \sigma^2 \\
&\quad - \varrho_\vartheta \sigma i + \gamma_{\vartheta,q} i^2, \\
c_q \frac{\partial q}{\partial t} &= \frac{\partial q}{\partial t} - c_q r_{qs} \frac{\partial s}{\partial t} - \gamma_{\vartheta,q} c_q r_{qs} i^2 \\
&\quad - \varrho_q \sigma i + \gamma_{q,s} \sigma^2,
\end{aligned}
\right.
$$

die Constanten ϱ in einer principiell gegebenen Beziehung zu den übrigen Constanten? Von diesen dürften am ersten die γ in Betracht kommen; dann würde wohl a/w_s sich durch die Leitvermögen ausdrücken, ähnlich vielleicht der Liebenow'schen Relation. Der erstrebenswerte Fortschritt ist also gerade von einer *Vereinfachung* unserer Grundlagen zu erwarten.

er erscheint also *proportional dem Wert der absoluten Temperatur* an der betreffenden Stelle des Metalles. Das Vorzeichen bleibt dabei unbestimmt, weil dies von den Constanten ϱ der Zustandsgleichungen, also auch von α_ϑ gilt.

Diese Schlussfolgerung aus unserem Ansatz stimmt bekanntlich mit den Ergebnissen der Erfahrung gut überein. Die von Tait[1]) auf Grund der später zu besprechenden Beziehungen des Thomsoneffectes zu der thermoelektrischen Kraft vermutete Proportionalität des Thomsoneffectes mit der absoluten Temperatur besteht nach Battelli's Messungen[2]) wirklich angenähert, etwa im selben Sinne, wie die Proportionalität des elektrischen Widerstandes mit der absoluten Temperatur. Thatsächlich entspringen bei unserer Herleitung beide Beziehungen aus derselben Annahme (26), durch die wir die Widerstände w_q und w_s unabhängig machten von der *zugehörigen* Intensität.

Wir haben hier eine streng lineare Bewegung der Wärme wie der Elektricität angenommen, bei der experimentellen Messung des Thomsoneffectes muss man aber noch die *seitliche* Abgabe von Wärme, allgemeiner gesagt: Energie, durch Leitung und Strahlung berücksichtigen. Wird diese, auf die Zeit- und Längeneinheit berechnet, mit H bezeichnet, so nimmt also die Bedingung des stationären Zustandes die Form an:

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{d\vartheta}{dx}\right) + \tau i \frac{d\vartheta}{dx} + w_q i^2 - H = 0. \tag{37}$$

An diese knüpft nun die specielle Berechnung der Messmethoden an, bei denen entweder der Unterschied beobachtet wird, der sich im stationären Wert der Temperatur an einer bestimmten Stelle bei Stromumkehr zeigt, oder aber der hierbei sich ergebende Unterschied in der Wärmeabgabe H nach aussen.[3])

Das allgemeinere Problem der stationären Temperatur- und Potentialverteilung in einem elektrisch geheizten Leiter

---

1) P. G. Tait, Proc. Roy. Soc. Edinb. **7**. p. 308. 1870/71.

2) A. Battelli, Atti d. R. Acc. di Torino **22**. p. 48. 369. 1886; Rend. d. R. Acc. dei Lincei (4) **3**. p. 105. 212. 1887.

3) Eine kritische Besprechung der verschiedenen Methoden giebt nach H. F. Weber's Ausführungen die Inaugural-Dissertation von A. Petersson, Ueber Messungen des Thomsoneffectes, Zürich 1895.

ist ja neuerdings mehrfach behandelt worden, seit F. Kohlrausch[1]) darauf eine Methode zur Bestimmung des Verhältnisses der thermischen und elektrischen Leitfähigkeit gegründet hat. Auf die Rechnungen von Voigt[2]) komme ich später noch bei einem Vergleich seiner Theorie mit der meinigen zurück, will hier nur noch kurz auf den Fall eingehen, dass man den Thomsoneffect *vernachlässigt*, wie das ursprünglich Kohlrausch that.

Wir hätten dann also $a = 0$ zu setzen und würden einfach haben:

$$i = -\frac{1}{w_q}\frac{d\varphi}{dx}, \qquad \sigma = -\frac{1}{w_s}\frac{d\vartheta}{dx};$$

die Energiegleichung liefert:

$$\vartheta\sigma + \varphi i = \text{const.}$$

also, da auch i constant gegen x:

$$\frac{\vartheta\sigma}{i} = c - \varphi$$

oder weiter.

$$\frac{\dfrac{\vartheta}{w_s}\dfrac{d\vartheta}{dx}}{\dfrac{1}{w_q}\dfrac{d\varphi}{dx}} = c - \varphi,$$

wenn man die Leitfähigkeiten $\lambda = \vartheta / w_s$ und $\varkappa = 1 / w_q$ einführt:

$$\frac{\lambda}{\varkappa}\frac{d\vartheta}{d\varphi} = c - \varphi,$$

mithin, wenn λ ebenso wie $\varkappa$ als nur mit ϑ veränderlich angesehen wird:

$$\int \frac{\lambda}{\varkappa}\, d\vartheta = c\varphi - \frac{\varphi^2}{2} + c',$$

eine sehr einfache Herleitung dieser von Kohlrausch gegebenen und benutzten Formel.

Die thermoelektromotorische Kraft.

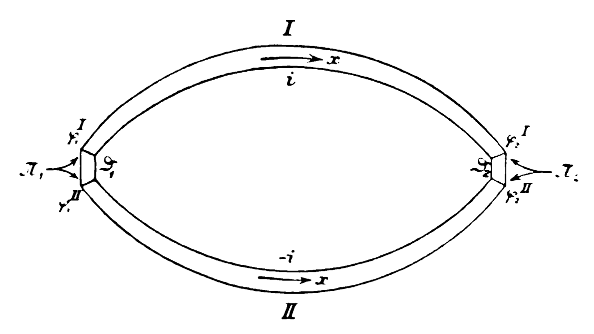
Wir kommen nun zur eigentlichen Thermoelektricität, wo es sich um die Vereinigung mehrerer chemisch verschiedener

1) F. Kohlrausch, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 711. 1899; Ann. d. Phys. (4) 1. p. 132. 1900.

2) W. Voigt, Gött. Nachr. p. 228. 1899.

Metalle handelt, berechnen zunächst die elektromotorische Kraft eines stationären Thermostromes.

Der Thermokreis sei gebildet aus zwei verschiedenen Metallen in Stab- oder Drahtform, d. h. nur linear durchströmt; an



ihren beiden Enden sind sie miteinander verbunden, und diese „Lötstellen" befinden sich dauernd auf den Temperaturen ϑ_1 bezw. ϑ_2; die Verbindung denken wir uns hergestellt durch metallische Querstücke irgend welcher Art, die in ihrer ganzen Ausdehnung sich auf der betreffenden Temperatur befinden und beliebig kurz angenommen werden mögen, damit ihr elektrischer Widerstand vernachlässigt werden kann; sie dienen auch dazu, den Ein- und Austritt von Wärmeströmen an den Enden der beiden Metalle zu vermitteln. In beiden Metallen rechnen wir die $+x$-Richtung von der niedrigeren Temperatur ϑ_1 zur höheren ϑ_2, sodass durchweg $(d\vartheta/dx) > 0$; dasjenige Metall, in dem der elektrische Strom i in der Richtung wachsender x verläuft, bezeichnen wir als I; dementsprechend ist dann für das andere, II, die Stromstärke als $-i$ einzusetzen.[1])

Zur Berechnung dient uns die 2. Gleichung (31), die wir schreiben können:

$$\left(w_q - \frac{a^2}{w_s}\right) i = -\frac{dq}{dx} - \frac{a}{w_s}\frac{d\vartheta}{dx}. \tag{38}$$

Wenn wir sie über die ganze Länge eines Metalles integriren, tritt links dessen elektrischer Gesamtwiderstand auf, den wir zur Abkürzung mit w bezeichnen wollen:

$$w = \int\left(w_q - \frac{a^2}{w_s}\right) dx.$$

1) Es ist dann II im Vergleich zu I das „thermoelektrisch positive".

Unter Anwendung der eben festgesetzten Bezeichnungen erhalten wir also für die beiden Teile des Thermokreises die Formeln:

$$
(39)\quad \begin{cases} w^{\mathrm{I}}\, i = -\left(\varphi_2^{\mathrm{I}} - \varphi_1^{\mathrm{I}}\right) - \displaystyle\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left(\frac{a}{w_*}\right)^{\mathrm{I}} d\vartheta\,, \\ -\, w^{\mathrm{II}}\, i = -\left(\varphi_2^{\mathrm{II}} - \varphi_1^{\mathrm{II}}\right) - \displaystyle\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left(\frac{a}{w_*}\right)^{\mathrm{II}} d\vartheta\,. \end{cases}
$$

Subtraction der zweiten von der ersten Gleichung liefert:

$$
(40)\quad (w^{\mathrm{I}} + w^{\mathrm{II}})\, i = +\left(\varphi_2^{\mathrm{II}} - \varphi_1^{\mathrm{II}}\right) - \left(\varphi_2^{\mathrm{I}} - \varphi_1^{\mathrm{I}}\right) + \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left\{ \left(\frac{a}{w_*}\right)^{\mathrm{II}} - \left(\frac{a}{w_*}\right)^{\mathrm{I}} \right\} d\vartheta\,.
$$

Wir erhalten also für die *elektromotorische Kraft des Thermostromes* den Wert (etwas anders geordnet):

$$
(41)\quad \Theta = (\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})_2 - (\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})_1 + \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left\{ \left(\frac{a}{w_*}\right)^{\mathrm{II}} - \left(\frac{a}{w_*}\right)^{\mathrm{I}} \right\} d\vartheta\,.
$$

Wir lassen, indem wir so schreiben, die Möglichkeit offen, dass an den beiden Lötstellen *Sprünge des elektrischen Potentiales* bestehen: $\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}}$, und für unsere ganze Entwickelung ist es nun von wesentlicher Bedeutung, ob diese Potentialsprünge an den beiden Lötstellen verschiedener Temperatur von verschiedener Grösse sind.

Um ganz klar zu sein, wollen wir es ausdrücklich als *Hypothese* bezeichnen, wenn wir annehmen, dass solche Verschiedenheit nicht besteht, dass also $(\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})_2 = (\varphi^{\mathrm{II}} - \varphi^{\mathrm{I}})_1$. Wir werden im Folgenden sehen, dass wir dann zu Folgerungen kommen, die *im allgemeinen* als von der Erfahrung bestätigt angesehen werden.

Die elektromotorische Kraft des Thermostromes wird bei dieser Annahme dargestellt durch:

$$
(42)\quad \Theta = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \left\{ \left(\frac{a}{w_*}\right)^{\mathrm{II}} - \left(\frac{a}{w_*}\right)^{\mathrm{I}} \right\} d\vartheta\,.
$$

Nach früherem ist nun der Coefficient des Thomsoneffectes, wenn wir davon absehen, dass a/w_s auch wegen φ veränderlich ist, gegeben durch:

$$\tau = -\vartheta \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{a}{w_s}\right);$$

wir erhalten also, wenn τ^{II} und τ^{I} diese Grösse, berechnet für die beiden Metalle bei derselben Temperatur ϑ bedeuten:

$$(43) \qquad \tau^{II} - \tau^{I} = -\vartheta \frac{d^2 \Theta}{d \vartheta^2};$$

wir finden so auch auf unserem Wege diese bekannte Thomson'sche Relation, deren strenge quantitative Prüfung bisher freilich noch durch die Unsicherheit der gemessenen Grössen recht erschwert wird.[1])

Die Berechnung der elektromotorischen Kraft können wir auf Grund von (42) weiterführen, da die Grösse a/w_s in ihrer Abhängigkeit von ϑ uns ja bekannt ist[2]), denn es gilt nach früherem:

$$(35) \qquad \frac{a}{w_s} = \frac{a_\varphi}{\gamma_{\varphi,s}} + \frac{a_\vartheta}{\gamma_{\varphi,s}\cdot\varphi}\,\vartheta,$$

oder abgekürzt

$$(44) \qquad \frac{a}{w_s} = \alpha + \beta\,.\,\vartheta,$$

wo α und β Constanten des betreffenden Metalles. Danach ergiebt sich:

$$(45) \qquad \Theta = (\alpha^{II} - \alpha^{I})(\vartheta_2 - \vartheta_1) + \tfrac{1}{2}(\beta^{II} - \beta^{I})(\vartheta_2^{\,2} - \vartheta_1^{\,2}),$$

d. h. *die elektromotorische Kraft des Thermostromes als parabolische Function der Lötstellentemperaturen*, was ja mit den Ergebnissen der Erfahrung innerhalb ziemlich weiter Grenzen übereinstimmt.

Der Peltiereffect.

Während wir bisher den *elektrischen* Strom, der im Thermokreis fliesst, besprochen haben, wenden wir uns nun zur Besprechung des *Wärme*stromes, des thermischen Energiestromes, für den sich auf Grund der 1. Gleichung (30) ergiebt:

$$(46) \qquad \vartheta\,\sigma = -\frac{\vartheta}{w_s}\frac{d\,\vartheta}{d\,x} + \frac{a}{w_s}\,\vartheta\,i.$$

Wir suchen seinen Wert speciell für die Enden der beiden Metalle, die beiden Lötstellen. An der kälteren Löt-

1) Vgl. E. Riecke, Experimentalphysik 2. p. 325. 1896.

2) φ gilt darin wieder als constant.

stelle ϑ_1, von der aus die wachsenden x gerechnet werden, hat der *ein*tretende Wärmestrom für beide Metalle den Wert ($\vartheta / w_s = \lambda$ gesetzt):

$$(47)\qquad \begin{cases} (\vartheta\,\sigma)_1^{\mathrm{I}} = -\left(\lambda\,\dfrac{d\,\vartheta}{d\,x}\right)_1^{\mathrm{I}} + \left(\dfrac{a}{w_s}\right)_1^{\mathrm{I}} \vartheta_1\, i\,, \\ (\vartheta\,\sigma)_1^{\mathrm{II}} = -\left(\lambda\,\dfrac{d\,\vartheta}{d\,x}\right)_1^{\mathrm{II}} - \left(\dfrac{a}{w_s}\right)_1^{\mathrm{II}} \vartheta_1\, i\,; \end{cases}$$

hier bedeutet der erste Teil die infolge blosser Wärmeleitung in das Metall eintretende (bez. hier austretende) Wärmemenge, während der zweite den an das Vorhandensein des Stromes gebundenen, von seiner Stärke abhängigen, mit ihm umkehrbaren, den eigentlichen Gegenstand der Messungen bildenden Teil des Wärmeaustausches der Lötstellen mit der Umgebung darstellt. Für diesen letzteren ergiebt sich also der Gesamtwert:

$$(48\,\mathrm{a})\qquad \Pi_1 = -\left\{\left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{II}} - \left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{I}}\right\}_1 \vartheta_1\, i\,.$$

Für die wärmere Lötstelle ϑ_2, wo die eintretende Wärme den wachsenden x *entgegen*fliesst, berechnet sich in gleicher Weise:

$$(48\,\mathrm{b})\qquad \Pi_2 = +\left\{\left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{II}} - \left(\frac{a}{w_s}\right)^{\mathrm{I}}\right\}_2 \vartheta_2\, i\,.$$

Ein Vergleich mit (42) ergiebt also für die an der wärmeren Lötstelle vom Thermostrom aufgenommene bez. die an der kälteren abgegebene Wärmemenge

$$(49)\qquad \Pi = i\,\vartheta_n \left(\frac{d\,\Theta}{d\,\vartheta}\right)_{\vartheta_n},$$

wo

$$n = 2 \text{ bez. } 1\,;$$

wir finden die bekannte T h o m s o n - C l a u s i u s'*sche Relation.* Man überzeugt sich leicht, dass für deren Herleitung wesentlich nötig ist unsere Annahme über die Mitführungsfactoren: $a_q = a_s$. Denn ursprünglich tritt im Ausdruck für Π auf das a_q (vgl. 1. Gleichung (20)), in dem für Θ aber a_s (vgl. 2. Gleichung (24)). Es bestätigt sich dadurch, was wir oben erwähnten (p. 772), dass uns die Einführung dieser Annahme in die Strömungsgleichungen dient an Stelle der hypothetischen Erweiterung des zweiten Hauptsatzes.

Aus den Formeln (48) ergiebt sich allgemein für diejenige Wärme, die *entwickelt* wird da, wo der Strom i vom Metall I zum Metall II fliesst, für die „Peltierwärme", der Ausdruck:

$$- i \vartheta \left\{ \left(\frac{a}{w_s} \right)^{II} - \left(\frac{a}{w_s} \right)^{I} \right\}.$$

Für die *in* einem der Metalle entwickelte Thomsonwärme fanden wir oben in Gleichung (33):

$$- i \vartheta \frac{d}{d x} \left(\frac{a}{w_s} \right).$$

Wir erkennen daran die *vollkommene Analogie*: maasgebend für diese „Wärmeentwickelungen" ist in jedem Fall die örtliche Zunahme der Grösse a / w_s in Richtung des Stromes.

Führen wir noch a / w_s, als Function von ϑ dargestellt, durch (44) ein, so finden wir für die auf den Strom 1 berechnete Peltierwärme:

$$(50) \qquad P = - (\alpha^{II} - \alpha^{I}) \vartheta - (\beta^{II} - \beta^{I}) \vartheta^2,$$

eine Formel, die namentlich durch die Messungen von Battelli[1]) ihre Bestätigung gefunden hat.

Vergleich mit den früheren Theorien.

Wollen wir nun einen kurzen Vergleich anstellen zwischen der hier entwickelten Theorie der Thermoelektricität und den bisher schon vorliegenden, so werden wir insbesondere die Gruppe der „Mitführungstheorien" ins Auge fassen, denn als zu diesen gehörig kennzeichnet sich unsere Theorie unmittelbar.

Das Verhältnis der älteren thermodynamischen Contactpotentialtheorien von Clausius, Thomson, Budde speciell zur Kohlrausch'schen Mitführungstheorie ist seinerzeit schon von Budde[2]) näher beleuchtet worden, der da zeigte, wie diese auf den ersten Blick so verschiedenartigen Anschauungen in ihren wesentlichen Folgerungen übereinstimmen. Zur einfachen Darstellung der Contactpotentialtheorie benutzt Budde eine Grösse α (oder für ein anderes Metall β und dergleichen), die vollkommen die Stelle der von uns benutzten Grösse a/w_s vertritt, wie man direct an den für die Peltier- und Thomson-

1) A. Battelli, Rend. d. Acad. d. Lincei (4a) 5. p. 631. 1889. Deutsch in: Physik. Revue 2. p. 546 u. 713. 1892.

2) E. Budde, Wied. Ann. 21. p. 277. 1884; 25. p. 564. 1885.

wärme gegebenen Ausdrücken (Gleichung (13) und (14) bei Budde) erkennt.[1])

Die Annahmen, die der Kohlrausch'schen Theorie zu Grunde liegen, schreiben sich in unserer Bezeichnungsweise folgendermaassen (s. oben p. 768): Mitführung eines elektrischen Stromes durch einen Strom thermischer Energie (Wärmestrom):

$$i = \frac{a}{\vartheta\, w_s} . \vartheta\sigma ,$$

Mitführung eines Wärmestromes durch einen elektrischen:

$$\vartheta\sigma = \frac{a\,\vartheta}{w_s} . i ;$$

man sieht dann leicht, dass die von Kohlrausch mit ϑ bezeichnete Grösse (ebenso wie Budde's α) identisch ist mit unserem a/w_s, und ferner, dass Kohlrausch's C gleich der absoluten Temperatur gesetzt werden muss, wie das schon Budde hervorhob. Auch Riecke[2]) formulirt in der Entwickelung seiner molecular-kinetischen Mitführungstheorie die notwendige Beziehung zwischen den beiden Factoren der gegenseitigen Mitführung von i und $\vartheta\sigma$ in der Weise, wie es unserem Ansatz entspricht. Voigt's thermodynamische Theorie kommt schliesslich gleichfalls darauf hinaus, dass man die thermoelektrischen Erscheinungen sehr einfach darstellen kann, wenn man von einer Mitführung redet. Unser a/w_s findet sich bei Voigt wieder in der Grösse $-d\Theta/dT$. Die Gleichung, auf Grund deren er den stationären Zustand eines von Wärme und Elektricität durchflossenen Leiters behandelt[3]), lautet in unserer Schreibweise:

$$-\frac{\vartheta}{w_s}\frac{d\,\vartheta}{d\,x} + i\left(\frac{a}{w_s}\,\vartheta + \varphi\right) = \text{const} ,$$

wie sie sich leicht aus der Energiegleichung und der einen Strömungsgleichung ergiebt.

Mit den Mitführungstheorien in formaler Hinsicht verwandt ist die schon erwähnte Theorie von Carl Neumann, wenn sie auch von Haus aus auf anderen Grundlagen beruht. Während die Mitführungstheorien alle darin ihren Ausdruck finden,

1) a/w_s wäre also als Function von ϑ ins „thermoelektrische Diagramm" einzutragen.

2) l. c. p. 380.

3) W. Voigt, Gött. Nachr. p. 228. 1899 (s. Gleichung (19), p. 234).

Für Cäsium wurde die Volumenänderung in anderer Weise festgestellt. Der Vollständigkeit halber sei schon hier der (gelegentlich einer vom Verfasser mit Hrn. E. Graefe ausgeführten Untersuchung festgestellte) Wert für den Volumensprung mitgeteilt.

Es ergab sich K_λ zu

$$0{,}01393 \text{ cm}^3 \text{ für } 1 \text{ g Cs.}$$

Festes Cäsium von Schmelztemperatur (specifisches Gewicht = 1,886) dehnt sich demnach um 2,627 Proc. seines Volumens aus.

Es sei auch an dieser Stelle noch Hrn. Dr. M. Toepler für gütigen Rat und Unterstützung auf das Verbindlichste gedankt.

Dresden, Physikal. Institut der K. S. Techn. Hochschule, im Februar 1900.

(Eingegangen 22. Februar 1900.)

Druck von Metzger & Wittig, Leipzig.

1900. № 1.



Leipzig und ist durch alle Buchhandlungen — auch zur Ansicht — erhältlich:

LEHRBUCH

DER

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 1. HEFT 1.

DER GANZEN REIHE 306. BANDES 1. HEFT.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESONDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.



LEIPZIG, 1900.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den

Für Cäsium wurde die Volumenänderung in anderer Weis
festgestellt. Der Vollständigkeit halber sei schon hier de
(gelegentlich einer vom Verfasser mit Hrn. E. Graefe au
geführten Untersuchung festgestellte) Wert für den Volume
sprung mitgeteilt.

Es ergab sich K_λ zu

$$0{,}01393 \text{ cm}^3 \text{ für } 1 \text{ g Cs.}$$

Festes Cäsium von Schmelztemperatur (specifisches G
wicht = 1,886) dehnt sich demnach um 2,627 Proc. sei

6. **F. Kohlrausch.** Ueber den stationären Temperaturzustand eines elektrisch geheizten Leiters 132
7. **A. Orgler.** Zur Kenntnis des Funkenpotentiales in Gasen . 159
8. **J. Koenigsberger.** Ueber neuere Untersuchungen der magnetischen Susceptibilität 175
9. **O. Liebknecht und A. P. Wills.** Moleculare Susceptibilität paramagnetischer Salze der Eisengruppe 178
10. **H. du Bois und O. Liebknecht.** Moleculare Susceptibilität paramagnetischer Salze seltener Erden 189
11. **H. du Bois.** Halbring-Elektromagnet 199
12. **Lizzie R. Laird.** Ueber den zeitlichen Verlauf der magnetischen Nachwirkung in Eisenscheiben 207
13. **E. Yamaguchi.** Zur Kenntnis des thermomagnetischen Transversaleffectes im Wismut 214

Manuscripte sind an die Adresse des Herausgebers, **Professor Dr. P. Drude, Leipzig, Marschnerstrasse 3,** zu senden.

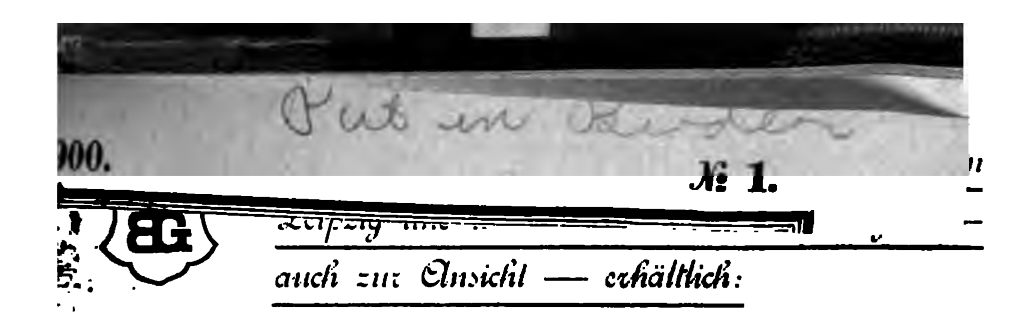
Es wird gebeten, die Manuscripte **druckfertig** einzuliefern und in den Correcturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuscript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuscriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Citate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuscriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik" üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muss dies bei Rücksendung des ersten Correcturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Uebersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaction und Verlagsbuchhandlung gestattet.



LEHRBUCH

DER

EXPERIMENTALPHYSIK

VON

ADOLPH WÜLLNER,

GEH. REGIERUNGSRAT UND PROF. DER PHYSIK AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU AACHEN.

FÜNFTE VIELFACH UMGEARBEITETE UND VERBESSERTE AUFLAGE.

☞ **Jeder Band ist einzeln käuflich.** ☜

ALLGEMEINE PHYSIK UND AKUSTIK.

[X u. 1016 S.] Mit 321 Abbildungen u. Figuren. 1895. ℳ 12.— In Hfzbd. ℳ 14.—

DIE LEHRE VON DER WÄRME.

[XI u. 936 S.] Mit 131 Abbildungen u. Figuren. 1895. ℳ 12.— In Hfzbd. ℳ 14.—

DIE LEHRE VOM MAGNETISMUS UND DER ELEKTRICITÄT.

Mit einer Einleitung:
GRUNDZÜGE DER LEHRE VOM POTENTIAL.

[XV u. 1414 S.] Mit 341 Abbildungen u. Figuren. 1897. ℳ 18.— In Hfzbd. ℳ 20.25.

DIE LEHRE VON DER STRAHLUNG.

[XII u. 1042 S.] Mit 300 Abbildungen und Figuren und 4 lithographierten Tafeln. 1899. ℳ 14.— In Hfzbd. ℳ 16.—

Die wissenschaftlichen Vorzüge dieses reich ausgestatteten Lehrbuchs sind von der Kritik einstimmig anerkannt worden. Dasselbe hat sich die Aufgabe gestellt, einerseits die physikalischen Lehren in weiteren Kreisen bekannt zu machen, andererseits denjenigen, welche tiefer in das Gebiet des physikalischen Wissens eindringen wollen, als Vorschule zu dienen; es hat aber, ohne den ersten Zweck aufser acht zu lassen, die zweite, wissenschaftliche Aufgabe mehr ins Auge gefafst, als dies von den verbreitetsten Lehrbüchern der Physik bis jetzt geschehen ist.

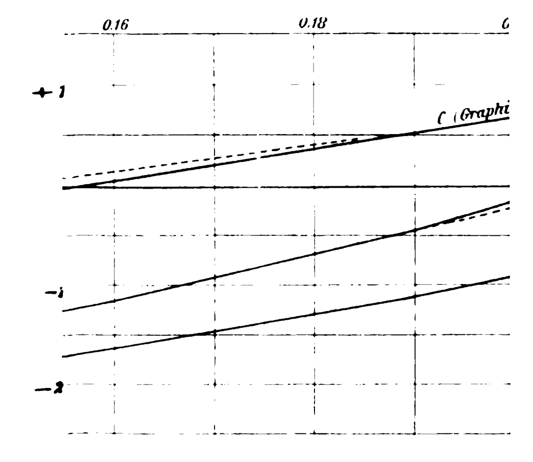
Die vorliegende, wesentlich vermehrte, vielfach umgearbeitete und verbesserte 5. Auflage der Experimentalphysik hat die gleiche Haltung wie die früheren Auflagen; das Buch soll unter dem steten Hinweise auf die Originalarbeiten eine Übersicht geben über den augenblicklichen Stand der experimentellen Physik und über die theoretischen Auffassungen, zu denen die Physik zur Zeit gelangt ist.

Der Schwerpunkt des Werkes liegt hiernach in den Experimentaluntersuchungen, und deshalb sind alle wichtigeren neueren Untersuchungen, die bis zur Bearbeitung des betreffenden Bandes erschienen waren, aufgenommen; wo es wünschenswert erschien, wurde auch auf ältere Arbeiten zurückgegriffen. Die Erweiterung des experimentellen Materials verlangte auch ein tieferes Eingehen in die Theorien; dieselben sind so weit dargelegt, wie es ohne zu ausgedehnte Rechnungen möglich war. Das neu zu behandelnde Material war ein recht ausgedehntes, daher auch der ziemlich erheblich gewachsene Umfang des Buches.

Aufser einer ganzen Menge von Spezialuntersuchungen auf allen Gebieten der Physik, welche den Ausbau in den Einzelnheiten bewirkt haben, sind es zwei, eigentlich ganz neue Gebiete, welche jetzt in die Physik aufgenommen werden mufsten. Das erste ist die auf dem Grenzgebiete der Physik und Chemie liegende Physik der Lösungen, welche von Van t'Hoffs kinetischer Theorie der Flüssigkeiten und der zuerst von Clausius ausgesprochenen, von Arrhenius durchgeführten Theorie der Dissociation der Lösungen ihren Ausgangspunkt nimmt. Die Gesetze der Osmose, der Diffusion, der Gefrierpunktserniedrigung, der Verminderung der Dampfspannung durch gelöste Salze, die Vervollständigung der von F. Kohlrausch gegebenen Theorie der elektrolytischen Leitung, die Beziehung zwischen Diffusion und Leitung, die Nernstsche Theorie der elektromotorischen Kräfte u. a. m. sind in den letzten Jahren als Früchte auf dem Boden dieser Theorie erwachsen.

Unmittelbar nach Abschlufs der vorigen Auflage begannen die klassischen Versuche von Hertz über die elektrischen Schwingungen, welche bis dahin nur in der Theorie von Maxwell vorausgesehen waren. Die Darlegung dieser Untersuchung verlangte ein neues Kapitel, nachdem die Maxwellschen Gleichungen des magnetischen Feldes in dem den Elektromagnetismus behandelnden Kapitel abgeleitet waren.

Die aus den Maxwellschen Gleichungen sich ergebende elektromagnetische Lichttheorie hatte zur Folge, dafs in der neuen Auflage die Lehre von der Strahlung, welche früher den zweiten Band bildete, in den vierten verlegt wurde. In demselben ist die elektromagnetische Lichttheorie neben der elastischen durchgeführt worden.


0.16
0.18
+1
C (Graphi
−1
−2

Probespalte

·m Sachregister zum I. Bande. | **aus dem Namenregister zum I. Bande.**

Die arabischen Ziffern bedeuten die Seitenzahlen.

·nz des Schalles 980, von Tönen
er Höhe 980, verschiedener
984.
le, musikalische 838.
· 726.

K.

·phon 791.
ität 364 ff.
itätskonstanten 395, Methoden
Bestimmung 396 ff., Zahlenwerte
, Einfluſs der Temperatur 410 ff.,
le 414, von geschmolzenen Sub-
·n 415, organischer Substanzen
ſs der Zusammensetzung 416.
ösungen und Mischungen 418.
e Steighöhe, in Röhren 385,
ıen Platten 386, an vertikaler
388, Gewicht der an der
neinheit der Berührungslinie
genen Flüssigkeit 384, 391.
röhren 379.
meter 24, Justierung 27.
f 914.
nm 12.
he Theorie der Gase 543, der
gkeiten 669.
32, Analyse desselben 859, Zer-
g 860, Zusammensetzung 868.
schwingender fester Körper 871,
ersal schwingender Saiten 872,
agener Saiten 873, gestrichener
. 875, longitudinal und tran-
schwingender Stäbe 876, der
ıgabel 877, schwingender Platten
Glocken 878, der Labialpfeifen
. von Flüssigkeitssäulen 897,
ıngenpfeifen mit harten Zungen
der Zungenpfeifen mit weichen
n 907, der Blasinstrumente 912,
okale nach Helmholtz 921, nach
nann 925.
guren, Chladnische 773.
in Flüssigkeitsstrahlen 494, bei
ıden Wellen 707.
inien 771.
n 212, der Flüssigkeiten 362,
pezifische 413.
ıtionstöne 990.
ıizierende Röhren 339.
ıtor 13.
ssion fester Körper 235, flüssiger
r 317, der Gase 520, 534, 537,
99.
ısionskoefficient, kubischer, fester
r 235, der Flüssigkeiten 318.
ısionspumpe 596, von Natterer

ıation *der Gase* 599.

Graham, Diffusion der Flüssigkeiten 444, Gasreibung 622, Diffusion der Gase 642, Diffusion der Gase durch poröse Diaphragmen 665, durch Colloide 667.
Grassi, Kompression der Flüssigkeiten 325, 326.
Grassmann, Vokaltheorie 925, Konsonantenbildung 927.
Graetz, Flüssigkeitsreibung 490.
S'Gravesand, Elasticität 216.
Greely, Schallgeschwindigkeit 933.
Grotrian, Flüssigkeitsreibung 488, 490.
Guthrie, Kapillarität, Gewicht abfallender Tropfen 402.

H.

Hagen, Oberfläche der Flüssigk. in engen Röhren 379, Kapillarkonstanten 407, Ausfluſs aus engen Röhren 483.
Hagen, E. B., Quecksilberluftpumpe 591.
Hagenbach, Flüssigkeitsreibung 477, 481.
Hajech, Brechung des Schalls 962.
Hällström, Stöſse akustische 985.
Handl und *Pribram*, Flüssigkeitsreibung 490.
Hann, barometr. Höhenmessung 567.
Harms, Atomistik 206.
Hausmanninger, Stoſs von Cylindern 299, Gasdiffusion 646.
Hauy, Bewegung infolge von Kapillarwirkungen 435.
Heen de, Einfluſs der Temperatur auf Kapillarkonstanten 412, Diffusion von Flüssigkeiten 454.
Helmert, Verschiedenheit von *g* 180.
Helmholtz, H. von, Wirbelringe 207, 208, Flüssigkeitsreibung 477, 481, und *Piotrowski*, Flüssigkeitsreibung 489, zusammengesetzte Saitenschwingungen 796, Vibrationsmikroskop 799, Schwing. gestrichener Saiten 801, Klang 832, Tonleiter 850, musikalische Temperatur 854, tiefste Töne 857, 858, Zusammensetzung des Klanges 860 ff., Resonatoren 861, Klangfarbe und Phase 869, Zusammensetzung der Klänge von Saiten 873, Theorie der Luftschwingungen in Röhren 896, Einfluſs der Wände auf die Pfeifentöne 896, Theorie der Zungenpfeifen mit weichen Zungen 908, Bildung und Theorie der Vokale 918, 923, Schallgeschwindigkeit in Röhren 944, in Flüssigkeiten 957, Resonanz und Dauer des Nachklingens 965, Hören 973, akustische Stöſse 987, Summationstöne 991, Theorie der Kombinationstöne 993, Theorie der Konsonanz

Probespalte

aus dem Sachregister zum III. Bande.

Elasticität, elektrische 369.
Elektricität 176, Erkennung derselben 176, positive und negative 178, 223, Hypothesen von Symmer und Franklin 223, Erregung derselben durch Reibung 186, durch Schaben und Feilen 189, durch Druck 190, durch Erwärmen 190, durch Bestrahlung 192, durch Belichtung 193, durch Berührung zweier Metalle 475, durch Berührung von Metallen und Flüssigkeiten 499, bei Berührung zweier Flüssigkeiten 529, zweier verschieden konzentrierter Lösungen derselben Substanz 532, zwischen Metallen und Gasen 535, bei Berührung schlechter Leiter 538.
— Dichtigkeit derselben 235, Bestimmung der Dichtigkeit 236.
— Entladung derselben 403, Entladungsstrom 403, Entladungspotential 412, Einfluſs der Belichtung durch ultraviolettes Licht auf dieselbe 423, Entladung durch Spitzen 424, Entladung einer Batterie, Dauer derselben 430, kontinuierliche 434, intermittierende 434, oscillierende 1307, Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Entladungsstromes 436, 1353, Wärmewirkung desselben 450, Lichtwirkung 469, mechanische Wirkung 465, chemische Wirkung 472, 815, physiologische Wirkung 473, magnetische Wirkung 473, 1116, elektrische Wirkung 474, 1175.
— Gesetze der elektrischen Anziehung und Abstoſsung 197.
— Leitung und Mitteilung 182, 228.
— Maſs derselben 194, Dimensionen des absoluten Maſses 196.
— Sitz derselben 231.
— Spannung derselben 237.
— Verteilung auf einzeln stehenden Leitern 238, auf mehreren leitend verbundenen Leitern 249, auf zwei leitend verbundenen Kugeln 251, auf getrennten Leitern 267.
— Zerstreuung derselben 209, Abfluſs über isolierende Stützen 209.
Elektricitätsmenge, Messung mit der Torsionswage 204.
— Einheit derselben in absolutem elektromagnetischen Maſs 1234, Dimensionen dieser Einheit 1234.
Elektrischer Zustand 176.
Elektrische Verteilung oder Influenz 216, in Nichtleitern 222.
Elektrisches Grundgesetz von W. Weber 966, Einwürfe gegen dasselbe 973.
Elektrisiermaschine 374.
Elektrisierungskonstante eines Dielektricum 308.
Elektrochemie 774.

aus dem Namenregister zum IV. Bande.

K.

Kayser, Beschreibung der Gasspektra 408, 420, **Entstehung der Banden und Linienspektra 411, Konstanz des Magnesiumspektrums bei verschiedenen** Temperaturen 412.
Kayser und *Runge*, **Dispersion der** Luft 253, **Regelmäſsigkeit in der** Verteilung der Linien **in Gasspektren** 421.
Kempf siehe Müller.
Kerr, elektrische **Doppelbrechung 918, 920, 921, Drehung der Polarisationsebene an magnetischen Spiegeln 993.**
Keſsler, **Minimum der Ablenkung der** Strahlen im Prisma 99, **geradsichtige** Prismen 294.
Ketteler, Dispersionstheorie **129, Dispersionsgleichungen 140, Abhängigkeit der Brechungsexponenten vom Einfallswinkel 141, Messung von Brechungsexponenten** bei **anomaler Dispersion** 175, Prüfung der **Dispersionsformeln** 197, Dispersion des **Steinsalzes 202, Brechungsexponenten von Cyaninlösungen** 205, spezifisches **Brechungsvermögen** 212, **Brechungsexponenten** des Wassers 220, **verschiedener Flüssigkeiten** 221, **spezifisches Brechungsvermögen** 223, Dispersion **in Gasen 241,** Brechungsexponenten für groſse Wellenlängen 264, Absorption **des Lichtes** 382, Farben dicker Platten **556,** Grenzen der Interferenzen **bei groſsen Gangunterschieden 567, Totalreflexion 735,** Theorie der **Metallreflexion 755, elliptische** Polarisation **bei gewöhnlicher** Reflexion 795, **Theorie der Doppelbrechung** 832, **Theorie der Drehung** der Polarisationsebene **im Quarz 943,** Theorie der **Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Feld 1007.**
Kirchhoff, Fraunhofersche **Linien 168,** Absorption des **Lichtes in farbigen** Flammen 363, **Satz über das Verhältnis zwischen Emission und Absorption** 365, Beschaffenheit **der Sonne 368,** Erklärung **der Fraunhoferschen Linien** 368, Emission **des Lichtes 370, Geschichte der Spektralanalyse 374,** Huyghenssches **Prinzip 613, Talbotsche** Linien 650, **Neumanns Reflexionstheorie** 700, **Theorie der Metallreflexion** 761, Theorie **der Doppelbrechung 830,** 867.
Kirchhoff und *Bunsen*, **Spektralanalyse** 375, Entdeckung **von Rubidium und** Cäsium 376, **Abhängigkeit der Spektra** von der **Temperatur 412.**
Klatt siehe Lenard.

Aus den zahlreichen Besprechungen:

Beiblätter zu den Annalen der Physik u. Chemie 1898, Nr. 1:

...Kaum giebt etwas einen besseren Einblick in den ungeheuren Fortschritt in quantitativer wie qualitativer Hinsicht auf dem Gebiete der Elekricitätslehre, als ein vergleichendes Studium der vierten und fünften Auflage des Wüllnerschen Lehrbuches. Mit ungeheurem Fleifs und der ihm eigenen Begabung hat der Verf. die alten und die neuen Forschungen zu einem einheitlichen Ganzen zusammengearbeitet. Dem Jüngeren wird dieses Werk ein vorzügliches Lehrbuch, dem Älteren ein ausgezeichnetes Nachschlagewerk sein. **E. W.**

Elektrochemische Zeitschrift, Heft 3:

... Das Werk zeichnet sich nicht nur durch eine gründliche und bis ins Detail eingehende Darstellung des behandelten Stoffes aus, sondern es ist, was wir besonders hervorheben möchten, durch die Klarheit der Darstellung und durch die aufserordentlich glücklich gewählte Anordnung des Stoffes eine in jeder Hinsicht wertvolle Bereicherung der Bibliothek jedes Elektrochemikers. Wir möchten deshalb nicht verfehlen, die Aufmerksamkeit unserer engeren Fachgenossen ganz besonders auf dasselbe zu lenken und es denselben zur Anschaffung zu empfehlen.

Zeitschrift f. d. Realschulwesen, 5:

...Wir sind überzeugt, dafs die 5. Auflage des III. Bandes des bekannten, allgemein geschätzten Wüllnerschen „Lehrbuches der Experimentalphysik", deren Inhalt durchweg der Litteratur des Gegenstandes bis auf die neueste Zeit Rechnung trägt, die grofse Zahl der Freunde des gediegenen Werkes erheblich vermehren wird. Den Lehrern der Physik sei auch dieser Band wärmstens empfohlen. **Glöser.**

Naturw. Wochenschr., 11:

... Dafs das Werk in keiner einigermafsen ausgestatteten physikalischen Bibliothek fehlen darf, braucht nicht betont zu werden; wir wollen aber bei der klaren Vorführung der aufserordentlichen Fülle des Gebotenen in Verbindung mit dem bemerkenswert billigen Preise des Werkes auf die Zweckdienlichkeit auch für chemische und überhaupt exakt-naturwissenschaftliche sowohl wie Schulbibliotheken aufmerksam machen. Das Werk ist in der Lage, diesen eine grofse physikalische Bibliothek zu ersetzen.

Zeitschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereines, Nr. 29:

... Man sieht, Prof. Wüllner hat sein altbewährtes Lehrbuch so gründlich erneuert, dafs auch die Resultate jüngster Forschung darin berücksichtigt erscheinen und dasselbe wieder auf vollster Höhe der Wissenschaft steht. Über die ausgezeichnete und so selten klare Darstellungsweise Wüllners, sowie über die schöne und angemessene Ausstattung des Buches braucht man weitere Worte nicht zu verlieren; sie sind ja altbekannt. Ein vorzügliches Sachregister und ein ebenso gutes Namensverzeichnis sind dem Bande sehr willkommener Weise beigegeben. Wüllners treffliches Werk wird sich in seiner neuen Ausgabe mit Recht zu den vielen alten gar manchen neuen Freund gewinnen. **M. P.**

Zeitschrift f. physikal. Chemie, XXV. Bd., 4. Heft:

Das Interesse der Leser dieser Zeitschrift wird sich bei den wohlbekannten allgemeinen Eigentümlichkeiten des grofsen Wüllnerschen Werkes vornehmlich auf den elektrochemischen Teil richten. Hier ist nun zu sagen, dafs der Verfasser sich offenbar ernstlich bestrebt hat, den gemachten Fortschritten Rechnung zu tragen und seinen Lesern einen Einblick in die neu entstandenen wichtigen Gebiete zu vermitteln.... **W. O.**

Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen 1898, Heft 2:

... Der neue Band (III) hat gegenüber der letzten Auflage wieder **erheblich** zugenommen und ist auf den stattlichen Umfang von **1150 Seiten angewachsen.** Die Zunahme entspringt dem Streben des Verfassers nach **Vollständigkeit, und** deshalb sind diejenigen beiden Kapitel, in denen vornehmlich **in den letzten** Jahren grofse Fortschritte erzielt sind, dasjenige der Elektrolyse und **das der** elektrischen Schwingungen, erheblich erweitert, bezüglich völlig neu **bearbeitet,** während ältere Theorien und Darstellungen nicht in gleichem **Mafse gekürzt** sind. Dadurch ist auch der ganze Standpunkt des Werkes charakterisiert. **Denn** dasselbe giebt nicht nur einen vollständigen Überblick **über den** gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse, sondern **zugleich auch** die ganze Entwickelung, welche unsere Naturerkenntnis mit **fortschreitender** Erfahrung genommen hat. **Dieterici.**

Centralorgan der beh. aut. Civiltechniker in Österreich, Nr. 3:

Das gegenwärtig in seiner fünften, vielfach umgearbeiteten **und verbesserten** Auflage erschienene Werk ist seinem theoretischen Inhalte **nach so** aufserordentlich wertvoll und so rühmlich bekannt, dafs es wohl **weiter** keiner Empfehlung bedarf. ...

„Natur“, 10:

... Der hervorragende Platz, den das Buch seit langer Zeit **unter** unseren gröfseren Lehrbüchern eingenommen hat, bleibt ihm auch **bei dieser** Auflage vollkommen gesichert. **O. M.**

Zeitschrift für lateinlose Schulen, 10:

Endlich ist der langersehnte Band, der die neuen Forschungen **auf elektrischem** Gebiete zu berücksichtigen hatte, erschienen. Er ist auf **1414 Seiten** angewachsen, sodafs für den verschwindend niedrigen Preis **geradezu** Aufserordentliches geliefert wird. ...

Bestell-Zettel. Bei der

Buchhandlung in

bestellt der Unterzeichnete hiermit ein Exemplar des im Verlage von B. G. Teubner in Leipzig erschienenen Werkes [zur Ansicht]:

Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik. In vier Bänden. 1895/99. gr. 8. geh. und in Halbfranz geb.

Jeder Band ist einzeln käuflich.

I. Band. Allgemeine Physik u. Akustik. n. *M.* 12.— Hfzbd. *M.* 14.—
II. „ Die Lehre von der Wärme. n. *M.* 12.— Hfzbd. *M.* 14.—
III. „ Die Lehre vom Magnetismus und der Elektricität. n. *M.* 18. Hfzbd. *M.* 20.25.
IV. „ Die Lehre von der Strahlung. n. *M.* 14.— Hfzbd. *M.* 16.—

Unterschrift

Ort, Datum, Wohnung:

Personalnotizen.

Bücheranzeigen.

